1. Prirodni i cijeli brojevi

1.1. Postoji li prirodni broj čiji je umnožak znamenki 1386?

1.2. Odredi četiri uzastopna prirodna broja čiji je umnožak 3024.

1.3. S koliko nula završava umnožak svih prirodnih brojeva od 1 do 49?

1.4. Odredi sve parove troznamenkastih brojeva čiji je umnožak 51051.

1.5. Umnožak dva cijela broja je 161. Koji su to brojevi, ako je svaki od njih manji od 23?

1.6. Odredi najmanji prirodni broj a za koji je umnožak $a \cdot a \cdot a$ višekratnik broja 500.

⋆ ⋆ ⋆

1.7. Odredi sve prirodne brojeve sa svojstvom da pri dijeljenju s 15 količnik bude jednak ostatku.

1.8. Ako brojeve 8746 i 1652 podijelimo istim prirodnim brojem, dobivamo ostatak 16, odnosno 14. S kojim brojem valja podijeliti zadane brojeve?

1.9. Odredi znamenku a u broju $\overline{2461a}$ tako da ostaci dijeljenja tog broja s 3 i s 5 budu jedaki.

1.10. Odredi najmanji prirodni broj djeljiv sa 7, koji pri dijeljenju s 2, 3, 4, 5 i 6 daje ostatak 1.

1.11. Pri dijeljenju jednog prirodnog broja drugim količnik je 18 a ostatak 14.

a) Odredi djeljenik i djelitelj tako da je svaki od njih djeljiv sa 7, pri čemu je djelitelj veći od ostatka.

b) Kako će se promijeniti količnik, a kako ostatak, ako i djeljenik i djelitelj smanjimo 7 puta?

1.12. Najveći zajednički djelitelj dva prirodna broja je 24, a najmanji zajednički višekratnik istih brojeva je 504. Nijedan od tih brojeva nije djeljiv drugim brojem. Koji su to brojevi?

1.13. Odredi sve parove prirodnih brojeva za koje je razlika između njihova najmanjeg zajedničkog višekratnika i najvećeg zajedničkog djelitelja jednaka 30.

1.14. Zbrajanjem četiri broja neke su znamenke pogrešno pročitane, pa je došlo do pogreške u rezultatu. U prvom pribrojniku znamenka stotica 2 bila je pročitana i pribrojena kao 5, u drugom pribrojniku znamenka tisućica 3 pribrojena je kao 8, u trećem pribrojniku znamenka jedinica 9 pribrojena je kao 2, a u četvrtom pribrojniku znamenka desetica 7 pribrojena je kao 4. Rezultat takva zbrajanja bio je 28975. Odredi pogrešku u rezultatu i točan zbroj.

1.15. Pri dijeljenju nekog prirodnog broja s 47, učenik je zabunom u djeljeniku znamenku tisućica 6 i znamenku jedinica 8 krivo pročitao i tako dobio količnik 416 i ostatak 21. Odredi točan količnik i ostatak.

⋆ ⋆ ⋆

1.16. Na pismenom ispitu trebalo je riješiti 20 zadataka. Za svaki riješeni zadatak učenik dobiva 4 boda, za svaki neriješeni učeniku se oduzimaju 3 boda. Koliko je zadataka učenik riješio ako je na kraju imao 38 bodova?

1.17. Na nekom ispitu znanja trebalo je riješiti 30 zadataka. Za svaki točno riješen zadatak učenik je dobio 5 bodova, za djelomično riješen 3 boda, a za netočan i neriješen zadatak učeniku su se oduzela 2 boda. Koliko je zadataka riješio točno, koliko djelomično, a koliko netočno učenik koji je skupio 95 bodova, pri čemu je za točno riješene i neriješene zadatke zajedno dobio 65 bodova?

1.18. Škola je za odlazak svojih 708 učenika na jednodnevni izlet osigurala 15 autobusa, od kojih su neki imali po 52 sjedala, a ostali svaki po 43 sjedala. Koliko je bilo jednih a koliko drugih autobusa ako je na svakom sjedalu sjedio samo jedan učenik, pri čemu su sva sjedala bila popunjena?

1.19. Učenici jednog odjela 6. razreda pisali su kontrolnu zadaću iz matematike. Trećina učenika nije pravilno riješila jedan zadatak, četvrtina dva zadatka, šestina tri zadatka, a osmina učenika pogrešno je riješila sva četiri zadatka. Koliko je učenika pravilno riješilo sve zadatke, ako u odjelu nema više od 30 učenika?

1.20. Dano je šest prirodnih brojeva tako da je treći broj jednak zbroju prvog i drugog, četvrti broj jednak je zbroju drugog i trećeg, peti broj jednak je zbroju trećeg i četvrtog, a šesti broj jednak je zbroju četvrtog i petog broja. Koliki je zbroj tih šest brojeva ako je peti broj jednak 7?

