1. Osnovne sredine

1.1. Definicije i osnovne nejednakosti

Prvi pojmovi o sredinama potječu vjerojatno još od Pitagorejaca. Oni su vjerojatno znali i za nejednakost

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b), \quad a, b > 0, \tag{1}$$

ali je ovu nejednakost svakako dokazao Euklid.

Prvo ćemo definirati osnovne sredine za n pozitivnih brojeva.

Definicija 1. Neka je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ dana n-torka pozitivnih brojeva. Tada je

harmonijska sredina $H_n(a)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$H_n(a) = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}};$$

geometrijska sredina $G_n(a)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n};$$

aritmetička sredina $A_n(a)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n(a) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n};$$

kvadratna sredina $K_n(a)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Očito nejednakost (1) predstavlja nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dvaju pozitivnih brojeva a i b. Sljedeći teorem daje poopćenje te nejednakosti na slučaj n pozitivnih brojeva.

Teorem 1. (Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine) Neka je a dana n-torka pozitivnih brojeva. Tada je

$$A_n(a) \geqslant G_n(a) \tag{2}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Koristit ćemo matematičku indukciju.

Za $n = 2$ nejednakost (2) postaje (1), tj.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2},$$

što je ekvivalentno s

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0.$$

Ova nejednakost je očito točna. U njoj vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $a_1 = a_2$.

Pretpostavimo da je nejednakost (2) točna za neko $n = k$, tj. da vrijedi

$$A_k \geqslant G_k. \tag{3}$$

Tada je na osnovu (1),

$$A \equiv \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \geqslant \left(a_{k+1} A_{k+1}^{k-1}\right)^{1/k} \equiv G. \tag{4}$$

Kako je

$$\begin{aligned} A_k + A &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \\ &= \frac{(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} = 2A_{k+1}, \end{aligned}$$

vodeći računa o (3) i (4), imamo

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{1}{2}(A_k + A) \geqslant (A_k A)^{1/2} \geqslant (G_k G)^{1/2} \\ &= (G_k^k G^k)^{\frac{1}{2k}} = \left(G_k^k a_{k+1} A_{k+1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{2k}} \\ &= \left(G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{2k}}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$A_{k+1}^{2k} \geqslant G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1},$$

tj.

$$A_{k+1} \geqslant G_{k+1}.$$

Ovim je induktivni dokaz završen.

Dokažimo da jednakost u (2) nastupa ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

Ako je $a_1 = \ldots = a_n$, tada imamo jednakost u (2). Pretpostavimo sada da su bar dva od brojeva $a_1, \ldots, a_n$ različiti, na primjer, neka je $a_1 \neq a_2$. Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} \\
&\geqslant \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 a_3 \cdots a_n \right]^{\frac{1}{n}} \\
&> (a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}},
\end{aligned}$$

jer je

$$\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}, \quad \text{za } a_1 \neq a_2.$$

Ovim je dokaz završen. □

⋆ ⋆ ⋆

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine zvat ćemo kratko AG nejednakost.

Teorem 2. (Nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine) Neka je a dana n-torka pozitivnih brojeva. Tada je

$$(5) \qquad G_n(a) \geqslant H_n(a),$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

Dokaz. AG nejednakost za brojeve $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ daje

$$(6) \qquad \left(\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Ovdje znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $\dfrac{1}{a_1} = \ldots = \dfrac{1}{a_n}$, tj. $a_1 = \ldots = a_n$.

Iz (6) slijedi (5), tj. nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine. $\square$

Teorem 3. (Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine) Neka je a dana n-torka pozitivnih brojeva. Tada je

$$A_n(a) \leqslant K_n(a), \tag{7}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Ako se u identitetu

$$(a_1 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + \ldots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n),$$

na desnoj strani umjesto $2a_ia_k$ stavi $a_i^2 + a_k^2$ (što je veće ili jednako od $2a_ia_k$ s jednakošću ako i samo ako je $a_i = a_k$) dobivamo nejednakost

$$(a_1 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + \ldots + a_n^2), \tag{8}$$

koja vrijedi za sve realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$.

