1.

Školsko (gradsko) natjecanje

Školsko natjecanje prva je razina natjecanja iz matematike za koju zadatke sastavlja Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Školska natjecanja održana su diljem Hrvatske u četvrtak 25. siječnja 2018.

Svi učenici rješavali su po sedam zadataka. Prvih pet su lakši i bodovali su se sa 6 bodova svaki, a zadnja dva su teža i svaki je vrijedio 10 bodova. Za učenike osnovnih škola natjecanje je trajalo dva sata, a za učenike srednjih škola tri sata.

ZADACI

Osnovna škola

4. razred

4.1. Izračunaj: $9000 - 26 \cdot (21\,121 - 6687 : 9 \cdot 28) + 696$.

4.2. Četiri prijateljice, Renata, Ivana, Tanja i Nikol, sjedile su na klupi u parku, ne nužno tim redoslijedom. Onda su počele međusobno mijenjati mjesta sjedenja: najprije su Renata i Tanja zamijenile mjesta, zatim su mjesta zamijenile Tanja i Nikol, a nakon toga Ivana i Renata.

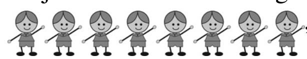
Konačan poredak sjedenja na klupi, slijeva udesno, bio je: Renata, Ivana, Tanja, Nikol.

U kojem su poretku, slijeva udesno, četiri prijateljice sjedile na početku, prije zamjene mjesta sjedenja?

4.3. Riječ "MATKA" oblikovana je kao na slici. Koliko šiljastih, koliko pravih, a koliko tupih kutova određuju linije koje oblikuju slova riječi "MATKA"?

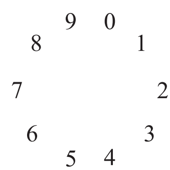
4.4. Sat na crkvenom tornju otkucava svakoga punog sata onoliko puta koliko je sati. Uz to, u svaki puni sat i 15 minuta sat otkuca jednom, u svaki puni sat i 30 minuta dvaput, a u svaki puni sat i 45 minuta triput.

Koliko puta će sat otkucati od 6 sati i 20 minuta do 11 sati i 40 minuta?

4.5. Broj stanovnika u Republici Hrvatskoj u dobi od 10 do 14 godina prikazan je sličicom (piktogramom): , gdje  predstavlja 30 000 osoba.

Ako je broj djevojčica za 6500 veći od broja dječaka, koliko u Republici Hrvatskoj ima dječaka u dobi od 10 do 14 godina?

4.6. Lokot za zaključavanje bicikla ima četiri koluta sa znamenkama 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, pomoću kojih se tvori četveroznamenkasta kombinacija koja otključava lokot. Koluti se mogu okretati u dva smjera. Sad je lokot zaključan i postavljen na kombinaciju znamenaka 2768. Ako se zna da je prilikom zaključavanja prva znamenka šifre koja otključava lokot okrenuta za 5, druga za 7, treća za 2, a četvrta za 3 koraka, odredi sve moguće šifre lokota.



4.7. Pčelar je ove godine proizveo 240 kg meda. Trećinu meda pakirat će u staklenke od 1 kg, trećinu u staklenke od 800 grama i trećinu u staklenke od 500 grama. Staklenke s medom od 1 kg prodavat će po 40 kn, staklenke od 800 grama po 35 kuna, a staklenke od 500 grama prodavat će po 30 kuna. Kolika će mu biti zarada nakon što proda sav med?

5. razred

5.1. Izračunaj: $2018 \cdot 146 - [2018 - 18 \cdot (4 + 5 \cdot 20)] \cdot 18$.

5.2. Mladunac kita je dvadeset puta teži od mladunca slona. Mama slonica je 50 puta teža od svog mladunca i 30 puta lakša od mame kit, a teška je 6 tona. Koliko je težak mladunac slona, koliko mladunac kita, a koliko mama kit? Koliko puta je mama kit teža od svoga mladunca?