1.21. Kućni brojevi na lijevoj strani ulice označavaju se neparnim, a na desnoj parnim brojevima. Zbroj kućnih brojeva s jedne strane ulice između dva raskrižja je 45. Koji su to kućni brojevi?

⋆ ⋆ ⋆

1.22. Odredi onaj prirodni broj koji ima svojstvo da je zbroj njegovih znamenki jednak razlici broja 223 i tog broja.

1.23. Od znamenki troznamenkastog broja moguće je sastaviti 6 različitih dvoznamenkastih brojeva. Koji troznamenkasti broj ima svojstvo da je jednak polovici zbroja svih 6 tako dobivenih dvoznamenkastih brojeva?

1.24. Odredi sve troznamenkaste brojeve koji su 5 puta veći od umnoška svojih znamenki.

1.25. Odredi sve troznamenkaste prirodne brojeve koji su 12 puta veći od zbroja svojih znamenki.

1.26. Odredi četiri uzastopna prirodna broja ako je umnožak prvog i drugog za 38 manji od umnoška trećeg i četvrtog.

1.27. Odredi tri uzastopna neparna prirodna broja kojima je zbroj kvadrata jednak četveroznamenkastom broju s jednakim znamenkama.

1.28. Poznati engleski matematičar August de Morgan živio je u prošlom stoljeću. Jednom je rekao: "Bio sam x godina star godine x^2." Kad je rođen?

⋆ ⋆ ⋆

1.29. Odredi dvoznamenkasti broj koji ima svojstvo da se poveća 26 puta ako mu s lijeve strane dopišemo znamenku 9.

1.30. Postoji li prirodni broj koji ima svojstvo: ako se prva znamenka s lijeve strane ispusti i dopiše iza znamenke jedinica, tada je novi broj 5 puta veći od početnog?

1.31. Ako između znamenki dvoznamenkastog broja upišemo nulu, dobiveni troznamenkasti broj je devet puta veći od početnog dvoznamenkastog broja. Odredi taj dvoznamenkasti broj.

1.32. Ako između znamenki dvoznamenkastog broja upišemo taj dvoznamenkasti broj, tad je novi četveroznamenkasti broj 77 puta veći od danog dvoznamenkastog broja. Koji je to dvoznamenkasti broj?

1.33. Neki dvoznamenkasti broj djeljiv je s 3. Ako se između znamenki tog broja upiše nula i tako dobivenom troznamenkastom broju doda dvostruka vrijednost znamenke stotica, dobiva se 9 puta veći broj od danog dvoznamenkastog broja. Koji dvoznamenkasti broj ima to svojstvo?

1.34. Koji troznamenkasti broj ima svojstvo da se šest puta smanji ako tom broju izostavimo znamenku desetica?

1.35. Ako četveroznamenkasti broj napišemo obrnutim redoslijedom, novi četveroznamenkasti broj bit će 9 puta veći. Koji četveroznamenkasti broj ima to svojstvo?

⋆ ⋆ ⋆

1.36. Kojom znamenkom završava umnožak 666 faktora pri čemu je svaki faktor jednak 777?

1.37. Četveroznamenkasti broj $\overline{dcca}$, troznamenkasti broj $\overline{abc}$ i dvoznamenkasti broj $\overline{ba}$ povezuje jednakost $\overline{abc}+\overline{ba}=\overline{dcca}$. Kolike su znamenke a, b, c i d?

1.38. Zbroj peteroznamenkastog broja $\overline{abcde}$ i peteroznamenkastog broja $\overline{abced}$ je 31587. Koji su to brojevi?

1.39. Odredi takav prirodan broj n da je umnožak $n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n$ šesteroznamenkasti broj čija je znamenka jedinica 4.

1.40. Ako je znamenka jedinica broja n^2+2n (n je prirodan broj) jednaka 4, onda je znamenka desetica tog broja 2. Dokaži.

⋆ ⋆ ⋆

1.41. Zbroj dva broja veći je od umnoška tih brojeva, a manji od razlike tih istih brojeva. Jesu li su ti brojevi pozitivni ili negativni?

1.42. Što je veće i za koliko: zbroj svih cijelih brojeva x za koje vrijedi $-1777 < x < 1077$ ili umnožak svih tih brojeva?

1.43. Dokaži da je poluzbroj kvadrata dvaju parnih brojeva jednak zbroju kvadrata nekih dvaju cijelih brojeva.

1.44. Volumen kvadra je $336\ \text{cm}^3$, a duljine triju bridova iz istog vrha tri su uzastopna prirodna broja. Koliko je oplošje tog kvadra?

1.45. U zapisu dvoznamenkastog broja x i četveroznamenkastog broja y pojavljuje se 6 puta jedna te ista znamenka. Što je veće, x^{20} ili y^{10}?