Kako su svi $a_1, \ldots, a_n$ pozitivni, iz (8) slijedi

$$a_1 + \ldots + a_n \leqslant \left(n(a_1^2 + \ldots + a_n^2)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

tj. (7). $\square$

Primjedba. Teoremi 1, 2 i 3 daju

$$H_n(a) \leqslant G_n(a) \leqslant A_n(a) \leqslant K_n(a). \tag{10}$$

Nejednakosti (5) i (7) nazivamo kraće GH nejednakost i AK nejednakost respektivno.

⋆ ⋆ ⋆

Slično se definiraju osnovne sredine s težinama.

Definicija 2. Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $w = (w_1, \ldots, w_n)$ dane n-torke pozitivnih brojeva i neka je

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

Tada je

harmonijska sredina $H_n(a;w)$ brojeva $a_1,\dots,a_n$ s težinama $w_1,\dots,w_n$ definirana izrazom

$$H_n(a;w) = \frac{W_n}{\dfrac{w_1}{a_1}+\dots+\dfrac{w_n}{a_n}};$$

geometrijska sredina $G_n(a;w)$ brojeva $a_1,\dots,a_n$ s težinama $w_1,\dots,w_n$ definirana izrazom

$$G_n(a;w) = (a_1^{w_1}\cdots a_n^{w_n})^{1/W_n};$$

aritmetička sredina $A_n(a;w)$ brojeva $a_1,\dots,a_n$ s težinama $w_1,\dots,w_n$ definirana izrazom

$$A_n(a;w) = \frac{w_1a_1+\dots+w_na_n}{W_n};$$

kvadratna sredina $K_n(a;w)$ brojeva $a_1,\dots,a_n$ s težinama $w_1,\dots,w_n$ definirana izrazom

$$K_n(a;w) = \sqrt{\frac{w_1a_1^2+\dots+w_na_n^2}{W_n}}.$$

U stvari, mi smo se s ovim definicijama sretali i u prethodnom tekstu samo su težine bile cijeli brojevi. Tu činjenicu ćemo iskoristiti u prvom dokazu sljedećeg teorema:

Teorem 4. (AG nejednakost) Neka su a i w dane n-torke pozitivnih brojeva. Tada je

$$A_n(a;w) \geqslant G_n(a;w), \tag{11}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \dots = a_n$.

Dokaz 1. Pretpostavimo prvo da su sve težine racionalni brojevi. Dovođenjem svih tih težina na najmanji zajednički nazivnik, poslije skraćivanja, nejednakost (11) se svodi na slučaj kad su sve težine cijeli brojevi, a ona je na osnovu (2) točna. Dakle, nejednakost (11) je točna u slučaju racionalnih težina, a u graničnom procesu ona je točna za proizvoljne pozitivne težine.

Dokaz 2. Promotrimo funkciju f danu sa

$$f(x) = \ln x - x + 1, \qquad (x > 0).$$

Kako je

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \ \text{ i } \ f''(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad (x > 0),$$

funkcija f ima za $x=1$ maksimum 0, te vrijedi nejednakost

$$\ln x - x + 1 \leqslant 0, \qquad (x>0). \tag{12}$$

Neka je $A = A_n(a;w)$. Prema (12) vrijedi nejednakost

$$\ln\frac{a_k}{A} - \frac{a_k}{A} + 1 \leqslant 0, \qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

odakle poslije množenja s w_k i zbrajanja imamo

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \ln\frac{a_k}{A} - \sum_{k=1}^{n}\frac{w_k a_k}{A} + W_n \leqslant 0,$$

tj.

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A}\right)^{w_k}\right) \leqslant W_n - W_n = 0.$$

Odavde dobivamo

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{w_k}}{A^{W_n}} \leqslant 1 \iff \frac{G_n(a;w)}{A} \leqslant 1,$$

tj. nejednakost (11).

