1.

Teorija brojeva

1.1. U dekadskom prikazu prirodni je broj n troznamenkast, a znamenka stotica jednaka je znamenci jedinica. Broj n djeljiv je s 15. Odredite sve brojeve koji imaju navedena svojstva.

1.2. Neka je a proizvoljan prirodan broj. Označimo s b broj koji iz a dobijemo tako da ispustimo znamenku jedinica i tako dobivenom broju pribrojimo četverostruku znamenku jedinica broja a. (Na primjer, ako je $a = 238$, onda je $b = 23 + 4 \cdot 8 = 55$.) Dokažite da 13 dijeli a ako i samo ako 13 dijeli b.

1.3. Zadani prirodni broj podijelimo zdesna ulijevo na uobičajeni način u skupine od po tri znamenke. Dobivene skupine shvatimo kao troznamenkaste brojeve i pomnožimo ih naizmjence s $+1$ i -1 pa dobivene brojeve zbrojimo. Dokažite da je zadani broj djeljiv sa 7 ili 11 ili 13 ako i samo ako je i dobiveni broj takav.

1.4. Dva dvoznamenkasta broja zapisana jedan za drugim čine četveroznamenkasti broj koji je djeljiv s njihovim produktom. Nađite te brojeve.

1.5. Neka je dan bilo koji troznamenkasti broj (ako je broj znamenaka manji, dodajemo potreban broj nula) kojeg sve znamenke nisu jednake. Od iste tri znamenke načinimo najveći i najmanji mogući troznamenkasti broj. Njihova je razlika novi troznamenkasti broj, s kojim ponavljamo isti postupak. Nakon najviše šest koraka dolazi se do broja 495, koji se dalje ponavlja, i to bez obzira na izbor početnog broja. Dokazati!

1.6. Vrijedi: $126 = 6 \cdot 21$. Nađite sve troznamenkaste brojeve koji su jednaki produktu jedne svoje znamenke s dvoznamenkastim brojem koji čine preostale dvije znamenke.

1.7. Dokažite sljedeće tvrdnje:

a) $9n^2 + 3n - 2$ nije djeljivo s 9 ni za koji $n \in \mathbf{Z}$;

b) $9n^2 + 3n - 2$ djeljivo je s 2 za svaki $n \in \mathbf{Z}$;

c) $9n^2 + 3n - 2$ djeljivo je s 4 za beskonačno mnogo $n \in \mathbf{Z}$.

Kakav je opći oblik broja n ?

1.8. Dokažite da je $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$ cijeli broj za svaki cijeli broj x.

1.9. Ako prirodni broj n nije djeljiv s 4, dokažite da je $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ djeljiv s 5.

1.10. Dokažite:

$$10 | a_1 + \ldots + a_{1988} \implies 10 | a_1^5 + \ldots + a_{1988}^5, \quad a_i \in \mathbf{N}.$$

1.11. Odredite sve parove prirodnih brojeva kojih je umnožak 51840, a najmanji zajednički višekratnik 2160.

1.12. Nađite najveću zajedničku mjeru brojeva

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{5n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

1.13. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da su $2n^2 + 3$ i $n^2 + n + 1$ relativno prosti.

1.14. Neka je n prirodan broj. Dokažite da je najveća zajednička mjera brojeva $n^2 + 1$ i $(n + 1)^2 + 1$ ili 1 ili 5, te dokažite da je jednaka 5 ako i samo ako je $n \equiv 2 \pmod{5}$.

1.15. Neka su $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$ svi faktori prirodnog broja n, različiti od 1 i n. Dokažite da je

$$\frac{2}{\log n}(\log n_1 + \log n_2 + \ldots + \log n_k) = k.$$

1.16. Dokažite: ako je $n+1$ djeljiv s 24, tad je i suma svih prirodnih djeljitelja broja n djeljiva s 24.

1.17. Može li za prirodan broj $n \geqslant 2$ broj $n^4 + 4$ biti prost?

1.18. Dokažite da za proizvoljne cijele brojeve a i b vrijedi:

$$a^3 - 3a^2b - 9ab^2 - b^3 + 6 \neq 0.$$

1.19. Nađite sve trojke cijelih brojeva (a, b, c) koje zadovoljavaju jednakost:

$$3(a-3)^2 + 6b^2 + 2c^2 + 3b^2c^2 = 33.$$

1.20. Dokažite da jednadžba $2x^2 - 5y^2 = 7$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

1.21. Dokažite da jednadžba

$$x! + y! = 10\,z + 9$$

nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

1.22. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je izraz

$$\frac{n^2 - n - 12}{n-3}$$

također prirodan broj.