1.46. Odredi sve cijele brojeve a i b za koje vrijede jednakosti $a^2 - 10b + 1 = 0$ i $b^2 + 14a + 73 = 0$.

Rješenja

1.1. Rastavimo li broj 1386 na proste faktore dobivamo $1386 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Kako je faktor 11 prost broj, a to nije znamenka, zaključujemo da ne postoji prirodni broj čiji je umnožak znamenki 1386.

1.2. *1. način.* Očito niti jedan od 4 broja nije djeljiv s 5 ni s 10, zbog zadnje znamenke 4. Ako bi najmanji od četiri broja bio veći od 10, tad bi umnožak ta četiri broja bio veći od 10000. Zaključujemo da su traženi brojevi manji od 10, tj. 1, 2, 3, 4 ili 6, 7, 8, 9. Kako je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, to je nužno da su traženi brojevi 6, 7, 8, 9. Stvarno: $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$.

2. način. Ako broj 3024 rastavimo na proste faktore, dobivamo $3024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Očito da jedan od traženih brojeva mora biti 7, jer 5, 10 i 15 ne mogu biti traženi brojevi. Ostale brojeve lagano odredimo. Traženi brojevi su 6, 7, 8, 9.

1.3. Zadnja znamenka umnoška bit će nula samo onda ako je barem jedan faktor djeljiv s 2, a jedan s 5, tj. ako su između prostih faktora umnoška bar jedna dvojka i bar jedna petica. Kako između brojeva od 1 do 49 ima više brojeva koji su djeljivi s 2 nego onih djeljivih s 5, to nas zanima koliko između svih brojeva od 1 do 49 ima onih koji su djeljivi sa 5. Takvih brojeva ima 9. Treba još uzeti u obzir brojeve djeljive s 25, a to je samo broj $25 = 5 \cdot 5$. Prema tome, između svih prostih faktora brojeva od 1 do 49 ima ukupno 10 petica, a uz to i sigurno više od 10 dvojki. To znači da umnožak svih brojeva od 1 do 49 završava s 10 nula.

1.4. Rastavljanjem zadanog broja na proste faktore dobivamo: $51051 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$. Od dobivenih faktora moguće je sastaviti ove parove troznamenkastih brojeva: $187 \cdot 273$, $119 \cdot 429$, $143 \cdot 357$, $221 \cdot 231$.

1.5. Broj 161 rastavimo na proste faktore, tj. $161 = 7 \cdot 23$. Uvažavajući pozitivne i negativne faktore, broj 161 možemo napisati kao umnožak 2 cijela broja na ova 4 načina: $1 \cdot 161$, $(-1) \cdot (-161)$, $7 \cdot 23$ i $(-7) \cdot (-23)$. Kako svaki faktor mora biti manji od 23, to su traženi parovi $(-1) \cdot (-161)$ i $(-7) \cdot (-23)$.

1.6. Očito je da vrijedi jednakost $a \cdot a \cdot a = 500 \cdot n$, pri čemu je n prirodni broj. Kako su između prostih faktora broja $500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ tri petice, nužno moraju biti i najmanje tri dvojke, čime je potpuno određen broj $a = 10$.

1.7. Neka je a traženi broj, q količnik, pri čemu su a i q prirodni brojevi. Vrijedi jednadžba $a = 15q + q$ ili $a = 16q$, uz uvjet da je $q < 15$. Prema tome, trebamo izabrati 14 brojeva koji zadovoljavaju postavljeni uvjet : 16, 32, 48, $\ldots$, 192, 208, 224.

1.8. Neka je x broj s kojim treba zadane brojeve podijeliti. Tada je $8746 = x \cdot a + 16$, tj. $8730 = x \cdot a$, odnosno $1652 = x \cdot b + 14$, tj. $1638 = x \cdot b$, pri čemu je a prvi količnik, a b drugi. Sad je očito da je x zajednički djeljitelj brojeva 8730 i 1638. Zato potražimo $D(8730, 1638) = 18$. Kako traženi broj mora biti veći od 16, to je 18 jedini broj s kojim treba podijeliti zadane brojeve.

1.9. Ostaci dijeljenja nekog broja s 3 mogu biti 0, 1 ili 2. Odredimo najprije znamenku a tako da dobiveni broj bude djeljiv s 3 i s 5. Zbog djeljivosti sa 5 znamenka a može biti 0 ili 5. Znamenka 0 otpada jer dobiveni broj nije djeljiv s 3. Zato je 24615 prvi broj s navedenim svojstvima. Dodamo li tom broju 1, odnosno 2, dobit ćemo ostale brojeve. Traženi brojevi su 24615, 24616, 24617.