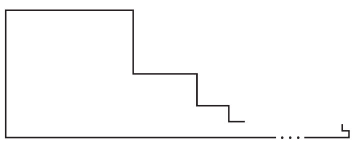
5.3. Nikola je pojeo 100 bombona od ponedjeljka do petka. U utorak je pojeo 6 bombona više nego u ponedjeljak i tako svakog sljedećeg dana 6 bombona više nego prethodnog dana. Koliko je bombona Nikola pojeo u četvrtak?

5.4. U nekoj su trgovini naručili 2400 kilograma brašna. Planirali su ga prepakirati u vrećice od 5 kg i prodavati za 14 kn po vrećici. Kad je roba stigla, primijetili su da je u transportu uništeno 300 kg brašna. Za koliko treba povećati cijenu pakiranja od 5 kg da planirana zarada, unatoč manjoj količini brašna, ipak ostane ista?

5.5. Od najmanjeg šesteroznamenkastog broja djeljivog s 2 i 3 oduzmi najmanji peteroznamenkasti broj djeljiv s 5 i 9. Kolika je dobivena razlika? Tu razliku zaokruži na najbližu stoticu. Koji si broj dobio?

5.6. Od znamenaka 9, 8, 5, 4, 1 i 0 formirani su četveroznamenkasti brojevi koji imaju sve znamenke različite. Koliko je takvih brojeva djeljivo s 5?

5.7. U ravnini je zadan kvadrat duljine stranice 1024 cm, do njega je nacrtan sljedeći kvadrat čija je stranica dvostruko kraća i tako se nastavlja niz kvadrata dokle god su duljine stranica prirodni brojevi izraženi u centimetrima.



a) Izračunaj opseg tog lika.

b) Izračunaj površinu kvadrata koji je srednji u tom nizu.

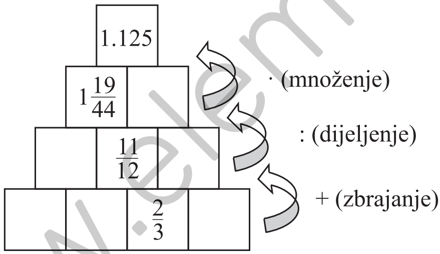
6. razred

6.1. Četveroznamenkasti broj $\overline{x04y}$ djeljiv je brojevima 8 i 9. Odredi nepoznate znamenke x i y. Nađi sva rješenja.

6.2. Usporedi razlomke:

$$\frac{1+2+3+\ldots+50}{2018} \quad \text{i} \quad \frac{1275}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 9}.$$

6.3. U svako prazno polje lika na slici treba upisati broj tako da su zadovoljena sljedeća svojstva: u polju na vrhu nalazi se umnožak dvaju brojeva koji se nalaze u poljima neposredno ispod njega; u svakom polju u drugom retku nalazi se količnik dvaju brojeva koji se nalaze u poljima neposredno ispod, i to tako da se lijevi broj podijeli desnim brojem; u svakom polju u trećem retku nalazi se zbroj dvaju brojeva koji se nalaze u poljima neposredno ispod tog polja.



6.4. Odredi duljine kateta pravokutnog trokuta površine 24 cm^2. Duljine kateta prirodni su brojevi izraženi u centimetrima. Napiši sva rješenja.

6.5. Antea i Barbara započinju svoj novi posao istog dana. Antea radi tri dana uzastopno, potom se jedan dan odmara i na isti način nastavlja dalje (3 radna dana, pa 1 dan odmora). Barbara radi sedam dana uzastopno, potom se odmara tri i na isti način nastavlja dalje (7 radnih dana, pa 3 dana odmora).

Koliko će Antea i Barbara imati zajedničkih dana odmora u prvih 1000 dana rada?

6.6. Vanjski i njemu susjedni unutarnji kut trokuta razlikuju se za 25°. Preostala dva unutarnja kuta trokuta također se razlikuju za 25°. Odredi veličine svih unutarnjih kutova trokuta. Ispitaj sve mogućnosti.