1.23. Nađite sve trojke (x, y, z) prirodnih brojeva takvih da je $x \leqslant y \leqslant z$ i da je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ cijeli broj.

1.24. Dokažite da za svaki prirodan broj k jednadžba

$$x^2 + y^2 = z^k$$

ima rješenje $(x, y, z) \in \mathbf{N}^3$.

1.25. Zadan je proizvoljan prirodni broj n. Dokažite da jednadžbe $x^2 + y^2 = n$ i $x^2 + y^2 = 2n$ imaju jednako mnogo cjelobrojnih rješenja.

1.26. a) Služeći se binomnom formulom, iz jednakosti $3^n = (1+2)^n$ dokažite da za svaki prirodan broj n veći od 1 vrijedi nejednakost $\sqrt[n]{n+1} \leqslant \sqrt{3}$.

b) Dokažite da su parovi $(4, 2)$ i $(2, 4)$ jedina rješenja jednadžbe $x^y = y^x$ u skupu prirodnih brojeva, uz uvjet da je $x \neq y$.

1.27. Dokažite da je za svaki prirodan broj n rješenje jednadžbe

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = (\sqrt{2} - 1)^n$$

prirodan broj.

1.28. Neka je P produkt šest uzastopnih prirodnih brojeva većih od 1 i Q produkt drugog i petog od tih brojeva. Dokažite nejednakosti

$$(Q-1)^3 < P < Q^3.$$

1.29. Dokažite da je za svaki prirodan broj n i broj

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

prirodan.

1.30. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi da je

$$(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n$$

cijeli broj koji nije djeljiv s 5.

1.31. Dokažite da ako je n proizvoljan prirodan broj, onda se broj $(5+\sqrt{26})^n$ razlikuje od cijelog broja za najviše 10^{-n}.

1.32. Neka je p prost broj veći od 2. Dokažite da je $[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$ djeljiv s p. ($[x]$ je najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

1.33. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve x i sve prirodne brojeve d i n vrijedi:

$$[d^n x] - d[d^{n-1}x] = [d^n(x - [x])] - d[d^{n-1}(x - [x])].$$

1.34. Nađite realna rješenja jednadžbe $[(x-1)^2] = [x]$.

1.35. Dokažite da je $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ iracionalan broj.

1.36. Odredite sve racionalne brojeve a, b i c za koje vrijedi $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} = 0$.

1.37. Dokažite da $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5}$ nije racionalan broj.

1.38. Neka su n i p proizvoljni prirodni brojevi te $p \geqslant 2$. Dokažite da broj

$$\sqrt[p]{n^p + p}$$

nije racionalan.

1.39. Na ploči su napisani brojevi $1, 2, \ldots, 1986$. Obrišimo bilo koja dva broja i umjesto njih napišimo njihovu razliku. Postupak ponovimo 1985 puta. Je li posljednji tako dobiveni broj paran ili neparan?

1.40. Brojevi od 1 do 1000 ispisani su redom po kružnici. Počevši od prvog precrtava se svaki petnaesti broj (1, 16, $31, \ldots$,) i pri tome se prilikom ponovnih obilazaka već precrtani brojevi ponovo računaju. Koliko će brojeva ostati neprecrtano?

1.41. Promatrajmo sve one skupove S koje čine prirodni brojevi manji ili jednaki 90, takvi da za bilo koja dva elementa $x, y \in S$ vrijedi $x + y \neq 90$. Koliko najviše elemenata može imati skup S?

1.42. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ proizvoljan poredak brojeva $1, 2, \ldots, n$. Dokažite da je broj $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ paran ako je n neparan.

1.43. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz različitih prirodnih brojeva koji nisu manji od 2. Dokažite da postoji njegov podniz $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ takav da za svako $k \in \mathbf{N}$ vrijedi $a_{i_k} > i_k$.