Uvjet za jednakost jednostavno se dobiva iz činjenice da jednakost u (12) vrijedi ako i samo ako je $x=1$. $\square$

U stvari vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 5. Neka su a i w dane n-torke pozitivnih brojeva. Tada vrijedi

$$H_n(a;w) \leqslant G_n(a;w) \leqslant A_n(a;w) \leqslant K_n(a;w), \tag{13}$$

s jednakostima ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Trebamo dokazati samo prvu i treću nejednakost. Prva nejednakost slijedi iz druge, tj. iz AG nejednakosti, ako se ova primjeni na brojeve $\frac{1}{a_1},\ldots,\frac{1}{a_n}$ (vidjeti dokaz teorema 2).

Iz prve dvije nejednakosti dobivamo AH nejednakost, tj. vrijedi

$$H_n(a;w) \leqslant A_n(a;w) \tag{14}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

Zamjenama: $w_i \mapsto w_i a_i$, ($i=1,\ldots,n$) dobivamo iz (14)

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i a_i},$$

odakle slijedi

$$A_n(a;w) \leqslant K_n(a;w), \tag{15}$$

tj. treća nejednakost u (13). □

U sljedećem teoremu $G_n(a;w)$ i $A_n(a;w)$ su definirani kao u definiciji 2 i u slučaju kada su težine realni brojevi.

Teorem 6. (Suprotna AG nejednakost) Neka je a pozitivna n-torka, i neka je w realna n-torka takva da vrijedi

$$w_1 > 0,\ w_i < 0,\ (i = 2, \dots, n),\ W_n > 0. \tag{16}$$

Tada je

$$A_n(a;w) \leqslant G_n(a;w), \tag{17}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \dots = a_n$.

Dokaz. Ako je $A_n(a;w) \leqslant 0$, nejednakost (17) je očita, pa možemo pretpostaviti da je $A_n(a;w) > 0$. Koristeći zamjene:

$$a_1 \to A_n(a;w),\ w_1 \to W_n,\ w_i \to -w_i\ (i = 2, \dots, n),$$

(11) postaje

$$\frac{W_n \dfrac{1}{W_n}(w_1a_1 + w_2a_2 + \dots + w_na_n) - w_2a_2 - \dots - w_na_n}{W_n - w_2 - \dots - w_n} \geqslant \left(A_n(a;w)^{W_n} a_2^{-w_2} \cdots a_n^{-w_n}\right)^{1/(W_n - w_2 - \dots - w_n)},$$

tj.

$$a_1 \geqslant \left(A_n(a;w)^{W_n} a_2^{-w_2} \cdots a_n^{-w_n}\right)^{1/w_1},$$
$$a_1^{w_1} \geqslant A_n(a;w)^{W_n} a_2^{-w_2} \cdots a_n^{-w_n},$$
$$a_1^{w_1} a_2^{w_2} \cdots a_n^{w_n} \geqslant A_n(a;w)^{W_n}$$

odakle slijedi (17). □

Napomena. Postoji više različitih dokaza AG nejednakosti. U knjizi [3] navedena su 52 dokaza. Dokaz naveden ovdje uzet je iz [1, str. 18–19], jer se čini najelementarnijim, mada je takav i onaj dan u [2, str. 44–45]. Teorem 6 dokazan je u [4].

Literatura

[1] D. S. MITRINOVIĆ, P. M. VASIĆ *Sredine*, Matematička biblioteka 40, Beograd, 1968.

[2] B. PAVKOVIĆ, D. VELJAN *Elementarna matematika I*, Zagreb, 1992.

[3] P. S. BULLEN, D. S. MITRINOVIĆ, P. M. VASIĆ *Means and Their Inequalities* Dordrecht–Boston–Lancaster–Tokyo, 1988.

[4] P. M. VASIĆ, J. E. PEČARIĆ *On the Jensen inequality* Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 634–677 (1979), 50–54.