6.7. Od jako dugog komada žice oblikuju se trokuti na sljedeći način:

Odmjeri se dio duljine 10 cm i dva dijela duljine 8 cm te se od njih oblikuje jednakokračni trokut, bez rezanja žice. Zatim se oblikovanje jednakokračnih trokuta od ostatka žice nastavlja tako da su duljine stranica svakog idućeg trokuta za 2 cm kraće od duljina odgovarajućih stranica prethodnog trokuta (pri tom svi trokuti imaju jedan zajednički vrh). Postupak se nastavlja bez rezanja žice, dok god je to moguće.

a) Koliko se najviše takvih trokuta može složiti ako se postupak nastavlja na opisani način?

b) Kad se na opisani način oblikuju svi mogući trokuti, prereže se žica. Koliki je zbroj opsega svih tako nastalih trokuta?

c) Od istog (odrezanog) komada žice oblikuje se pravokutnik čije se duljine susjednih stranica razlikuju za 12 cm. Izračunaj površinu tog pravokutnika.

7. razred

7.1. Aritmetička sredina pet podataka iznosi 18. Kolika će biti aritmetička sredina preostalih podataka nakon što izbacimo podatak čija je vrijednost jednaka 10?

7.2. Veličine vanjskih kutova pravokutnog trokuta (koji nisu pravi) odnose se kao $7 : 11$. Odredi veličine šiljastih kutova tog trokuta.

7.3. Uspjeh učenika neke osnovne škole na kraju nastavne godine prikazan je kružnim dijagramom. Na tom je dijagramu 15 učenika upućenih na dopunski rad predstavljeno kružnim isječkom sa središnjim kutom veličine $8°38'24''$. Koliki je ukupan broj učenika u toj školi?

7.4. Igraća kockica bačena je dva puta zaredom. Kolika je vjerojatnost da zbroj dvaju dobivenih brojeva bude prost broj?

7.5. Da bi mogao kupiti novi mobitel, Lovri je nedostajalo još 5 % ušteđevine. No, nakon toga je cijena mobitela snižena za 5 %. Tada je Lovro shvatio da ima dovoljno novca za mobitel, čak će mu nakon kupovine ostati 4 kune. Kolika je bila cijena mobitela prije, a kolika je nakon sniženja?

7.6. Zadan je pravokutnik $ABCD$ kojem je točka S sjecište dijagonala. Na stranici $\overline{AD}$ odabrane su točke E i F takve da je $|AE| = |EF| = |FD|$. Odredi omjer površine peterokuta $EBSCF$ i površine pravokutnika $ABCD$.

7.7. Prvih 120 km neke udaljenosti automobil se kreće brzinom $90\ \mathrm{km/h}$. Zatim se brzina smanjuje na $64\ \mathrm{km/h}$ te se tom brzinom vozi 1 sat i 15 minuta. Kojom brzinom automobil treba voziti preostalu šestinu puta da bi prosječna brzina na cijelome putu bila $80\ \mathrm{km/h}$?

8. razred

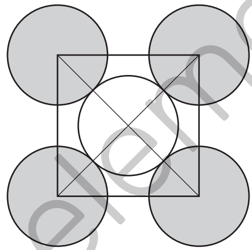
8.1. Izračunaj vrijednost izraza:

$$\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}-\frac{\sqrt{5.5}-\sqrt{7.5}}{\sqrt{2}}.$$

8.2. Dvije boce jednakih volumena napunjene su smjesom vode i soka. U prvoj boci omjer količina vode i soka je $2 : 1$, a u drugoj boci $4 : 1$. Ako prelijemo sadržaje obiju boca u treću bocu, koliki će u njoj biti omjer količina vode i soka?

www.element.hr

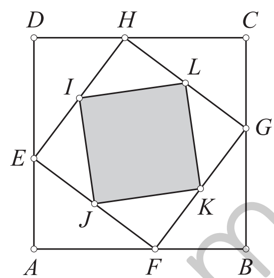
8.3. Pet sukladnih kružnica dodiruju se kao što je prikazano na crtežu. Središta vanjskih kružnica su vrhovi kvadrata. Koliki je omjer površine svih zatamnjenih krugova i površine nezatamnjenog dijela kvadrata?



8.4. U kutiji se nalazi tisuću kuglica s brojevima 1, 2, 3, ..., 999, 1000. Kolika je vjerojatnost da će se jednim izvlačenjem izvući broj koji nije djeljiv ni s 4 ni sa 6? Rješenje napiši u obliku postotka.

8.5. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je broj $|n^2 - 100|$ prost.