1.44. U bazi 2 dan je broj $111\ldots11$ (n jedinica). Nađite, također u bazi 2, njegov kvadrat.

1.45. Prirodni broj n zovemo *Pitagorin* ako postoje prirodni brojevi a, b takvi da je $n = a^2 + b^2$. Dokažite da ako su m, n Pitagorini, a $m \cdot n$ nije Pitagorin, onda je $m \cdot n$ kvadrat nekog parnog broja.

1.46. Neka je dana funkcija $D : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \cup \{0\}$ sa svojstvima $D(1) = 0, D(p) = 1$, za svaki prost broj p; $D(uv) = uD(v) + vD(u)$, za sve prirodne brojeve $u, v \in \mathbf{N}$. Za koje je vrijednosti od n $D(n) = n$?

Rješenja

1.1. Neka je $n = \overline{xyx}$. Budući da je $15 \mid n$, zaključujemo da je $x = 5$. Broj n djeljiv je s 3, što znači da je i broj $x + y + x$ djeljiv s 3. Odavde slijedi da je $y \equiv 2 \pmod 3$, odnosno $y \in \{2, 5, 8\}$. Dakle, rješenja su brojevi 525, 555 i 585.

1.2. Ako je $a = 10x + y$, onda je $b = x + 4y$. Sad tvrdnja zadatka slijedi neposredno iz činjenice da je $4a - b = 13 \cdot 3x$.

1.3. Ako je zadani broj oblika $a_1 + 10^3 a_2 + \ldots + 10^{3(n-1)} a_n$, onda je dobiveni broj oblika $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n$.

Tvrdnja zadatka posljedica je činjenice da je njihova razlika

$$(10^3 + 1)a_2 + (10^6 - 1)a_3 + \ldots + [10^{3(n-1)} - (-1)^{n-1}]a_n$$

djeljiva s $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, jer je svaka zagrada djeljiva s $10^3 + 1 = 1001$.

1.4. Neka su traženi brojevi x i y. Tad mora vrijediti da je $100x + y = kxy$, $k \in \mathbf{N}$. Odavde je y djeljivo s x, dakle $y = x \cdot u$, $u \in \{1, 2, 4, 5\}$. Uvrštavanjem dobivamo: $100 = u(kx - 1)$, što povlači da je $u \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ i da je $k > 1$ (jer je $y < 100$). Za $u = 1$ i $u = 5$ dobivamo $kx = 101$, odnosno $kx = 21$, što nema rješenja takva da je $k > 1$ i x dvoznamenkasti broj. Za

$n = 2$ dobivamo $kx = 51$, odakle je $x = 17$, $y = 34$. Za $n = 4$ dobivamo $kx = 26$, odakle je $x = 13$, $y = 52$.

1.5. Neka su x, y, z znamenke polaznog broja te neka je $x \leqslant y \leqslant z$. Tad u prvom koraku dobivamo broj

$$(100z + 10y + x) - (100x + 10y + z) = 99(z - x).$$

Ovaj je broj djeljiv s 99, dakle, on je jedan od brojeva

$$99,\ 198,\ 297,\ 396,\ 495,\ 594,\ 693,\ 792,\ 891.$$

Primjenom procedure opisane u zadatku iz broja 99 dobivamo 891, iz 198 i 891 dobivamo 792, iz 297 i 792 dobivamo 693, iz 396 i 693 dobivamo 594, dok iz 594 dobivamo broj 495. Budući da se iz broja 495 dobiva ponovo broj $495 = 954 - 459$, tvrdnja zadatka dokazana je.

1.6. Neka je $u = \overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Tad je $z(10x + y) < 10(10x + y) < u$, $x(10y + z) \leqslant 99x < u$, $x(10z + y) \leqslant 99x < u$.

Iz $y(10x + z) = u$ slijedi $100x + z = y(10x + z - 10) \leqslant 90x + 9z - 90$, odnosno $8z \geqslant 90 + 10x$, što je nemoguće.

Neka je $z(10y + x) = u$. Odavde je $10(10x + y - yz) = z(x - 1)$, pa $10|z(x - 1)$. Sad imamo tri mogućnosti: $x = 1$, $x = 6$ ili $z = 5$.

