1.

Princip potpune indukcije

Ako izvjesni broj elemenata nekog skupa ima neko određeno svojstvo, onda smo skloni zaključiti da svaki element tog skupa ima isto to svojstvo. Ovaj način zaključivanja koji od promatranja posebnih slučajeva dovodi do općih zaključaka zovemo **indukcijom**. U matematici međutim takvo zaključivanje ne mora biti istinito. Zato se takva indukcija u matematici zove **nepotpunom indukcijom** i ona nema moć dokaza. To međutim ne umanjuje njezinu vrijednost jer je ona heuristička, tj. pomaže nam da iz posebnih slučajeva dobijemo više ili manje vjerojatne hipoteze.

Ima mnogo primjera koji pokazuju da se nepotpunom indukcijom dolazi do krivih zaključaka. Navedimo nekoliko njih.

Primjer 1. Uzmimo polinom $f(x) = x^2 - x + 41$. Uvrštavamo li u njega za x redom prirodne brojeve $x = 1$, 2, $3, \ldots, 19$, 20 dobit ćemo ovu tablicu za $f(1), \ldots, f(20)$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	41	6	71	11	151	16	281
2	43	7	83	12	173	17	313
3	47	8	97	13	197	18	347
4	53	9	113	14	223	19	383
5	61	10	131	15	251	20	421

Iz tablice razabiremo da su vrijednosti tog polinoma za $x = 1, \ldots, 20$ uvijek prosti brojevi. Skloni smo nepotpunom indukcijom zaključiti da je to istina za svaki prirodni broj n, tj. da je broj $f(n) = n^2 - n + 41$ prost za svaki prirodni broj n. No je li to zaista tako? Nije, jer uvrstimo li za $n = 41$, onda je $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, a to nije prost broj jer je djeljiv s 41.

Primjer 2. Promotrimo rastav polinoma $(x-1)^n$ na faktore. Očito je

$$\begin{aligned}
x - 1 &= x - 1,\\
x^2 - 1 &= (x-1)(x+1),\\
x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1),\\
x^4 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1),\\
x^5 - 1 &= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),\\
x^6 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1),\\
x^7 - 1 &= (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1),
\end{aligned}$$

itd. Vidimo da rastavljanjem na faktore takvih polinoma uvijek dobivamo faktore kojima su koeficijenti po apsolutnoj vrijednosti jednaki 1. Je li uvijek tako, tj. je li to istina za svaki prirodni broj n? Taj je problem 1938. g. postavio ruski matematičar N. G. Čebotarev. Godine 1941. riješio ga je ruski matematičar V. Ivanov dokazavši da navedeno svojstvo imaju svi polinomi oblika $x^n - 1$ za $n = 1, 2, \ldots, 104$. Za $n = 105$ imamo polinom $x^{105} - 1$, a jedan njegov faktor je polinom

$$\begin{aligned}
x^{48}+&x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-\boldsymbol{2x}^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}\\
&+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}\\
&-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}\\
&-x^{9}-x^{8}-\boldsymbol{2x}^{7}-x^{6}-x^{5}+x^{2}-x+1.
\end{aligned}$$

Taj polinom nije dalje rastavljiv i vidimo da se u njemu pojavljuje dva puta koeficijent -2. Na ovome mjestu u dokazivanje te tvrdnje ne možemo ulaziti.

Još očitiji je sljedeći primjer.

Primjer 3. Uzmimo polinom $f(x) = 991x^2 + 1$. Ako u njega uvrštavamo redom prirodne brojeve $x = 1, 2, 3, \ldots,$

vidjet ćemo da nijedan od brojeva $f(1)$, $f(2)$, $f(3), \ldots$ nije potpuni kvadrat. To možemo raditi godinama i bit će tako. Skloni smo zaključiti da $991n^2+1$ nije potpun kvadrat ma kakav bio n. Pokazuje se da nije tako. Najmanji n za kojeg je $991n^2+1$ potpun kvadrat je broj:

$$n = 12055735790331359447442538767.$$

Da su i najveći matematičari upadali u zamku nepotpune indukcije pokazuju ovi primjeri.

Primjer 4. Promotrimo brojeve oblika $2^{2^{n-1}}+1$. Za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ti su brojevi jednaki:

$$2^{2^0}+1 = 3, \quad 2^{2^1}+1 = 5, \quad 2^{2^2}+1 = 17$$

$$2^{2^3}+1 = 257, \quad 2^{2^4}+1 = 65637.$$

Sve su to prosti brojevi. Veliki francuski matematičar P. Fermat iskazao je hipotezu da su **svi brojevi toga tipa prosti**. Tek je u 18. stoljeću švicarski matematičar L. Euler pokazao da nije tako. Naime, pokazao je da za $n = 6$ vrijedi:

$$2^{2^5}+1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417,$$

a to je složen broj.