1.10. Neka je x traženi broj djeljiv sa 7. Očito da je broj $x - 1$ djeljiv s 2, 3, 4, 5 i 6. Najmanji takav broj $V(2, 3, 4, 5, 6) = 60$, naravno i svaki višekratnik od 60, pa traženi broj ima oblik $x - 1 = 60n$, tj. $x = 60n + 1$, pri čemu je n prirodan broj. Za $n = 1, 2, 3, 4$ dobivamo brojeve 61, 121, 181, 241 koji nisu djeljivi sa 7. Za $n = 5$ traženi broj je 301.

1.11. a) Neka je a djeljenik i b djeljitelj. Vrijedi jednakost $a = 18b + 14$, a zbog $a = 7k$ i $b = 7l$ možemo pisati $7k = 18 \cdot 7l + 14$, pa nakon dijeljenja jednadžbe sa 7 dobivamo $k = 18l + 2$. Kako je $b > 14$, nužno slijedi da je $l > 2$. Za $l = 3$ bit će $k = 56$, te $a = 392$ i $b = 21$. Prema tome, djeljenik je 392, a djeljitelj 21, pri čemu su to najmanji prirodni brojevi koji zadovoljavaju postavljeni uvjet. Naime, takvih parova prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo. Dovoljno je za l uzeti bilo koji prirodni broj veći od 3.

b) Količnik se neće promijeniti, a ostatak će se smanjiti 7 puta, tj. jednak je 2.

1.12. Neka su a i b traženi brojevi. Tad vrijedi $a = 24x$, $b = 24y$, pri čemu su x i y prirodni brojevi i $D(x, y) = 1$. Koristeći formulu $a \cdot b = D(a, b) \cdot V(a, b)$ dobivamo $24x \cdot 24y = 24 \cdot 504$, ili nakon dijeljenja jednadžbe s $24 \cdot 24$ slijedi $x \cdot y = 21$. Moguće vrijednosti za x su 1, 3, 7, 21. Vrijednosti za $x = 1$ ili $x = 21$ otpadaju, jer bi tada jedan od brojeva bio djeljiv s onim drugim. Zato je za $x = 3$, $a = 72$, odnosno za $y = 7$, $b = 168$. Očito da zadatak ima samo jedno rješenje. Traženi brojevi su 72 i 168.

1.13. Neka su a i b traženi prirodni brojevi i uz to $a < b$, i neka je $D(a, b) = n$ njihov najveći zajednički djeljitelj i $V(a, b)$ njihov najmanji zajednički višekratnik. Tad vrijedi $a = n \cdot p$ i $b = n \cdot q$, pri čemu je $D(p, q) = 1$. Iz formule $V(a, b) \cdot D(a, b) = a \cdot b$ imamo ove jednakosti: $V(a, b) = \dfrac{ab}{D(ab)}$, odnosno $V(a, b) = \dfrac{np \cdot nq}{n}$, tj. $V(a, b) = npq$. Iz uvjeta zadatka slijedi da je $npq - n = 30$, ili $n(pq - 1) = 30$. Kako je $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, to je očito da n može imati ove vrijednosti: $n = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$. Za $n = 1$ dobivamo $pq - 1 = 30$ ili $pq = 31$, pa je $p = 1$ i $q = 31$, odnosno $a = 1$ i $b = 31$. Na sličan način odredimo i sva ostala rješenja (a, b). Tražena rješenja (a, b) su: $(1, 31)$, $(2, 32)$, $(3, 33)$, $(5, 35)$, $(6, 36)$, $(12, 18)$, $(10, 40)$, $(15, 45)$, $(30, 60)$.

1.14. Prvi pribrojnik povećan je za $(5-2) \cdot 100$, tj. 300, drugi pribrojnik povećan je za $(8 - 3) \cdot 1000$, treći pribrojnik smanjen je za $9 - 2$, a četvrti pribrojnik smanjen je za $(7 - 4) \cdot 10$. To znači da je pogreška u zbroju jednaka: $(5-2) \cdot 100 + (8-3) \cdot 1000 - (9-2) - (7-4) \cdot 10 = 300 + 5000 - 7 - 30$, tj. 5263. Dobiveni zbroj očito je veći od točnog rezultata za 5263. Traženi zbroj je $28975 - 5263$, tj. 23712.

1.15. Neka je a netočan djeljenik koji je učenik dobio. Tada vrijedi $a = 47 \cdot 416 + 21$, tj. $a = 19573$. Ako u dobivenom broju znamenku jedinica i tisućica zamijenimo točnim vrijednostima, dobit ćemo točan djeljenik 16578, a dijeljenjem i točan ostatak 34.

1.16. Ako bi učenik točno riješio svih 20 zadataka, tad bi dobio $20 \cdot 4$, tj. 80 bodova. No, kako je učenik dobio 38 bodova, znači da je izgubio 42 boda. Za svaki zadatak koji nije riješio učenik je izgubio $4 + 3$, tj. 7 bodova, pa je ukupan broj neriješenih zadataka $42 : 7$, tj. 6. Prema tome, učenik je riješio $20 - 6$, tj. 14 zadataka.