8.6. Zadan je kvadrat $ABCD$. Točke E, F, G i H dijele redom stranice kvadrata $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ u omjeru $4:3$. Točke I, J, K i L su polovišta stranica kvadrata $EFGH$. Površina obojanog kvadrata $IJKL$ upisanog kvadratu $EFGH$ iznosi 200 dm^2. Izračunaj površinu kvadrata $ABCD$.



8.7. Dokaži da je zbroj kvadrata pet uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5, ali nije djeljiv brojem 25.

Srednja škola — A varijanta

1. razred

1.1. Matija 2018. godine navršava onoliko godina koliki je trostruki zbroj znamenaka godine njegovog rođenja. Isto vrijedi i za njegovog djeda. Koliko je godina djed navršio u godini Matijinog rođenja?

1.2. Dan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C i stranicama duljina $|AB| = 26$, $|BC| = 24$. U njega je upisana polukružnica s promjerom na stranici $\overline{BC}$ koji sadrži točku C. Polukružnica dira stranicu $\overline{AB}$. Koliki je polumjer upisane polukružnice?

1.3. Kažemo da je prirodni broj N *zanimljiv* ako je djeljiv s 36 i ako postoji prirodni broj k manji od 10 takav da su $1, 2, \ldots, k$ u nekom poretku znamenke broja N u dekadskom zapisu. Odredi najmanji zanimljiv prirodni broj.

1.4. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3$.

1.5. Na koliko se načina može u svako polje tablice 2018×2018 upisati po jedan prirodni broj tako da zbroj brojeva u bilo koja tri uzastopna polja u istom retku ili stupcu bude 5?

1.6. U trokutu ABC mjera kuta $\sphericalangle ABC$ je 120°, te vrijedi $|AB| = 6$ i $|BC| = 9$. Neka su točke P i Q na stranici $\overline{AC}$ takve da je trokut BPQ jednakostraničan. Odredi $|PQ|$.

1.7. Marin raspoređuje brojeve 1, 2, …, 8 u vrhove kocke, a zatim svakom bridu pridružuje zbroj brojeva u vrhovima koje taj brid spaja. Može li Marin postići da svi brojevi pridruženi bridovima budu međusobno različiti?

2. razred

2.1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\mathrm{Re}\,(z) = 9 \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}\,(z^2) = \mathrm{Im}\,(z^3).$$

2.2. Dan je pravokutnik $ABCD$. Između pravaca AB i CD, paralelno s njima, nacrtan je određeni broj crvenih pravaca, a između pravaca AD i BC, paralelno s njima, određeni broj plavih pravaca. Time je pravokutnik podijeljen na 775 malih pravokutnika, a crveni i plavi pravci međusobno se sijeku u 720 točaka. Koliko ima crvenih, a koliko plavih pravaca?

2.3. Odredi sve trojke prostih brojeva (p, q, r) za koje vrijedi

$$p^q = r - 1.$$

2.4. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 4y^2 &= -1 \\ 4x^2 + xy - 11y^2 &= -2. \end{aligned}$$

2.5. Dan je trapez $ABCD$ s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, takav da je trokut ABC šiljastokutan. Neka je O središte kružnice opisane trokutu ABC, a točka E sjecište pravaca OB i CD. Ako je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CEB + 10^\circ$, odredi veličinu kuta između dijagonala trapeza $ABCD$.

2.6. U trokutu ABC vrijedi $|AC| = 2$, $|BC| = 1$, a kut pri vrhu C je pravi. Kvadrat je smješten unutar tog trokuta tako da mu dva vrha leže na dužini $\overline{AC}$, treći na stranici $\overline{AB}$, a četvrti na kružnici polumjera 1 sa središtem u točki B. Odredi duljinu stranice toga kvadrata.

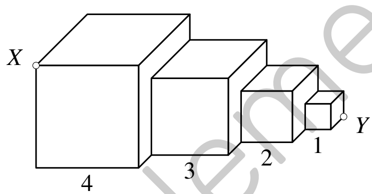
2.7. Retci tablice 50×50 označeni su brojevima $a_1, \ldots, a_{50}$, a stupci brojevima $b_1, \ldots, b_{50}$. Tih 100 brojeva je međusobno različito i među njima je točno 50 racionalnih brojeva. Tablica je popunjena tako da je za $i, j = 1, 2, \ldots, 50$, u polje (i, j) upisan broj $a_i + b_j$. Odredi najveći mogući broj racionalnih brojeva upisanih u polja tablice.