Primjer 5. U 17. stoljeću je njemački matematičar G. W. Leibniz dokazao da je za svaki pozitivni broj n broj n^3-n djeljiv s 3, broj n^5-n djeljiv s 5, broj n^7-n djeljiv sa 7. Na osnovi toga izrekao je hipotezu da je za svaki neparni k i svaki pozitivni broj n i broj n^k-n djeljiv s k. No uskoro je i sam uočio da broj $2^9-2=510$ nije djeljiv s 9.

Navedeni primjeri su više nego dovoljni kako bismo uočili da nepotpuna indukcija nema dokazne moći.

Međutim u matematici postoji metoda pomoću koje se može zaključiti jesu li postavljene hipoteze u problemima ovog tipa ispravne. Ta se metoda zasniva na tzv. **principu matematičke indukcije** ili principu potpune indukcije.

Sve bi bilo u redu kada bi naša hipoteza bila "nasljedna", tj. ako bi iz činjenice da hipoteza vrijedi za neki objekt našeg skupa objekata slijedilo da ona onda vrijedi i za sljedeći objekt toga skupa — iz toga bi slijedilo da ona vrijedi za sve objekte tog skupa.

Formulirajmo taj princip matematički:

Ako je za neku matematičku tvrdnju, koja ovisi o prirodnom broju n, *dokazano:*

A. da je ona ispravna za neki određeni prirodni broj n_0,

B. da iz pretpostavke da je tvrdnja ispravna za neki prirodni broj $n = k$ *nužno slijedi da je ona ispravna i za sljedeći prirodni broj* $n = k + 1$;

onda je ta tvrdnja ispravna za sve prirodne brojeve $n \geqslant n_0$.

⋆ ⋆ ⋆

Pokažimo na primjerima kako se koristi princip potpune indukcije.

Primjer 6. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Rješenje. A. Ispitajmo najprije je li tvrdnja ispravna za prirodni broj $n_0 = 1$. Uvrstimo li u prethodnu jednakost $n_0 = 1$, dobit ćemo:

$$1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3},$$

dakle istinitu jednakost $2 = 2$.

Prema tome, hipoteza je istinita za prirodni broj $n_0 = 1$. Taj se korak u dokazu zove **baza indukcije**.

B. Ovaj drugi korak zove se **korak indukcije**. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za prirodni broj $n = k$, tj. da vrijedi:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k \cdot (k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}. \qquad (1)$$

Ta se pretpostavka zove **pretpostavka indukcije**. Korak indukcije sastoji se u tome da se koristeći pretpostavku indukcije dokaže da je tvrdnja istinita i za prirodni broj $n = k + 1$, tj. da vrijedi:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (k+1) \cdot (k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \qquad (2)$$

Napišimo lijevu stranu od (2) ovako:

$$\Big[1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k\cdot(k+1)\Big]+(k+1)\cdot(k+2),$$

pa zbog (1) sada imamo da je ovo jednako:

$$\begin{aligned}&\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)\\ &=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}\\ &=\frac{(k+3)(k+1)(k+2)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.\end{aligned}$$

Pokazali smo dakle da iz (1) slijedi (2), pa prema principu potpune indukcije zaključujemo da je navedena jednakost istinita za sve prirodne brojeve.

Da nepotpuna indukcija ima heurističku vrijednost pokazuje ovaj primjer.

Primjer 7. Neka se odredi zbroj:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Rješenje. Ovaj zbroj ovisi o n, pa označimo:

$$S(n)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Pokušajmo nepotpunom indukcijom zaključiti kako izgleda $S(n)$.

Za $n=1,2,3,4$ redom nalazimo:

$$\begin{aligned}S(1)&=\frac{1}{2},\\ S(2)&=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3},\\ S(3)&=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4},\\ S(4)&=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Iz ovih konkretnih slučajeva razumna je hipoteza da za sve prirodne brojeve n vrijedi:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Dokažimo da je to istina. Najprije tvrdnja vrijedi za prirodni broj $n_0 = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da je:

$$S(k) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Treba vidjeti kako iz ove pretpostavke slijedi da je ona istinita i za prirodni broj $n = k+1$, tj. da je $S(k+1) = \dfrac{k+1}{k+2}$. Zaista je:

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= S(k) + \frac{1}{(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije:

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

i tvrdnja je dokazana.

Princip potpune indukcije primjenjiv je u mnogim slučajevima i za dokazivanje raznih nejednakosti. Navedimo primjer.

