1.

Cijeli brojevi. Djeljivost u skupu cijelih brojeva

Skup $\mathbf{Z}$ svih cijelih brojeva unija je skupa prirodnih brojeva $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, nule, i skupa negativnih cijelih brojeva $\{-1, -2, -3, ...\}$. U skupu cijelih brojeva izvedive su operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja i rezultati tih operacija uvijek su cijeli brojevi. Jedan od prvih problema kojima se bavi elementarna teorija brojeva pitanja su vezana s djeljivošću cijelih brojeva. Stoga ćemo se i mi najprije pozabaviti tim problemima.

Za cijeli broj a kažemo da je **djeljiv s cijelim brojem** b $(b \neq 0)$ ako postoji cijeli broj k tako da vrijedi $a = kb$.

Broj k zovemo **količnikom** brojeva a i b i pišemo $\frac{a}{b} = k$ ili $a : b = k$.

Svaka dva cijela broja ne moraju biti djeljiva. Na primjer, 5 nije djeljiv s -2 jer ne postoji takav cijeli broj k da je $5 = k \cdot (-2)$, a broj -35 djeljiv je sa 7 jer je $-35 = (-5) \cdot 7$ i količnik ta dva broja je -5.

Uočimo još da je 0 djeljiva sa svakim cijelim brojem b, jer je $0 = 0 \cdot b$.

Pogledajmo sada kako izgledaju poučci koji govore o djeljivosti u skupu $\mathbf{Z}$.

Teorem 1. *Ako su a i b cijeli brojevi djeljivi cijelim brojem m $(m \neq 0)$, onda je s m djeljiv i njihov zbroj $a+b$ i njihova razlika $a-b$.*

Dokaz. Ako je a djeljiv s m, onda po definiciji djeljivosti znači da postoji cijeli broj k takav da je $a = km$. Isto tako postoji cijeli broj l takav da je $b = lm$. Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo:

$$a + b = km + lm = (k + l)m,$$

pa odavde, opet po definiciji djeljivosti, zaključujemo da je $a+b$ djeljiv s m. Na analogan se način dokazuje da je $a-b$ djeljiv s m.

Napomena. Lako se dokazuje kako izreka teorema 1. vrijedi i za više pribrojnika. Dokažite to za vježbu.

Teorem 2. *Ako je zbroj nekoliko cijelih brojeva djeljiv s m, i ako su svi pribrojnici izuzev jednog jedinog djeljivi s m, onda i taj pribrojnik mora biti djeljiv s m.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju za tri pribrojnika. Neka su a, b i c tri cijela broja i neka su a, b i d djeljivi cijelim brojem m, takvi da je:

$$a + b + c = d. \tag{1}$$

Treba dokazati da je tada i c djeljiv s m. Najprije, jer su a i b djeljivi s m, s m je prema teoremu 1. djeljiv i broj $a+b$. To po definiciji djeljivosti znači da postoje cijeli brojevi k i l takvi da je

$$a + b = km, \qquad d = lm. \tag{2}$$

Iz (1) je tada $c = d - (a + b)$, pa ako tu uvrstimo $a + b$ i d iz (2), dobivamo:

$$c = lm - km = (l - k)m,$$

odakle se prema definiciji djeljivosti zaključuje da je i c djeljiv s m.

O djeljivosti produkta govori sljedeći teorem:

Teorem 3. *Ako je cijeli broj a djeljiv s m, i cijeli broj b djeljiv s n, onda je umnožak ab djeljiv s mn.*

Dokaz. Po pretpostavci, postoje cijeli brojevi k i l takvi da je $a = km$, $b = ln$. Množenjem ovih jednakosti dobiva se:

$$ab = (kl)mn,$$

pa je očigledno ab djeljiv s mn.

Napomena 1. Teorem 3. moguće je poopćiti za proizvoljan broj faktora.

Napomena 2. Iz teorema 3. slijede i ove tvrdnje:

Ako je cijeli broj a djeljiv s m, onda je i broj a^n djeljiv s brojem m^n, gdje je n bilo koji prirodni broj.

Ako je u nekom umnošku bar jedan od brojeva djeljiv s m, onda je s m djeljiv i sam umnožak.

Dokažite za vježbu navedene tvrdnje.

Definicija djeljivosti i navedeni teoremi omogućuju nam da već na samom početku rješavamo neke jednostavnije zadatke elementarne teorije brojeva.