1.17. Očito je da učenik za djelomično riješene zadatke dobio $95 - 65$, tj. 30 bodova, a to znači da je učenik djelomično riješio $30 : 3$, tj. 10 zadataka. Sad je jasno da je ukupan broj točno riješenih i neriješenih zadataka $30 - 10$, tj. 20. Ako pretpostavimo da je svih tih 20 zadataka učenik točno riješio, tad bi dobio $20 \cdot 5$, tj. 100 bodova. No, kako je za tih 20 zadataka dobio 65 bodova, to je očito izgubio $100 - 65$, tj. 35 bodova. Za svaki zadatak koji nije riješio učenik je izgubio $5 + 2$, tj. 7 bodova, pa je ukupan broj neriješenih zadataka $35 : 7$, tj. 5. Prema tome, broj točno riješenih zadataka je $20 - 5$, tj. 15.

1.18. *1. način.* Pretpostavimo da svaki autobus ima 43 sjedala. Tad bi se u 15 takvih autobusa moglo smjestiti $43 \cdot 15$, tj. 645 učenika. Ostatak $708 - 645$, tj. 63 učenika morao bi se smjestiti u veće autobuse i to $52 - 43$, tj. 9 učenika u svaki autobus. Kako je $63 : 9 = 7$, slijedi da je bilo 7 autobusa s 52 sjedala i 8 autobusa s 43 sjedala.

2. način. Neka je x broj autobusa s 52 sjedala. Tad je $15 - x$ broj autobusa s 43 sjedala. U većim autobusima može se smjestiti $52 \cdot x$

učenika., a u manjim autobusima $43 \cdot (15 - x)$ učenika. Vrijedi jednadžba $52x + 43(15 - x) = 708$. Rješenje jednadžbe je $x = 7$. Bilo je 7 autobusa s 52 sjedala i 8 autobusa s 43 sjedala.

1.19. Broj učenika u razredu prirodni je broj. Očito je on djeljiv sa 3, 4, 6, 8, tj. sa $V(3, 4, 6, 8) = 24$. U razredu ima 24 učenika jer je sljedeći višekratnik 48 veći od 30. Sada lako možemo odrediti broj učenika koji nisu pravilno riješili 1, 2, 3 ili sva 4 zadatka. Takvih učenika ima $8 + 6 + 4 + 3$, tj. 21. Prema tome, broj učenika koji su pravilno riješili sve zadatke je $24 - 21$, tj. 3 učenika.

1.20. Označimo šest prirodnih brojeva, počevši od prvog, s a, b, c, d, 7, f. Zbog $a + b = c$, $c + d = 7$ i $d + 7 = f$ dobivamo $a + b + c + d + 7 + f = c + 7 + 7 + d + 7 = 21 + 7 = 28$. Zbroj šest prirodnih brojeva s danim svojstvima je 28.

1.21. Kako je zbroj dva neparna broja paran broj, zaključujemo da je broj kuća s neparnim brojevima između dva raskrižja neparan, pa zadatak ima više rješenja.

1. Između raskrižja s jedne strane ulice nalazi se samo jedna kuća s kućnim brojem 45.
2. Na jednoj strani su tri kuće. Ako broj srednje kuće označimo sa n tada vrijedi $n - 2 + n + n + 2 = 45$, tj. $n = 15$, a brojevi kuća su 13, 15, 17.
3. Slično postupamo ako na jednoj strani ima pet kuća. Tada su brojevi kuća 5, 7, 9, 11, 13.

To su ujedno i sva rješenja. Naime, na jednoj strani ulice između dva raskrižja ne može biti sedam kuća, jer je zbroj prvih sedam neparnih prirodnih brojeva veći od 45.

1.22. Očito je traženi broj manji od 223, a to znači da je zbroj njegovih znamenki manji od $2 + 9 + 9$, tj. 20. Iz toga slijedi da je traženi broj veći od $223 - 20$, tj. 203. Neka traženi broj ima oblik $\overline{2ab}$. Tad vrijedi jednakost $2 + a + b = 223 - (200 + 10a + b)$ ili nakon sređivanja $11a + 2b = 21$. Sad je nužno $a = 1$ i $b = 5$. Traženi broj je 215.

1.23. Neka je $\overline{abc}$ traženi troznamenkasti broj i $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ba}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{cb}$ svi mogući dvoznamenkasti brojevi čiji je zbroj jednak $(10a + b) + (10a+c)+(10b+a)+(10b+c)+(10c+a)+(10c+b) = 22(a+b+c)$. Tad vrijedi nejednadžba $100a + 10b + c = 11(a + b + c)$ ili nakon sređivanja $89a = 10c + b$. Broj $10c + b$ očito je dvoznamenkast, pa je nužno $a = 1$, a to znači da je $10c + b = 89$, pa je $c = 8$ i $b = 9$. Traženi broj je 198.