Za $x = 1$ dobivamo $y(z - 1) = 10$, pa je ili $y = 2$, $z = 6$ ili $y = 5$, $z = 3$.

Za $x = 6$ dobivamo $(2y + 1)(z - 1) = 119 = 7 \cdot 17$, pa je $y = 8$, $z = 8$.

Za $z = 5$ dobivamo $19x + 1 = 8y$, što znači da je x neparan i $x \leqslant 3$. No, ni za $x = 1$ ni za $x = 3$ broj $19x + 1$ nije djeljiv s 8.

Preostala je još jednadžba $y(10z + x) = u$. Ona je ekvivalentna s $999x + 10 = (10y - 1)(10z + x - 10)$. Faktoriziranjem brojeva $999x + 10$ za $x = 1, \ldots, 9$ vidimo da je jedino rješenje $x = 6$, $y = 8$, $z = 8$.

Dakle rješenja su brojevi 126, 153, 688.

1.7. a) Broj $9n^2 + 3n - 2$ nije djeljiv s 3, pa nije ni s 9.

b) Vrijedi: $9n^2 + 3n - 2 = 3n(3n + 1) - 2$. Brojevi $3n$ i $3n + 1$ uzastopni su cijeli brojevi, pa je jedan od njih paran.

c) Da bi broj $9n^2 + 3n - 2$ bio djeljiv s 4, broj $3n(3n + 1)$ ne smije biti djeljiv s 4, a to će biti ako je $n \equiv 2$ ili $3 \pmod 4$. Dakle, broj $9n^2 + 3n - 2$ djeljiv je s 4 ako i samo ako je n oblika: $n = 4k + 2$ ili $n = 4k + 3$, $k \in \mathbf{Z}$.

1.8.

$$\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}=\frac{x(x^2+3x+2)}{6}=\frac{x(x+1)(x+2)}{6}$$

Brojevi x, $x+1$, $x+2$ tri su uzastopna cijela broja, pa je među njima sigurno jedan djeljiv s 2 te jedan djeljiv s 3. Prema tome, njihov je produkt djeljiv sa 6, čime je tvrdnja dokazana.

1.9. Ako je n neparan, onda je

$$\begin{aligned}1^n+2^n+3^n+4^n &\equiv 1^n+2^n+(-2)^n+(-1)^n\\ &= 1^n+2^n-2^n-1^n=0 \pmod 5.\end{aligned}$$

Ako je $n=2k$, gdje je k neparan, onda je

$$\begin{aligned}1^n+2^n+3^n+4^n &\equiv 1^n+2^n+(-2)^n+(-1)^n\\ &= 2(1^{2k}+2^{2k})+2(1+4^k)\\ &\equiv 2(1+(-1)^k)=0 \pmod 5.\end{aligned}$$

1.10. Dovoljno je dokazati da je za svaki prirodan broj a broj a^5-a djeljiv s 10. Ovu tvrdnju dokazat ćemo indukcijom. Za $a=1$, broj $1^5-1=0$ djeljiv je s 10. Pretpostavimo da je $a^5-a=10k$, $k\in\mathbf{N}$. Tad je

$$\begin{aligned}(a+1)^5-(a+1)&=a^5+5a^4+10a^2+10a^2+5a+1-a-1=\\ &=10k+10a^2(a+1)+5a(a+1)(a^2-a+1),\end{aligned}$$

što je djeljivo s 10, jer je broj $a(a+1)$ paran.

1.11. Neka su traženi brojevi x i y. Tad je $x=\frac{2160}{a}$ i $y=\frac{2160}{b}$, gdje su a i b relativno prosti prirodni brojevi takvi da je $ab=90$. Prema tome, $(a,b)\in\{(90,1)$, $(45,2)$, $(18,5)$, $(10,9)$, $(9,10)$, $(5,18)$, $(2,45)$, $(1,90)\}$ pa je $(x,y)\in\{(24,2160)$, $(48,1080)$, $(120,432)$, $(216,240)$, $(240,216)$, $(432,120)$, $(1080,48)$, $(2160,24)\}$.