3. razred

3.1. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$1 \leqslant \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \leqslant 3.$$

3.2. Četiri kocke duljina bridova 1, 2, 3 i 4 nalaze se jedna do druge kao na slici. Odredi duljinu dijela dužine $\overline{XY}$ koji se nalazi unutar kocke brida duljine 3.



3.3. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$(x - 1009)^3 + (2x - 1009)^3 + (2018 - 3x)^3 = 0.$$

3.4. Na koliko se načina sva slova $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I$ mogu poredati tako da su i samoglasnici i suglasnici poredani abecednim redom?

3.5. Odredi sve proste brojeve p za koje postoji prirodan broj m takav da je broj

$$p^m + 4$$

kvadrat prirodnog broja.

3.6. Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ visine šiljastokutnog trokuta ABC. Odredi najmanju veličinu kuta $\sphericalangle BAC$ za koju je moguće da vrijedi $|AE| \cdot |AD| = |BE| \cdot |CD|$.

3.7. Zgrada uz prizemlje ima još 100 katova. Dizalo u toj zgradi ima samo dvije tipke A i B. Pritiskom na tipku A dizalo se penje za 7 katova, a pritiskom na tipku B dizalo se spušta za 9 katova. Je li moguće takvim dizalom doći sa svakog kata na bilo koji drugi?

4. razred

4.1. Odredi zadnje dvije znamenke broja $(1!)^2 + (2!)^2 + \cdots + (2018!)^2$.

4.2. Neka je z kompleksan broj takav da je $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ i $z^6 + z^3 + 1 = 0$. Odredi modul i argument broja z.

Argument kompleksnog broja $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je broj $\arg z = \varphi$.

4.3. Dokaži da je $2^{2^{n+2}}+4$ višekratnik broja 10 za svaki prirodni broj n.

4.4. U kutiji se nalazi n kuglica, od kojih su neke bijele, a neke crne. Odredi n ako je vjerojatnost da izvlačenjem dviju kuglica izvučemo jednu bijelu i jednu crnu jednaka $\frac{1}{2}$ i poznato je da kuglica jedne boje ima za 2018 više nego kuglica druge boje.

4.5. Odredi geometrijsko mjesto (skup) središta svih kružnica koje izvana diraju kružnicu s jednadžbom $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$, a os x im je tangenta.

4.6. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_{41}$ aritmetički niz takav da je

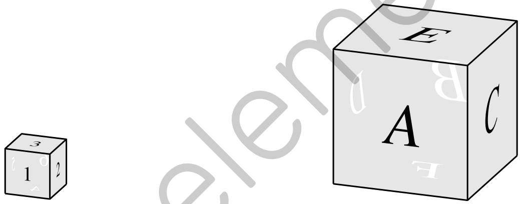
$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{40}} + \sqrt{a_{41}}}$$

prirodni broj. Ako je $a_1 = 1$, a razlika niza prirodni broj, odredi razliku niza.

4.7. Dano je 27 identičnih standardnih igraćih kockica $1 \times 1 \times 1$ s brojevima 1 do 6, kao na slici lijevo (nasuprot 1 je 6, nasuprot 2 je 5 i nasuprot 3 je 4).

Od njih je sastavljena kocka $3 \times 3 \times 3$ tako da se kockice uvijek diraju stranama na kojima je isti broj. Promatramo zbrojeve brojeva napisanih na stranama velike kocke. Ti zbrojevi su označeni slovima A, B, C, D, E, F, kao na donjoj slici (parovi na suprotnim stranama su A i B, C i D te E i F).

Ako je $A = 9$ i $C = 36$, odredi B, D, E i F.



Srednja škola — B varijanta

1. razred

1.1. Izračunajte

$$\frac{20182019^2 - 20182018^2}{20182018 \cdot 20182020 - 20182017 \cdot 20182019}.$$

1.2. Ako je $a - b = 3$, a $a \cdot b = 1$, koliko je $\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}$ i $\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6}$?