1.24. Neka troznamenkasti broj ima oblik $\overline{abc}$. Tad vrijedi jednakost $100a + 10b + c = 5 \cdot abc$, pa zaključujemo da je $c = 5$, jer je za $c = 0$ desna strana jednakosti jednaka nuli, a takav broj ne postoji. Sad možemo pisati $100a+10b+5 = 25 \cdot ab$, odnosno $20a+2b+1 = 5ab$. Odavde zaključujemo da je $2b + 1$ djeljiv s 5, a to znači da je ili $b = 2$ ili $b = 7$. Za $b = 2$ dobivamo $10a + 5 = 0$, što nije moguće, pa je nužno $b = 7$. Uvrštavanjem dobivamo $15a = 15$ te je $a = 1$. Traženi broj je 175.

1.25. Neka troznamenkasti broj ima oblik $\overline{abc}$. Tad vrijedi $100a + 10b + c = 12(a + b + c)$, ili nakon sređivanja $88a - 11c = 2b$. Kako je lijeva strana posljednje jednakosti djeljiva s 11, to je nužno i desna strana djeljiva sa 11, a to je moguće samo ako je $b = 0$. Slijedi da je $88a - 11c = 0$, ili $8a = c$, pa je očito $a = 1$ i $c = 8$. Traženi broj je 108.

1.26. Neka su a, $a + 1$ $a + 2$ $a + 3$ četiri uzastopna prirodna broja. Tad vrijedi $a(a+1)+38 = (a+2)(a+3)$ ili nakon sređivanja $a = 8$. Traženi brojevi su 8, 9, 10, 11.

1.27. Neka su $x - 2$, x, $x + 2$ tri uzastopna neparna prirodna broja. Tad vrijedi $(x-2)^2 + x^2 + (x+2)^2 = \overline{aaaa}$, pri čemu je a znamenka četveroznamenkastog broja. Kako je kvadrat neparnog broja neparan broj, a zbroj tri neparna broja neparan broj, zaključujemo da je a neparna znamenka, tj. $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Nakon kvadriranja na lijevoj strani i sređivanja dobivena jednakost ima oblik $3x^2 + 8 = \overline{aaaa}$. Lako se može pokazati da je $a \neq 3$ i $a \neq 9$. Naime, za $a = 3$ ili $a = 9$ desna strana jednakosti djeljiva je s 3, a lijeva nije. Zato je $a \in \{1, 5, 7\}$. Za $a = 1$ i $a = 7$ dobivamo $3x^2 = 1103$, odnosno $3x^2 = 7769$, pa x nije prirodni broj. Za $a = 5$ imamo $3x^2 = 5547$, ili $x^2 = 1849$, tj. $x = 43$. Traženi brojevi su 41, 43, 45.

1.28. Neka je y godina rođenja A. de Morgana. Kako je de Morgan rođen u 19. stoljeću, to očito vrijedi $y = x^2 - x$, odnosno $x^2 = \overline{18ab}$, pri čemu je x prirodni broj. Jedini prirodni broj x čiji je kvadrat četveroznamenkasti broj koji počinje s 18 jest 43, jer je $x^2 = 43^2 = 1849$. Zato je $y = 1849 - 43 = 1806$. A. de Morgan rođen je 1806. godine.

1.29. Neka je $\overline{ab} = x$ traženi dvoznamenkasti broj. Ako tom broju dopišemo znamenku 9 s lijeve strane, tad je očito novi broj veći od početnog za 900. Naime, $\overline{9ab} = 900 + \overline{ab}$. Zato vrijedi jednadžba $26x = 900 + x$. Rješenje jednadžbe je $x = 36$. Traženi dvoznamenkasti broj je 36.

1.30. Pretpostavimo da postoji neki prirodni broj x s navedenim svojstvima. Neka je y broj koji nastaje premještanjem prve znamenke s lijeve strane u broju x na posljednje mjesto, pri čemu brojevi x i y imaju jednak broj znamenki. Tad vrijedi $5x = y$. Sad je očito broj y djeljiv s 5, iz čega slijedi da je u broju y zadnja znamenka 5, jer nula to očito nije, a to znači da je prva znamenka s lijeve strane u broju x jednaka 5. Kako brojevi x i y imaju jednaki broj znamenki, zaključujemo da umnožak $5x$ ima jednu znamenku više od broja y, tj. broj y ima jednu znamenku više od broja x, a to je suprotno uvjetu. Zato prirodni broj s navedenim svojstvima ne postoji.

1.31. Neka traženi dvoznamenkasti broj ima oblik $\overline{ab}$. Tad dobiveni troznamenkasti broj ima oblik $\overline{a0b}$, pa vrijedi jednadžba $100a + b = 9(10a + b)$, ili nakon sređivanja $5a = 4b$, tj. $a = \frac{4}{5}b$. Kako je b znamenka, to je nužno $b = 5$. Traženi dvoznamenkasti broj je 45.