1.2. Nejednakosti Radoa i Popoviciua

Teorem 1. Neka su a i w n-torke pozitivnih brojeva. Tada vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}(1)\qquad \left(\frac{A_n(a;w)}{G_n(a;w)}\right)^{W_n} &\geqslant \left(\frac{A_{n-1}(a;w)}{G_{n-1}(a;w)}\right)^{W_{n-1}} \geqslant \dots \\ &\geqslant \left(\frac{A_2(a;w)}{G_2(a;w)}\right)^{W_2} \geqslant 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\qquad W_n(A_n(a;w)-G_n(a;w)) &\geqslant W_{n-1}(A_{n-1}(a;w)-G_{n-1}(a;w)) \\ &\geqslant \dots \geqslant W_2(A_2(a;w)-G_2(a;w)) \geqslant 0,\end{aligned}$$

$$(3)\qquad \left(\frac{A_n(a;w)}{G_n(a;w)}\right)^{W_n} \geqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{\left(\dfrac{w_ia_i+w_ja_j}{w_i+w_j}\right)^{w_i+w_j}}{a_i^{w_i}a_j^{w_j}} \geqslant 1,$$

$$\begin{aligned}(4)\qquad W_n(A_n(a;w)-G_n(a;w)) \geqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big(& w_ia_i+w_ja_j \\ &-(w_i+w_j)\big(a_i^{w_i}a_j^{w_j}\big)^{\frac{1}{w_i+w_j}}\Big) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Dokaz. AG nejednakost

$$(5)\qquad \frac{uc+vb}{u+v} \geqslant (c^ub^v)^{\frac{1}{u+v}} \qquad (c,b,u,v>0)$$

za

$$u=W_{k-1},\quad v=w_k,\quad c=A_{k-1}(a;w),\quad b=a_k,$$

postaje

$$A_k(a;w) \geqslant \left(A_{k-1}(a;w)^{W_{k-1}}a_k^{w_k}\right)^{\frac{1}{W_k}},$$

tj.

$$\frac{A_k(a;w)^{W_k}}{a_k^{w_k}} \geqslant A_{k-1}(a;w)^{W_{k-1}},$$

što je ekvivalentno s

$$\left(\frac{A_k(a;w)}{G_k(a;w)}\right)^{W_k} \geqslant \left(\frac{A_{k-1}(a;w)}{G_{k-1}(a;w)}\right)^{W_{k-1}}.$$

Time je nejednakost (1) dokazana.

Stavljajući u (5):

$$u = W_{k-1}, \quad v = w_k, \quad c = G_{k-1}(a;w), \quad b = a_k,$$

dobivamo

$$\frac{W_{k-1}G_{k-1}(a;w)+w_k a_k}{W_k} \geqslant \left(G_{k-1}(a;w)^{W_{k-1}} a_k^{w_k}\right)^{1/W_k} = G_k(a;w),$$

tj.

$$W_{k-1}G_{k-1}(a;w) + w_k a_k \geqslant W_k G_k(a;w),$$

tj.

$$W_{k-1}G_{k-1}(a;w) + w_1 a_1 + \ldots + w_k a_k \\ \geqslant W_k G_k(a;w) + w_1 a_1 + \ldots + w_{k-1} a_{k-1},$$

tj.

$$W_k(A_k(a;w) - G_k(a;w)) \geqslant W_{k-1}(A_{k-1}(a;w) - G_{k-1}(a;w)).$$

Time je dokazana nejednakost (2).

Nejednakosti (3) i (4) su jednostavne posljedice nejednakosti

$$\left(\frac{A_n(a;w)}{G_n(a;w)}\right)^{W_n} \geqslant \left(\frac{A_2(a;w)}{G_2(a;w)}\right)^{W_2} \geqslant 1,$$

i

$$W_n(A_n(a;w) - G_n(a;w)) \geqslant W_2(A_2(a;w) - G_2(a;w)) \geqslant 0,$$

respektivno. Naime te nejednakosti vrijede bez obzira na poredak u n-torkama a i w, tj. možemo uzeti da su prva dva broja u tim n-torkama a_i, a_j i w_i, w_j, respektivno. □