Primjer 1. Dokaži da je zbroj dvaju uzastopnih neparnih cijelih brojeva djeljiv s 4.

Rješenje. Uočimo najprije da se svaki neparan cijeli broj dade prikazati u obliku $2k+1$, gdje je k neki cijeli broj. Neparan broj koji slijedi neposredno iza od njega je veći za 2 i to je broj $2k+3$. Zbroj tih brojeva jednak je:

$$(2k+1)+(2k+3)=4k+4=4(k+1).$$

Kako je k cijeli broj, cijeli je i $k+1$. Po definiciji djeljivosti zbroj je djeljiv s 4.

U nekim zadacima koristimo činjenicu da je produkt dvaju uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 2, a produkt triju uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 6. Prva tvrdnja slijedi iz činjenice da je od dva uzastopna cijela broja uvijek jedan paran, pa je umnožak tih brojeva djeljiv s 2 (vidi napomenu 2. iza teorema 3.). Druga tvrdnja slijedi iz činjenice da je od tri uzastopna cijela broja bar jedan djeljiv s 2 i bar jedan s 3, ako su to različiti brojevi, a ako nisu, onda je jedan od njih djeljiv i s 2 i s 3, pa je umnožak djeljiv sa 6.

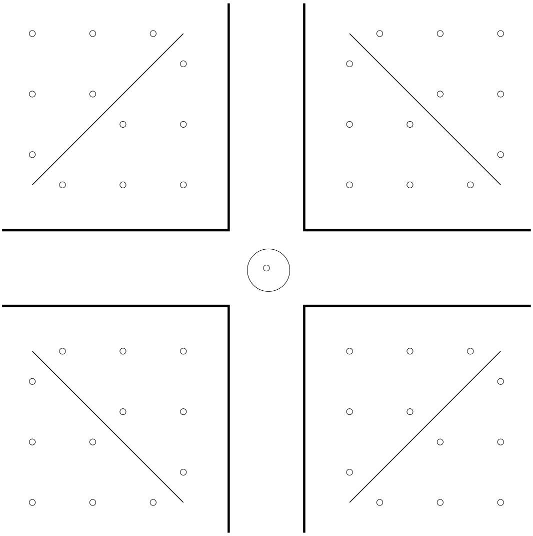
Primjer 2. Dokaži da je razlika kvadrata dvaju neparnih cijelih brojeva djeljiva s 8.

Rješenje. Neka su a i b neparni cijeli brojevi. Oni se mogu prikazati u obliku: $a=2k+1$, $b=2l+1$, gdje su k i l cijeli brojevi. Izračunajmo razliku kvadrata brojeva a i b:

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= (2k+1)^2-(2l+1)^2 \\ &= 4k^2+4k+1-4l^2-4l-1 \\ &= 4k(k+1)-4l(l+1) \\ &= 4[k(k+1)-l(l+1)]. \end{aligned}$$

Brojevi $k(k+1)$ i $l(l+1)$ su parni brojevi, a kako je razlika parnih brojeva paran broj ili nula, to je broj u uglatoj zagradi djeljiv s 2. I tako je jedan faktor razlike kvadrata djeljiv s 4, drugi s 2, pa je prema teoremu 3., razlika kvadrata $a^2 - b^2$ broj djeljiv s $4 \cdot 2 = 8$.

Napomena. Pitagorejci su u 6. i 5. st. pr. n. e. u okviru "učenja o parnim i neparnim brojevima" imali stavak: Kvadrat neparnog broja ("kvadratni neparni broj") umanjen za jedan daje osmerostruki trokutni broj, što su slikovito, npr. za 7^2, prikazali ovako:



$7^2 = 1 + 8\,(1 + 2 + 3)$.

Slika 1.

Primjer 3. Dokaži da je za svaki cijeli broj n broj $n^3 - n$ djeljiv s 6.

Rješenje. Rastavimo $n^3 - n$ na faktore:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1).$$

Vidimo da je $n^3 - n$ produkt tri uzastopna cijela broja, pa je prema tome djeljiv s 6.

Primjer 4. Dokaži da je za svaki cijeli broj n broj $n^3 + 11n$ djeljiv s 6.