1.3. Riješite jednadžbu

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x+2} - \frac{5x}{(x-1)(x+2)} = \frac{4}{x^2+x-2} - \frac{2}{x-1}.$$

1.4. Na stranici $\overline{AB}$, pravokutnika $ABCD$, odabrana je točka E, a na stranici $\overline{CD}$ točka F tako da je četverokut $EBFD$ romb. Odredite duljinu dužine $\overline{EF}$ ako su duljine stranica pravokutnika $a = |AB|$ i $b = |BC|$, $|AB| > |BC|$.

1.5. Odredite znamenke x, y, z i t tako da vrijedi

$$\overline{xyzt} + \overline{yzt} + \overline{zt} + \overline{t} = 2018.$$

1.6. Nora ima tri ogrlice s različitim brojem perlica. Od njih je napravila tri nove ogrlice od kojih svaka ima 50 perlica. To je postigla tako da je s prve ogrlice skinula $\frac{2}{7}$ perlica i premjestila ih na drugu ogrlicu, a zatim s tako dobivene druge ogrlice premjestila $\frac{2}{7}$ perlica na treću i s tako dobivene treće ogrlice $\frac{2}{7}$ perlica premjestila na prvu. Koliko je bilo perlica na svakoj ogrlici prije premještanja?

1.7. Iz točke D stranice $\overline{AB}$, $|AD| > |BD|$, jednakostraničnog trokuta ABC povuče se okomica na stranicu $\overline{BC}$ s nožištem u E. Zatim se iz E povuče okomica na $\overline{CA}$ s nožištem u F, a iz F okomica na $\overline{AB}$ s nožištem u G. Površina četverokuta $DEFG$ jednaka je $21\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, a duljina stranice trokuta ABC iznosi 14 cm. Odredite duljinu $x = |BD|$ i opseg četverokuta $DEFG$.

2. razred

2.1. Odredite realni parametar m tako da za rješenja x_1, x_2 jednadžbe

$$5x^2 - 10m^2x - mx - 3x + 6m^2 + m - 4 = 0$$

vrijedi $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) = 2018$.

2.2. Odredite kvadratnu funkciju kojoj su nultočke $\frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ i $\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ ako točka $A(\sqrt{3}, 9)$ pripada grafu te funkcije.

2.3. Jedne su godine 1. siječanj i 1. travanj bili u četvrtak. Koliko u toj godini ima mjeseci koji imaju pet petaka? Obrazložite.

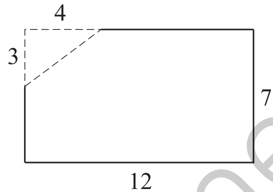
2.4. Neka su a i b rješenja jednadžbe $z^2 + z + 1 = 0$. Izračunajte $a^{2018} + b^{2018}$.

2.5. Odredite sve uređene parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 18y^2 = 0, \\ xy - 3y^2 + x - 5y = 0. \end{cases}$$

2.6. Na visini od x metara iznad pozornice visi reflektor usmjeren okomito na pozornicu i na njoj osvjetljava krug površine $P\ \text{m}^2$. Ako bismo reflektor podignuli za 1 metar, osvjetljena bi se površina povećala za $2.25\ \text{m}^2$. Ako bismo reflektor spustili za 1 metar, osvjetljena bi se površina smanjila za $1.75\ \text{m}^2$ (u odnosu na prvobitnu površinu). Na kojoj se visini iznad pozornice nalazi reflektor?

2.7. Od pravokutne ploče duljina stranica 12 cm i 7 cm, odrezan je jedan vrh u obliku pravokutnog trokuta s katetama duljina 4 cm i 3 cm, kao na slici. Iz preostalog dijela treba izrezati novu pravokutnu ploču. Kolika je najveća moguća površina nove pravokutne ploče? Odredite njezine dimenzije (duljine stranica).