Primjedba. Nejednakosti (1) i (3) su Radoove, a (2) i (4) Popoviciuove nejednakosti. Specijalni slučajevi nejednakosti (3) i (4) su:

$$n(A_n(a) - G_n(a)) \geqslant (\sqrt{\max(a)} - \sqrt{\min(a)}\,)^2,$$

i

$$\left(\frac{A_n(a)}{G_n(a)}\right)^n \geqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a_i}{a_j}} + \sqrt{\frac{a_j}{a_i}}\right)^2.$$

1.3. Kantorovičeva i s njom povezane nejednakosti

Teorem 1. (Rennieova nejednakost) Neka je w pozitivna n-torka i neka je a takva n-torka da vrijedi

$$0 < m \leqslant a_k \leqslant M \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Tada je

$$\sum_{k=1}^{n} w_k a_k + mM \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{a_k} \leqslant (m+M)W_n. \tag{2}$$

Jednakost u (2) vrijedi ako i samo ako postoji skup $I \subset \{1, \ldots, n\}$, takav da je $a_i = m \ (i \in I)$ i $a_i = M \ (i \in \{1, \ldots, n\} \setminus I)$.

Dokaz. Na osnovu (1) imamo sljedeću nejednakost

$$w_k(a_k - m)(M - a_k)a_k^{-1} \geqslant 0,$$

odakle zbrajanjem po k dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(a_k - m)\Big(\frac{M}{a_k} - 1\Big) \geqslant 0,$$

tj.

$$(M+m)W_n - \sum_{k=1}^{n} w_k a_k - Mm \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{a_k} \geqslant 0. \ \Box$$

Teorem 2. (Kantorovičeva nejednakost) Neka je w pozitivna n-torka i neka je a takva n-torka da vrijedi (1). Tada je

$$A_n(a; w) \leqslant \frac{(M+m)^2}{4mM} H_n(a; w). \tag{3}$$

Jednakost u (3) vrijedi ako i samo ako postoji skup $I \subset \{1, \ldots, n\}$, takav da je $W_i = \sum_{i \in I} w_i = \dfrac{W_n}{2}$, $a_i = M \ (i \in I)$, $a_i = m \ (i \notin I)$.

Dokaz. Nejednakosti (2) dodajmo očitu nejednakost

$$\left[\Big(\sum_{k=1}^{n} w_k a_k\Big)^{\frac{1}{2}} - \Big(mM \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{a_k}\Big)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \geqslant 0. \tag{4}$$

Tako dobivamo

$$(M+m)W_n \geqslant 2mM\left(\sum_{k=1}^{n} w_k a_k\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{w_k}{a_k}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ova nejednakost je ekvivalentna s (3).

Pretpostavimo da su ispunjeni uvjeti za jednakost u (2). Također mora vrijediti jednakost i u (4). To daje

$$W_I M + (W_n - W_I)m = W_I m + (W_n - W_I)M$$

tj.

$$W_I = \frac{W_n}{2}. \ \square$$

Teorem 3. (Nejednakost Shishe i Monda) Neka je w pozitivna n-torka i neka je a takva n-torka da vrijedi (1). Tada je

$$A_n(a;w) - H_n(a;w) \leqslant (\sqrt{M}-\sqrt{m})^2. \tag{5}$$

Jednakost u (5) vrijedi ako i samo ako postoji skup $I \subset \{1,\ldots,n\}$, takav da je $W_I = \sqrt{M}W_n/(\sqrt{M}+\sqrt{m})$, $a_i = M$ $(i \in I)$, $a_i = m$ $(i \notin I)$.

Dokaz. Nejednakosti (2), tj.

$$A_n(a;w) + mMH_n(a;w)^{-1} \leqslant m + M$$

dodajmo očitu nejednakost

$$(H_n(a;w)^{1/2} - \sqrt{Mm}H_n(a;w)^{-1/2})^2 \geqslant 0. \tag{6}$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} A_n(a;w) + mMH_n(a;w)^{-1} \leqslant m + M + H_n(a;w) \\ - 2\sqrt{mM} + mMH_n(a;w)^{-1}, \end{aligned}$$

što je istovjetno sa (5).