1.32. Neka traženi dvoznamenkasti broj ima oblik $\overline{ab}$,. Tad vrijedi $\overline{aabb} = 77 \cdot \overline{ab}$, odnosno $1000a + 100a + 10b + b = 77(10 + b)$ ili nakon sređivanja $30a = 6b$, tj. $a = \frac{b}{5}$. Kako su a i b znamenke, te b višekratnik od 5, to je nužno $b = 5$, $a = 1$. Traženi broj je 15.

1.33. Ako dvoznamenkasti broj ima oblik $\overline{ab}$, tad dobiveni troznamenkasti broj ima oblik $\overline{a0b}$. Tada vrijedi jednakost $100a + b + 2a = 9(10a + b)$ ili nakon sređivanja $12a = 8b$, tj $a = \frac{2}{3}b$. Znamenka b može biti 3, 6 ili 9. Za $b = 3$ i $b = 6$ dobivamo brojeve 23, odnosno 46, a oni nisu djeljivi s 3. Za $b = 9$ imamo $a = 6$, pa je traženi dvoznamenkasti broj 69.

1.34. Neka traženi broj ima oblik $\overline{abc}$. Tad vrijedi jednakost $100a + 10b + c = 6(10a + c)$ ili nakon sređivanja $8a + 2b = c$. Očito je ili $a = 0$ ili $b = 0$, a zbog $a > 0$ slijedi da je $b = 0$, pa je nužno $a = 1$, odnosno $c = 8$. Traženi broj je 108.

1.35. Neka traženi četveroznamenkasti broj ima oblik $\overline{abcd}$, tada je $\overline{abcd} \cdot 9 = \overline{dcba}$. Očito je $a = 1$. Naime, za $a > 1$ novi broj bi bio peteroznamenkasti. Zato vrijedi $\overline{1bcd} \cdot 9 = \overline{dcb1}$, iz čega zaključujemo da će samo za $d = 9$ posljednja znamenka umnoška biti 1. Dalje dobivamo $\overline{1bc9} \cdot 9 = \overline{9cb1}$. Sad možemo pisati jednakost $(1000 + 100b + 10c + 1) \cdot 9 = 9000 + 100c + 10b + 1$, ili nakon sređivanja $89b + 8 = c$. Kako je c znamenka, to je posljednja jednakost točna samo za $b = 0$, pa je $c = 8$. Traženi broj je 1089.

1.36. Posljednja znamenka umnoška kome su faktori samo sedmice može biti jedna od ove četiri znamenke 7, 9, 3, 1, pri čemu dolazi do ponavljanja tih znamenki upravo navedenim redoslijedom ako su u umnošku više od četiri sedmice. Ako na primjer umnožak ima sedam sedmica, tad će posljednja znamenka u umnošku biti 3. Kako je $666 = 4 \cdot 162 + 2$, zaključujemo da umnožak $162 \cdot 4$ završava znamenkom 1 i da su još preostale dvije sedmice, pa će posljednja znamenka umnoška biti 9.

1.37. Pogledavši posljednje znamenke vidimo da se $a + c$ završava istom znamenkom kao i a, te je nužno $c = 0$. Sigurno je $d = 1$ jer je zbroj najvećeg troznamenkastog i najvećeg dvoznamenkastog broja četveroznamenkasti broj manji od 2000. Također, prvi broj mora biti veći od 900 te je $a = 9$. sad možemo pisati Sad možemo pisati $\overline{9b0} + \overline{b9} = \overline{1009}$, odnosno $900 + 10b + 10b + 9 = 1009$ te je $b = 9$. Zato je $a = 9$, $b = 5$, $c = 0$, $d = 1$.

1.38. *1. način.* Iz jednakosti $\overline{abcde} + \overline{abced} = 31587$ lako možemo dobiti novu jednakost $20000a+2000b+200c+11d+11e = 31587$, pri čemu je očito $a = 1$, pa imamo $2000b + 200c + 11d + 11e = 11587$. Lako se može pokazati da je $4 < b < 6$, tj. $b = 5$, pa vrijedi

$200c + 11d + 11e = 1587$. Kako je za $c = 8$ lijeva strana jednakosti veća od desne, a za $c = 6$ vrijedi $11d + 11e = 387$ što ne može biti, to je nužno $c = 7$, pa dobivamo $11d + 11e = 187$, ili $d + e = 17$, tj. $d = 8$ i $e = 9$, ili $d = 9$ i $e = 8$. Traženi brojevi su: 15789 i 15798, ili 15798 i 15789.