Rješenje. Rastavimo $n^3 + 11n$ na sljedeći način:

$$n^3 + 11n = n^3 - n + 12n.$$

U primjeru 3. dokazali smo da je $n^3 - n$ djeljiv s 6, za svaki cijeli broj n, a kako je i $12n$ djeljiv s 6, to su u tom rastavu oba pribrojnika djeljiva s 6. Prema teoremu 1. onda je i zbroj djeljiv s 6.

U nekim zadacima je zgodno koristiti jedan osobit prikaz prirodnog broja pomoću njegovih znamenaka. Tako ćemo na primjer zapisati: $37 = 10 \cdot 3 + 7$, $528 = 100 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 8$, $9128 = 1000 \cdot 9 + 100 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 8$, itd.

Primjer 5. Ako od dvoznamenkastog prirodnog broja oduzmemo broj koji se dobije zamjenom mjesta njegovih znamenki, dobivena razlika djeljiva je s 9. Dokaži!

Rješenje. Dvoznamenkasti broj a prikažimo u obliku $a = 10x + y$, gdje je x znamenka desetica, y znamenka jedinica. Označimo s b broj što se dobije zamjenom znamenki broja a. Taj se broj onda može zapisati u obliku $b = 10y + x$. Valja pokazati kako je razlika $a - b$ djeljiva s 9. Možemo izračunati:

$$a - b = 10x + y - (10y + x) = 9x - 9y = 9(x - y).$$

Kako su x i y prirodni brojevi (y može biti i nula), to je $x - y$ cijeli broj, pa prema teoremu 1. zaključujemo da je razlika $a - b$ djeljiva s 9.

Primjer 6. Dokaži: ako su u troznamenkastom prirodnom broju dvije posljednje znamenke jednake, a zbroj njegovih znamenki djeljiv sa 7, onda je i sam broj djeljiv sa 7.

Rješenje. Troznamenkast broj kojem su posljednje dvije znamenke jednake možemo napisati u obliku:

$$a = 100x + 10y + y = 100x + 11y.$$

Isti broj a zapišimo sada ovako:

$$a = 2(x + 2y) + 98x + 7y,$$

odnosno, $a = 2(x + 2y) + 7(14x + y)$. Zbroj znamenki od a jednak je $x + 2y$ i jer je $x + 2y$ djeljiv sa 7, to su u gornjem prikazu broja a oba pribrojnika djeljiva sa 7. Onda je prema teoremu 1. i broj djeljiv sa 7.

Izvedimo sada kriterije za djeljivost cijelih brojeva nekim posebnim prirodnim brojevima. Primijetite da je dovoljno ograničiti se na djeljivost prirodnih brojeva, jer ako je prirodni broj n djeljiv nekim brojem, onda je istim brojem djeljiv i cijeli broj $-n$.

Prirodni broj kojemu su znamenke redom $a_1, a_2, \dots, a_n$, gdje je $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ i $a_1 \neq 0$, zapisivat ćemo ovako:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n},$$

gdje je a_1 prva znamenka, a_2 druga i tako redom do posljednje n-te znamenke a_n. Pri tome je:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n.$$

Primjer 7. Dokaži da je neki prirodan broj djeljiv s 4 ako je njegov dvoznamenkasti završetak broj djeljiv s 4.

Rješenje. Na primjer, dvoznamenkasti završetak broja 509378 je broj 78, a broja 5706 broj 6. Općenito **dvoznamenkastim završetkom** broja $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$ zovemo broj $\overline{a_{n-1} a_n}$ ako je $a_{n-1} \neq 0$, odnosno broj a_n ako je $a_{n-1} = 0$.

Rastavimo sada broj $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\overline{a_1 a_2 \dots a_{n_1} a_n} = (a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots \\ + a_{n-2} \cdot 10^2) + (a_{n-1} \cdot 10 + a_n)\end{aligned}$$

i uočimo da je $a_{n-1} \cdot 10 + a_n$ njegov dvoznamenkasti završetak. Dalje je:

$$\begin{aligned}\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n} = 100 \cdot (a_1 \cdot 10^{n-3} + a_2 \cdot 10^{n-4} + \dots \\ + a_{n-2}) + (a_{n-1} \cdot 10 + a_n).\end{aligned}$$

Prvi je pribrojnik ovog broja djeljiv s 4. Da bi broj $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$ bio djeljiv s 4, prema teoremu 2. s 4 mora biti djeljiv i dvoznamenkasti završetak $a_{n-1} \cdot 10 + a_n$.