Iz uvjeta za jednakost u (2) i (6) dobivamo uvjete za jednakost u (5). $\square$

Teorem 4. Neka je w pozitivna n-torka i neka je a takva n-torka da vrijedi (1). Tada je

$$\sum_{k=1}^{n} w_k a_k^2 + mMW_n \leqslant (m+M)\sum_{k=1}^{n} w_k a_k. \tag{7}$$

Jednakost u (7) vrijedi ako i samo ako postoji skup $I \subset \{1,\dots,n\}$ takav da je $a_i = m \ \ (i \in I)$ i $a_i = M \ \ (i \notin I)$.

Dokaz. Zamjena $w_i \to w_i a_i$, $(i = 1,\dots,n)$ u (2) daje (7). $\square$

Teorem 5. Neka je w pozitivna n-torka i neka je a takva n-torka da vrijedi (1). Tada je

$$K_n(a;w) \leqslant \frac{m+M}{2\sqrt{mM}} A_n(a;w). \tag{8}$$

Jednakost u (8) vrijedi ako i samo ako postoji skup $I \subset \{1,\dots,n\}$, takav da je $W_I = \dfrac{mW_n}{m+M}$, $a_i = M \ \ (i \in I)$, $a_i = m \ \ (i \notin I)$.

Dokaz. Nejednakost (8) možemo dobiti bilo iz Kantorovičeve nejednakosti (3) koristeći zamjene: $w_i \to w_i a_i$, bilo koristeći (7). Zaista, na osnovu (7) imamo

$$\begin{aligned} K_n(a;w)^2 &\leqslant (m+M)A_n(a;w) - mM \\ &= \frac{(m+M)^2}{4mM} A_n(a;w)^2 - \left(\frac{M+m}{2\sqrt{mM}} A_n(a;w) - \sqrt{mM} \right)^2 \\ &\leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM} A_n(a;w)^2, \end{aligned}$$

odakle slijedi (8).

Pored uvjeta za jednakost u (7) mora biti i

$$A_n(a;w) = \frac{2mM}{m+M}.$$

Dakle,

$$W_I M + (W_n - W_I)m = \frac{2mMW_n}{m+M},$$

tj. $W_I = mW_n/(m+M)$. $\square$

Teorem 6. Neka je w pozitivna n-torka i neka je a takva n-torka da vrijedi (1). Tada je

$$K_n(a;w) - A_n(a;w) \leqslant \frac{(M-m)^2}{4(M+m)}. \tag{9}$$

Jednakost u (9) vrijedi ako i samo ako postoji skup $I \subset \{1, \dots, n\}$ takav da je $W_I = \dfrac{M+3m}{4(m+M)} W_n$, $a_i = M \quad (i \in I)$, $a_i = m$ $(i \notin I)$.

Dokaz. Na osnovu nejednakosti (7) imamo

$$
\begin{aligned}
K_n(a;w) - A_n(a;w) &\leqslant K_n(a;w) - \frac{1}{m+M} K_n(a;w)^2 - \frac{mM}{m+M} \\
&= \frac{(M-m)^2}{4(m+M)} - \frac{1}{m+M}\left(K_n(a;w) - \frac{M+m}{2}\right)^2 \\
&\leqslant \frac{(M-m)^2}{4(m+M)}.
\end{aligned}
$$

Pored uvjeta za jednakost u (7) mora vrijediti i jednakost u posljednjoj nejednakosti, tj.

$$K_n(a;w) = \frac{M+m}{2},$$

tj.

$$W_I M^2 + (W_n - W_I) m^2 = \frac{(M+m)^2}{4} W_n,$$

tj.

$$W_I = \frac{(M+3m)W_n}{4(m+M)}. \quad \square$$

Literatura

[1] B. C. RENNIE *On a class of inequalities* J. Austral. Math. Soc. 3 (1964), 1053–1058.