Primjer 8. Dokažite da za sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ vrijedi:

$$3^n > 2^n + 3n.$$

Rješenje. Tvrdnja je očito istinita za prirodni broj $n_0 = 3$ jer je $3^3 > 2^3 + 3\cdot 3$ i to je najmanji prirodni broj za koji je ona istinita.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodni broj k, tj. da je:

$$3^k > 2^k + 3k. \tag{1}$$

Treba dokazati da je:

$$3^{k+1} > 2^{k+1} + 3(k+1). \tag{2}$$

Pomnožimo nejednakost (1) s 3:

$$3^{k+1} > 3\cdot(2^k + 3k),$$

tj.

$$3^{k+1} > 3 \cdot 2^k + 3k + 6k.$$

Zbog $3 > 2$ i $6k > 3$ za svaki prirodni broj k iz prethodne jednakosti slijedi:

$$3^{k+1} > 2 \cdot 2^k + 3k + 3,$$

tj.

$$3^{k+1} > 2^{k+1} + 3 \cdot (k+1),$$

a to je upravo nejednakost (2). Ovime je tvrdnja dokazana.

⋆ ⋆ ⋆

Princip potpune indukcije često biva koristan i u zadacima o djeljivosti brojeva.

Evo takva primjera.

Primjer 9. Dokažite da je za svaki prirodni broj n broj $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ djeljiv s 33.

Rješenje. Za $n_0 = 1$ tvrdnja je istinita jer je $6^2 + 3^3 + 3^1 = 66$, što je djeljivo s 33.

Da prirodni broj a dijeli prirodni broj b zapisivat ćemo s $a \mid b$ (čitaj a dijeli b). Prema pretpostavci indukcije vrijedi:

$$33 \mid 6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k. \tag{1}$$

Treba dokazati da:

$$33 \mid 6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1}. \tag{2}$$

Imamo:

$$\begin{aligned} 6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1} &= 6^2 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^k \\ &= 36 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^k \\ &= 3(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k) + 33 \cdot 6^k \end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije (1) prvi je pribrojnik u ovoj jednakosti djeljiv s 33, te je s 33 djeljiv i njihov zbroj, tj. (2) vrijedi.

Kako se princip potpune indukcije koristi u geometriji pokazat ćemo na dva primjera.

Primjer 10. Dokažite da n kružnica u općem položaju (nijedna od tri ne prolaze istom točkom i svake dvije se sijeku) dijele ravninu na $n^2 - n + 2$ područja.

Rješenje. Stavimo $P(n) = n^2 - n + 2$. Tada je $P(1) = 2$, a kako jedna kružnica dijeli ravninu na dva područja, to je tvrdnja dokazana za $n_0 = 1$.

Prema pretpostavci indukcije:

$$P(k) = k^2 - k + 2. \tag{1}$$

Treba dokazati da je

$$P(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) + 2,$$

tj.

$$P(k+1) = k^2 + k + 2. \tag{2}$$

Ako skupu od k kružnica dodamo $(k+1)$ kružnicu, onda je tih k kružnica siječe u $2k$ točaka. Tih $2k$ točaka određuje na $(k+1)$ kružnici $2k$ uzastopnih lukova, a svaki od njih dijeli jedno od bivših područja na dva dijela. Prema tome, dodavanjem $(k+1)$ kružnice dobili smo nova $2k$ područja (nacrtaj sliku za $k = 3$).

Dakle, vrijedi:

$$P(k+1) = P(k) + 2k.$$

Odavde prema (1) slijedi:

$$P(k+1) = k^2 - k + 2 + 2k,$$

tj.

$$P(k+1) = k^2 + k + 2,$$

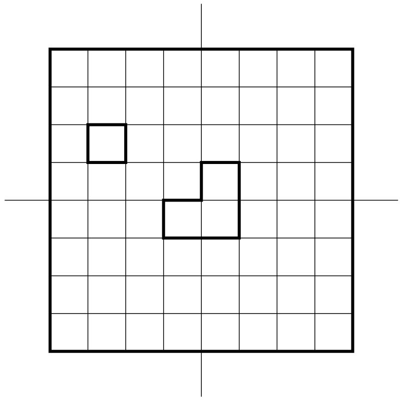
a to je upravo (2).

Primjer 11. Defektna $d \times d$ šahovska ploča je $d \times d$ šahovska ploča s jednim uklonjenim poljem (bilo kojim). Dokažite da se svaka defektna $2^n \times 2^n$, $n \in \mathbf{N}$ šahovska ploča može pokriti triominima, figurama od tri polja u obliku slova L (zadatak s državnog natjecanja održanog u Puli 1992. g.).

Rješenje. Najprije treba vidjeti da zadatak ima smisla, tj. da je broj polja takve ploče djeljiv s tri, tj. da je $2^n \cdot 2^n - 1$ djeljiv s 3. Dokažite da to jest, npr. potpunom indukcijom.

Za $n_0 = 1$ defektna ploča ima 3 polja, pa se može pokriti jednim triominom.