Ovime je tvrdnja dokazana.

Primjer 8. Dokaži da je prirodni broj djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 3.

Rješenje. Neka je dan prirodni broj $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$. Zbroj znamenki tog broja je broj $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$.

Zapišimo sada rastav ovog broja:

$$\begin{aligned}
&\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n} = \\
&a_1\cdot 10^{n-1} + a_2\cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\cdot 10 + a_n \\
&= a_1(10^{n-1}-1) + a_2(10^{n-2}-1) + \ldots \\
&\quad + a_{n-1}(10-1) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) \\
&= (a_1 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1 \text{ znamenka}} + a_2 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-2 \text{ znam.}} + \ldots + a_{n-1}\cdot 9) \\
&\quad + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) \\
&= 9(a_1 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n-2 \text{ znam.}} + a_2 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n-3 \text{ znam.}} + \ldots + a_{n-1}) \\
&\quad + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n).
\end{aligned}$$

Prvi je pribrojnik djeljiv s 3 pa prema teoremu 2. zaključujemo da će broj $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}$ biti djeljiv s 3 ako i samo ako je i drugi pribrojnik, tj. zbroj znamenki $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$, djeljiv s 3.

Iz istog zapisa slijedi i tvrdnja da je prirodni broj $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}$ djeljiv s 9 ako i samo ako je zbroj njegovih znamenki broj djeljiv s 9.

O kriterijima djeljivosti bit će još govora u odjeljku o kongruencijama.

Mnogi zadaci o djeljivosti rješavaju se metodom potpune indukcije.

Napomena. Da broj a dijeli b označavat ćemo s $a \mid b$ (čita se "a dijeli b"), a da a ne dijeli b označavat ćemo $a \nmid b$ (čita se "a ne dijeli b").

Zadaci

1. Dokaži:

1) Suma svaka tri uzastopna cijela broja djeljiva je s 3.

2) Suma svaka tri uzastopna neparna cijela broja djeljiva je s 3.

3) Suma pet uzastopnih cijelih brojeva djeljiva je s 5.

2. Dokaži da je zbroj n uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s n ako je n neparan, a nije djeljiv s n ako je n paran prirodni broj.

3. Kvadrat neparnog cijelog broja umanjen za 1 djeljiv je s 8. Dokaži!

4. Zbroj kvadrata dvaju uzastopnih cijelih brojeva umanjen za 1 djeljiv je s 4. Dokaži!

5. Umnožak kvadrata cijelog broja i broja koji prethodi tom kvadratu djeljiv je s 12. Dokaži!

6. Dokaži da je razlika kvadrata svaka dva neparna prirodna broja djeljiva s 8.

7. Razlika kuba sume dva uzastopna parna broja i sume kubova tih brojeva djeljiva je s 48. Dokaži!

8. Dokaži sljedeće tvrdnje:

1) $5 \mid (5n+1)^2 - 36$; 2) $15 \mid (4n+3)^2 - (3-n)^2$;
3) $48 \mid (5n+2)^2 - (2-n)^2$; 4) $48 \mid (5n+7)^2 - (1-n)^2$;
5) $96 \mid (7n+3)^2 - (3-n)^2$,

za sve cijele brojeve n.

9. Dokaži da je za svaki neparan cijeli broj n broj $(20n+17)^2 - (17n+20)^2$ djeljiv s 888.

10. Dokaži:

1) $10 \mid 21^{15} - 1$; 2) $9 \mid 46^{46} - 1$;
3) $100 \mid 11^{10} - 1$; 4) $99 \mid 10^{10} - 1$;
5) $33 \mid 2^{55} + 1$.

11. Dokaži:

1) $17 \mid 4^8 + 8^4$; 2) $82 \mid 27^{12} + 9^{16}$;
3) $620 \mid 125^5 - 25^6$.

12. Dokaži:

1) $10 \mid 9^{14} - 7^{12}$; 2) $10 \mid 67^8 - 1$.

13. Dokaži:

1) $10 \mid 9^{2k} + 3^{4k+2}$; 2) $10 \mid 4^{2k} + 2^{4k+2}$;
3) $10 \mid 9^{4k} + 7^{4k}$, za svaki prirodni broj k.