[2] L. V. KANTOROVIČ *Functional analysis and applied mathematics* (na ruskom) Uspehi Matem. Nauk 3, No. 6 (28) (1948), 89–185 (posebno, str. 142–144).

[3] O. SHISHA AND B. MOND *Bounds on Differences of Means. Inequalities* vol. 1, New York, 1967., 293–308.

1.4. Nejednakost Sierpińskog

Teorem 1. (Nejednakost Sierpinskog) Neka je a pozitivna n-torka. Tada je

$$(1) \qquad A_n(a)^{n-1} H_n(a) \geqslant G_n(a)^n \geqslant A_n(a) H_n(a)^{n-1}.$$

Dokazat ćemo sljedeći općenitiji rezultat.

Teorem 2. Neka su a i w pozitivne n-torke i neka je $w_1 \geqslant \ldots \geqslant w_n$. Neka je

$$\sigma(k) = \frac{A_k(a;w)^{W_{k-1}} H_k(a;w)^{w_k}}{G_k(a;w)^{W_k}},$$

i

$$\delta(k) = \frac{A_k(a;w)^{w_k} H_k(a;w)^{W_{k-1}}}{G_k(a;w)^{W_k}}.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned} &\sigma(n) \geqslant \sigma(n-1) \geqslant \ldots \geqslant \sigma(3) \geqslant \sigma(2) \geqslant 1, \\ &1 \geqslant \delta(2) \geqslant \delta(3) \geqslant \ldots \geqslant \delta(n-1) \geqslant \delta(n). \end{aligned} \tag{2}$$

Jednakosti u (2) vrijede ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Zamjenama $a_i \mapsto a_i^{-1}$ vidimo da su ova dva niza nejednakosti ekvivalentni, pa je dovoljno dokazati samo prvi. Koristimo oznake $A_k \equiv A_k(a;w)$, $G_k \equiv G_k(a;w)$ i $H_k \equiv H_k(a;w)$. Pošto je

$$W_n A_n = W_{n-1} A_{n-1} + w_n a_n, \; G_n^{W_n} = G_{n-1}^{W_{n-1}} a_n^{w_n},$$
$$\frac{W_n}{H_n} = \frac{W_{n-1}}{H_{n-1}} + \frac{w_n}{a_n},$$

imamo

$$\begin{aligned} A_n = {} & \frac{W_{n-1} - w_n}{W_{n-1}} \cdot \frac{W_{n-1}^2 A_{n-1} - w_n^2 H_{n-1}}{W_n (W_{n-1} - w_n)} \\ & + \frac{w_n}{W_{n-1}} \cdot \frac{H_{n-1}}{H_n} \cdot \left(\frac{G_n^{W_n}}{G_{n-1}^{W_{n-1}}} \right)^{1/w_n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Koristeći AG nejednakost na desnoj strani, kombinirajući

$$\frac{W_{n-1}^2 A_{n-1} - w_n^2 H_{n-1}}{W_n (W_{n-1} - w_n)} \geqslant A_{n-1} \tag{4}$$

i $w_{n-1} \geqslant w_n$ i koristeći $A_{n-1} \geqslant H_{n-1}$ dobivamo

$$\sigma(n) \geqslant \sigma(n-1). \tag{5}$$

Primjetimo da je (4) jedan oblik nejednakosti $A_{n-1} \geqslant H_{n-1}$.

Jasno je da jednakost vrijedi u nejednakosti dobivenoj iz (3) za

$$\frac{W_{n-1}^2 A_{n-1} - w_n^2 H_{n-1}}{W_n (W_{n-1} - w_n)} = \frac{H_{n-1}}{H_n} a_n,$$

tj.

$$a_n = \frac{W_{n-1} A_{n-1} - w_n H_{n-1}}{W_{n-1} - w_n}, \tag{6}$$

dok jednakost u (4) vrijedi za

$$A_{n-1} = H_{n-1}. \tag{7}$$

Iz (6) i (7) proizlazi da jednakosti u (2) vrijede ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

Literatura

[1] J. E. PEČARIĆ, C. L. WANG *An extension of a Sierpiński inequality* Cong. Num. (Canada), 61 (1988) 35–38.