Pretpostavimo da je moguće pokriti $2^k \times 2^k$ defektnu šahovsku ploču. Treba pokazati da tada znamo pokriti i



Slika 1.1. Pločicu trionima stavimo u središte ploče...

$2^{k+1} \times 2^{k+1}$ defektnu šahovsku ploču. Nova ploča je upravo četverostruka prethodna (v. sl.1.1.) i u jednoj njezinoj četvrtini (recimo lijevoj gornjoj) nedostaje jedno polje. Prema pretpostavci indukcije tu četvrtinu znamo pokriti triominima. Treba pokriti ostale. Smjestimo jedan triomin kao na slici, pa i ostala tri dijela postaju defektne ploče, koje prema pretpostavci indukcije znamo pokriti triominima. Ovime je tvrdnja dokazana.

U matematici se često javlja potreba i za poopćenim principom potpune indukcije. Primjer takva poopćenja je princip "dvokoračne" potpune indukcije. Taj princip glasi:

Ako je za neku matematičku tvrdnju, koja ovisi o prirodnom broju n, dokazano:

A. da je ispravna za prirodne brojeve n_0 i $n_0 + 1$,

B. da iz pretpostavke da je tvrdnja ispravna za prirodne brojeve $k-1$ i k nužno slijedi da je ona ispravna i za prirodni broj $k+1$;

onda je ta matematička tvrdnja ispravna za sve prirodne brojeve $n \geqslant n_0$.

Analogno tome glasi princip "trokoračne" indukcije itd.

⋆⋆⋆

Ilustrirajmo primjenu "dvokoračne" indukcije na primjeru.

Primjer 12. Dokažite da je rješenje diferencijske jednadžbe:

$$y_{n+2} = 5y_{n+1} - 6y_n, \quad y_1 = 5, \quad y_2 = 13$$

dano s $y_n = 2^n + 3^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Rješenje. Za $n = 1$ je $y_1 = 2 + 3 = 5$, a za $n = 2$ je $y_2 = 2^2 + 3^2 = 13$, što znači da je ispunjena pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da je za neki $n = k - 1$ i $n = k$ $y_{k-1} = 2^{k-1} + 3^{k-1}$, $y_k = 2^k + 3^k$. Tada je za $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 5 \cdot (2^k + 3^k) - 6 \cdot (2^{k-1} + 3^{k-1}) \\ &= (5 \cdot 2 - 6) \cdot 2^{k-1} + (5 \cdot 3 - 6) \cdot 3^{k-1} \\ &= 2^{k+1} + 3^{k+1}, \end{aligned}$$

što znači da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$. Zato prema principu potpune indukcije ona vrijedi za svaki prirodan broj.

Napomenimo na kraju da su baza indukcije i koraka indukcije neovisni. Dokaz je valjan samo ako provjerimo valjanost oba koraka. U primjerima 1–5 svojstva o kojima se govorilo nisu bila nasljedna, tj. korak indukcije nije bio istinit. Postoje i primjeri u kojima je korak indukcije istinit, a baza indukcije ne.

Navedimo jedan takav primjer.

Primjer 13. Treba ispitati je li broj $1^{4n}+2^{4n}+3^{4n}+4^{4n}$ za sve prirodne brojeve n djeljiv s 5.

Rješenje. Provjerimo korak indukcije. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj $n = k$, tj. da:

$$5 \mid 1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k},$$

ili što je ekvivalentno:

$$5 \mid 1^k + 16^k + 81^k + 256^k.$$

Treba pokazati da:

$$5 \mid 1^{k+1} + 16^{k+1} + 81^{k+1} + 256^{k+1}.$$

To će biti dokazano ako pokažemo da je razlika:

$$1^{k+1} + 16^{k+1} + 81^{k+1} + 256^{k+1} - (1^k + 16^k + 81^k + 256^k)$$

djeljiva s 5, odnosno da:

$$5 \mid 15 \cdot 16^k + 80 \cdot 81^k + 255 \cdot 256^k,$$

a to je istina jer je svaki pribrojnik djeljiv s 5.

Dakle, korak indukcije je valjan. Međutim, za $n = 1$ $1^{4n} + 2^{4n} - 3^{4n} + 4^{4n}$ daje 354 i taj broj nije djeljiv s 5. Sada zaključujemo da *niti jedan* od zadanih brojeva nije djeljiv s 5 jer svi oni imaju isti ostatak pri dijeljenju s 5, pošto je njihova razlika djeljiva s 5.

Zadaci

1. Dokažite da je:

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Dokažite da je:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

3. Dokažite da je za svaki prirodan broj n:

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

4. Dokažite da je:

a) $\displaystyle \frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

b) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

5. Dokažite da je:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$
$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

6. Dokažite da je za svaki prirodan broj n:

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1.$$

7. Dokažite da nejednakost $2^n > n^2$ vrijedi za svaki prirodan broj $n \geqslant 5$.