14. Dokaži da je zbroj svake tri uzastopne potencije broja 3 djeljiv s 39.

15. Zbroj svake tri uzastopne potencije broja 5 djeljiv je sa 155. Dokaži!

16. Zbroj svake tri uzastopne neparne potencije broja 2 djeljiv je s 21. Dokaži!

17. Dokaži: $6 \mid n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n$, za svaki cijeli broj n.

18. Dokaži: $6 \mid 2n^3 + 3n^2 + 7n$, za svaki cijeli broj n.

19. Dokaži: $8 \mid n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n$, za svaki cijeli broj n.

20. Dokaži: $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$, za svaki cijeli broj n.

21. Ako su znamenke troznamenkastog broja jednake, taj je broj djeljiv s 37. Dokaži!

22. Ako je jedna znamenka troznamenkastog broja aritmetička sredina ostalih dviju, taj je broj djeljiv s 3. Dokaži!

23. Zbroj svih troznamenkastih brojeva kojima su dvije znamenke jednake, a treća je 1, djeljiv je sa 111. Dokaži!

24. Ako su dva neparna cijela broja djeljiva s 3, onda je razlika njihovih kvadrata djeljiva sa 72. Dokaži!

25. Dokaži da je zbroj kubova triju uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 9.

26. Ako je znamenka jedinica troznamenkastog cijelog broja jednaka razlici znamenki desetica i stotica, taj je broj djeljiv s 11. Dokaži!

27. Ako je prva znamenka nekog četveroznamenkastog broja jednaka četvrtoj, a druga trećoj, taj broj je djeljiv s 11. Dokaži!

28. Dokaži da je razlika troznamenkastog broja i zbroja njegovih znamenki djeljiva s 9.

29. Dokaži da je razlika troznamenkastog broja i broja zapisanog istim znamenkama ali u obrnutom poretku djeljiva s 99.

30. Dokaži da je razlika dvaju brojeva koji imaju jednake sume znamenki djeljiva s 9.

31. Ako su znamenke troznamenkastog prirodnog broja uzastopna tri prirodna broja, onda je razlika tog broja i broja zapisanog istim znamenkama ali obrnutim redom, djeljiva sa 198. Dokaži!

32. Prve tri znamenke šesteroznamenkastog broja jednake su, a jednake su međusobno i posljednje tri. Dokaži da je taj broj djeljiv sa 111.

33. Prva, treća i peta znamenka šesteroznamenkastog broja međusobno su jednake, a jednake su međusobno i ostale tri. Dokaži da je takav broj djeljiv sa 7.

34. Prva i treća znamenka četveroznamenkastog broja su jednake, a druga i četvrta također. Dokaži da je, ako se od tog broja oduzme broj s obrnutim redoslijedom znamenki, tako dobivena razlika djeljiva i s 9 i sa 101.

35. Ako je zbroj tri cijela broja djeljiv s 6, onda je i zbroj kubova tih istih brojeva djeljiv s 6. Dokaži!

36. Dokaži: ako je broj $3^n + m$ djeljiv s 10, onda je i broj $3^{n+4} + m$ također djeljiv s 10. Pri tome su m i n prirodni brojevi.

37. Dokaži da je broj zapisan s parnim brojem jednakih znamenki djeljiv s 11.

38. Uzmimo dva dvoznamenkasta broja i pomnožimo ih. Rezultat označimo s A. Sada zamijenimo znamenke tim brojevima pa tako dobivene opet pomnožimo. Ovaj umnožak označimo s B. Dokaži da je razlika $A - B$ djeljiva s 99.

39. Dokaži: ako je zbroj dvaju troznamenkastih brojeva djeljiv s 37, onda je s 37 djeljiv i šesteroznamenkasti broj koji se dobije tako da se jednom od tih brojeva pripiše drugi.

40. Dokaži da je prirodni broj djeljiv s 8 ako i samo ako je njegov troznamenkasti završetak djeljiv s 8.

41. Dokaži da je prirodni broj djeljiv s 11 ako i samo ako mu je razlika zbroja znamenki na parnim mjestima i zbroja znamenki na neparnim mjestima djeljiva s 11.

42. Dokaži:

1) $35 \mid 6^{2n} - 1$; 2) $9 \mid 4^n + 15n - 1$;

3) $19 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}$; 4) $225 \mid 16^n - 15n - 1$.