1.5. Nejednakosti Bernoullija, Weierstrassa i Ky Fana

Teorem 1. (Bernoullieva nejednakost) Neka je x realan broj takav da je $-1 < x \neq 0$. Ako je a realan broj takav da je $a > 1$ ili $a < 0$, tada je

$$(1+x)^a > 1 + ax, \tag{1}$$

a ako je $0 < a < 1$ tada vrijedi suprotna nejednakost, tj.

$$(1+x)^a < 1 + ax. \tag{2}$$

Dokaz 1. Na osnovu Taylorove formule imamo

$$(1+x)^a - 1 - ax = \frac{a(a-1)x^2}{2}(1+\vartheta x)^{a-2}, \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Dalje, pretpostavke teorema daju $1 + \vartheta x > 0$ i

$$\operatorname{sgn}[(1+x)^a - 1 - ax] = \operatorname{sgn}[a(a-1)],$$

tako da (1) i (2) vrijede.

Dokaz 2. Neka su u, v i a pozitivni brojevi. AG nejednakost i njoj suprotna nejednakost daju

$$u^a v^{1-a} < au + (1-a)v, \quad (0 < a < 1,\ u \neq v) \tag{3}$$

i

$$u^a v^{1-a} > au + (1-a)v, \quad (a > 1 \text{ ili } a < 0,\ u \neq v). \tag{4}$$

Zamjenama $u = 1+x$ i $v = 1$ iz (4) i (3) dobivamo (1) i (2). □

Primjedba. U stvari Bernoullieva nejednakost i AG nejednakost su ekvivalentne. Zaista, stavljajući u (1) i (2) $x = \dfrac{u}{v} - 1$, dobivamo respektivno (4) i (3).

Teorem 2. Ako je svaki od realnih brojeva $x_1, \dots, x_n$ veći od -1 i ako su ili svi pozitivni ili svi negativni, tada je

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) > 1+x_1+x_2+\ldots+x_n. \tag{5}$$

Dokaz. Za $n=2$ nejednakost je točna jer vrijedi

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1+x_1+x_2+x_1x_2 > 1+x_1+x_2.$$

Pretpostavimo da vrijedi (5). Tada je

$$\begin{aligned}(1+x_1)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1})&\\ &> (1+x_1+\ldots+x_n)(1+x_{n+1})\\ &= 1+x_1+\ldots+x_n+x_{n+1}+x_{n+1}(x_1+\ldots+x_n)\\ &> 1+x_1+\ldots+x_n+x_{n+1}.\end{aligned}$$

Time je dokaz matematičkom indukcijom završen. □

Jednostavna posljedica teorema 2 je sljedeći teorem.

Teorem 3. (Weierstrassove nejednakosti) Neka je $a_k \in \langle 0,1\rangle$ za $k=1,\dots,n$. Tada je

$$\prod_{k=1}^{n}(1-a_k) > 1-\sum_{k=1}^{n} a_k; \tag{6}$$

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) < \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)}. \tag{7}$$

Ako je $a_k \in \langle 0,1\rangle$ za $k=1,\dots,n$ i $\sum_{k=1}^{n} a_k < 1$, tada je

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) < \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n} a_k}; \tag{8}$$

$$\prod_{k=1}^{n}(1-a_k) < \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n} a_k}. \tag{9}$$

Kombiniranje nejednakosti (6) – (9), uz iste uvjete za a_i, daje

$$\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n} a_k} > \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) > 1+\sum_{k=1}^{n} a_k; \tag{10}$$

$$\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n} a_k} > \prod_{k=1}^{n}(1-a_k) > 1-\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{11}$$

Teorem 4. (Ky Fanova nejednakost) Ako je $0 < x_i \leqslant \frac{1}{2}$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ tada je

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)\right)^n} \tag{12}$$

s jednakošću ako i samo ako su svi x_i međusobno jednaki.