2. način. Iz jednakosti $\overline{abcde} + \overline{abced} = 31587$ slijedi da je $\overline{de} + \overline{ed}$ najviše 187, a zbog neparnog broja 7 nužno je $d \neq e$. Dalje imamo $2 \cdot \overline{abc} = 315$ ili $2 \cdot \overline{abc} = 314$, a zbog djeljivosti sa 2 je $\overline{abc} = 157$. Iz $\overline{de} + \overline{ed} = 187$ slijedi da je $d + e = 17$, pa je $d = 8$ i $e = 9$ ili $d = 9$ i $e = 8$. Zato su traženi brojevi: 15789 i 15798 ili 15798 i 15789.

1.39. Očito je n paran broj jer je posljednja znamenka broja $n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n = n^5$ znamenka 4, pa zadnja znamenka broja n može biti 2, 4, 6 ili 8. Najmanji šesteroznamenkasti broj je $100000 = 10^5$, a $20^5 = 3200000$, iz čega slijedi da je $10 < n < 20$. Prema tome, mogući brojevi su $n = 12, 14, 16, 18$. Treba još ispitati koja je posljednja znamenka ovih potencija: 2^5, 4^5, 6^5, 8^5. Kako je 4 posljednja znamenka samo broja 4^5, to je traženi broj $n = 14$, a $14^5 = 537824$.

1.40. Kako je znamenka jedinica broja $n^2 + 2n$ jednaka 4, to znači da je znamenka jedinica broja $n^2 + 2n + 1$ jednaka 5. Zbog $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, a to je potpuni kvadrat, proizlazi da su posljednje dvije znamenke broja $(n + 1)^2$ jednake 25. Prema tome posljednje dvije znamenke broja $n^2 + 2n$ jesu 24, pa zaključujemo da je znamenka desetica tog broja jednaka 2.

1.41. Neka su a i b dva cijela broja za koje vrijedi $ab < a + b < a - b$. Iz $a + b < a - b$ slijedi da je $2b < 0$, tj. $b < 0$. Iz $ab < a + b$ i $b < 0$ zaključujemo da je $a > 0$. Naime, za $a < 0$ nužno je $ab > 0$, odnosno $a + b < 0$, što ne može biti jer je $a + b > ab$. Za $a = 0$ dobivamo $a < b$, a to nije moguće jer je b negativan broj. Zato je $b < 0$ i $a > 0$.

1.42. Očito je umnožak cijelih brojeva x jednak nuli, jer je jedan faktor 0. Potražimo zbroj svih navedenih cijelih brojeva, tj. $-1776 + \cdots + (-1) + 0 + 1 + \cdots + 1076$. Kako navedeni zbroj ima 1076 parova suprotnih brojeva, čiji je zbroj jednak 0, treba odrediti zbroj 700 preostalih negativnih cijelih brojeva. Naime, $|-1776| - |-1076| = 700$. Zato je $-1776 - 1775 - \cdots - 1077 = -(1776 + 1775 + \cdots + 1077) = -\dfrac{(1776 + 1077) \cdot 700}{2} = -998550$. Prema tome, umnožak je veći za 998550.

1.43. Neka su $x = 2a$ i $y = 2b$ neka dva parna broja pri čemu su a i b cijeli brojevi. Zato vrijedi redom

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(4a^2 + 4b^2) = 2a^2 + 2b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2.$$

Kako su $a + b$ i $a - b$ dva cijela broja, tvrdnja je dokazana.

1.44. Ako volumen kvadra rastavimo na proste faktore, dobivamo $336 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ ili $336 = 6 \cdot 7 \cdot 8$. Sad je očito da su duljine tri brida iz istog vrha 6 cm, 7 cm i 8 cm. Oplošje kvadra je $292\ \text{cm}^2$.

1.45. Neka je a znamenka koja se pojavljuje 6 puta, tj. $x = \overline{aa}$ i $y = \overline{aaaa}$. Zato vrijedi $x = 10a + a$ ili $x = 11a$, tj. $x^2 = 121a^2$, odnosno $y = 1000a + 100a + 10a + a$, ili $y = 1111a$. Uz pretpostavku da je a najveća moguća znamenka, tj. $a = 9$, tad je $121a = 121 \cdot 9 = 1089$. Kako je $1089 < 1111$, slijedi da je $121a < 1111$, odnosno $121a^2 < 1111a$ ili $x^2 < y$, pa je $x^{20} < y^{10}$.

1.46. Zbrajanjem zadanih jednadžbi dobivamo $a^2 + 14a + b^2 - 10b + 74 = 0$, ili $a^2+14a+49+b^2-10b+25 = 0$, tj. $(a+7)^2+(b-5)^2 = 0$. Kako je $(a + 7)^2 \geqslant 0$ i $(b - 5)^2 \geqslant 0$, i kako zbroj dva pozitivna broja ne može biti jednak nuli, to je nužno $a + 7 = 0$ i $b - 5 = 0$, pa su $a = -7$ i $b = 5$ traženi cijeli brojevi.