3. razred

3.1. Riješite jednadžbu $9^{-(x+2)^2} + 8 \cdot 3^{-x^2-4x-5} - 1 = 0$.

3.2. Odredite najveću vrijednost funkcije

$$f(x) = \left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \ldots + \sin\frac{k\pi}{3} + \ldots + \sin\frac{2018\pi}{3}\right)^2 \cdot \cos x$$
$$+ \left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \ldots + \cos\frac{k\pi}{3} + \ldots + \cos\frac{2018\pi}{3}\right)^2 \cdot \sin x.$$

3.3. Jednakokračni trokut ABC s osnovicom $\overline{BC}$, $|BC| = 20$, te krakovima duljine 18 podijeljen je dužinom $\overline{DE}$ na dva dijela jednakih opsega i površina. Točka D je na osnovici, a točka E na kraku $\overline{AC}$ te su obje različite od vrhova trokuta. Odredite duljinu $|DC|$.

3.4. Odredite neki period funkcije

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{3}{4}x\right) + \cos\left(\frac{4}{5}x - \frac{\pi}{3}\right).$$

3.5. Božićne se kuglice pakiraju u dvije vrste kutija, crvene i zelene. U crvene se kutije kuglice pakiraju u pet redova sa po četiri kuglice, a u zelene u tri reda sa po šest kuglica. Na koliko različitih načina možemo odabrati broj crvenih i broj zelenih kutija kako bismo spakirali 2018 božićnih kuglica? Ne smije biti nepopunjenih kutija i niti jedna kuglica ne smije ostati nespakirana.

3.6. Na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ riješite sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} (\operatorname{tg} x - 1)(\sin x + 1) < 0 \\ 4\sin^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\sin x + \sqrt{3} > 0. \end{cases}$$

3.7. Kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida a presiječemo ravninom koja prolazi točkama $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{BC}$ i $G \in \overline{B_1C_1}$ takvima da je $|AE| = \frac{1}{4}|AB|$, $|BF| = \frac{2}{3}|BC|$ i $|B_1G| = \frac{1}{3}|B_1C_1|$. Obujam manjega od dvaju tako nastalih geometrijskih tijela je $\frac{7}{6}$. Odredite obujam početne kocke.

4. razred

4.1. Riješite jednadžbu

$$\binom{x+1}{x-2} + 2\binom{x-1}{3} = 7(x-1).$$

4.2. Pravac p koji sadrži desni fokus hiperbole $4x^2 - 5y^2 = 20$ i okomit je na os x, siječe hiperbolu u točkama A i B. Odredite opseg trokuta čiji su vrhovi A, B i lijevi fokus hiperbole.

4.3. Ako su z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ rješenja jednadžbe $z + \dfrac{1}{z} = 2\sin\dfrac{\pi}{7}$, koliko je $z_1^{770} + z_2^{770}$?

4.4. U nekom je brojevnom sustavu, s bazom manjom od 25, umnožak dvoznamenkastog broja s jednakim znamenkama i njegovoga dvokratnika jednak 1210 (u istom brojevnom sustavu). O kojem se broju radi i u kojem brojevnom sustavu?

4.5. Lea je svoju sestru Elu učila zbrajati prirodne brojeve. Nakon nekog vremena Lea je odabrala prirodni broj n i na papiru napisala $1+2+3+\ldots+n$. Prilikom zbrajanja, Ela je zabunom jedan od zapisanih brojeva zbrojila dva puta i na kraju dobila rezultat 228. Koliko je brojeva Ela trebala zbrojiti? Koji je broj zbrojila dva puta?

4.6. Odredite sve realne brojeve x, y i α za koje vrijedi

$$y = -2018x \quad \text{i} \quad \frac{2018x+i}{y+i} = \frac{1+i\sin\alpha}{1-i\sin 3\alpha}, \quad x \neq 0, \quad \alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

i označava imaginarnu jedinicu $(i^2 = -1)$.

4.7. Duljina stranice baze pravilne uspravne četverostrane prizme jednaka je 1. Ravnina π sadrži jedan vrh gornje baze i jednu dijagonalu donje baze, te dijeli prizmu na dva dijela različitih obujmova. Pravci u kojima ravnina π siječe dvije bočne strane prizme zatvaraju kut φ takav da je $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. Izračunajte oplošje i obujam manjeg od nastalih geometrijskih tijela.