1.12. Neka je $a_n=1+2+2^2+\ldots+2^{5n-1}=2^{5n}-1$ te neka je d tražena najveća zajednička mjera. Iz $a_1=31$ slijedi da $d\mid 31$. Budući da je $2^5-1\mid 2^{5n}-1$, za svako $n\in\mathbf{N}$ slijedi da $31\mid d$. Prema tome, $d=31$.

1.13. Neka je $d_n=M(2n^2+3,n^2+n+1)$. Tad d_n dijeli broj

$$2(n^2+n+1)-(2n^2+3)=2n-1.$$

Nadalje d_n dijeli i broj

$$n(2n^2+3)-2(n-1)(n^2+n+1)=3n+2.$$

Konačno, d_n dijeli broj

$$2(3n+2)-3(2n-1)=7.$$

Dakle, $d_n = 1$ ili $d_n = 7$.

Sad treba vidjeti da je za beskonačno prirodnih brojeva n, $d_n = 1$. No, takvi su, na primjer, svi brojevi oblika $n = 7k$, jer za njih očito $2n^2+3$ nije djeljivo sa 7.

1.14. Neka je $d_n = M(n^2+1, (n+1)^2+1)$. Tad d_n dijeli broj

$$[(n+1)^2+1]-(n^2+1)=2n+1,$$

te broj

$$n(2n+1)-2(n^2+1)=n-2.$$

Prema tome, d_n dijeli broj

$$(2n+1)-2(n-2)=5,$$

pa je $d_n \in \{1, 5\}$.

Ako broj n daje ostatke 0, 1, 2, 3, 4 pri dijeljenju s 5, onda broj n^2+1 daje redom ostatke 1, 2, 0, 0, 2. Prema tome, brojevi n^2+1 i $(n+1)^2+1$ istovremeno su djeljivi s 5 ako i samo ako je $n \equiv 2 \pmod 5$.

1.15. Neka je $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Tad je

$$n_1 n_k = n_2 n_{k-1} = \ldots = n_k n_1 = n.$$

Množenjem ovih jednakosti slijedi

$$(n_1 n_2 \ldots n_k)^2 = n^k.$$

Odavde logaritmiranjem dobivamo traženu relaciju.

1.16. Uočimo najprije da n nije potpun kvadrat, jer kvadrat cijelog broja pri dijeljenju s 4 daje ostatak 0 ili 1. Zato se svi prirodni djeljitelji broja n mogu grupirati u parove

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k),$$

tako da je $a_\nu \cdot b_\nu = n, a_\nu < \sqrt{n}$, za $\nu = 1, \ldots, k$. Prema tome, dovoljno je dokazati da je za svaki $\nu = 1, \ldots, k$ broj $a_\nu + b_\nu$ djeljiv s 24. Imamo:

$$a_\nu + b_\nu = a_\nu + \frac{n}{a_\nu} = \frac{a_\nu^2 + n}{a_\nu} = \frac{n+1+(a_\nu-1)(a_\nu+1)}{a_\nu}.$$

Po pretpostavci je $n+1$ djeljiv s 24, što znači da a_ν nije djeljiv ni s 2 ni s 3. Dakle, dovoljno je dokazati da je $(a_\nu-1)(a_\nu+1)$ djeljivo s 24. No, jer a_ν nije djeljiv s 3, jedan od brojeva $a_\nu - 1$, $a_\nu + 1$ mora biti djeljiv s 3. Brojevi $a_\nu - 1$ i $a_\nu + 1$ dva su uzastopna parna broja. Zbog toga je jedan od njih djeljiv s 4, što znači da je njihov produkt djeljiv s 8.

Prema tome, broj $(a_v - 1)(a_v + 1)$ djeljiv je s 3 i s 8, pa je djeljiv i s 24, što je i trebalo dokazati.

1.17.

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

Za $n \geqslant 2$ je $n^2 + 2n + 2 > 1$ i $n^2 - 2n + 2 > 1$, pa je broj $n^4 + 4$ uvijek složen.

1.18. Pretpostavimo da su a i b cijeli brojevi takvi da vrijedi:

$$a^3 - 3a^2b - 9ab^2 - b^3 + 6 = 0.$$

Odavde slijedi da je $(a-b)^3 = 2(6ab^2 - 3)$. Desna je strana gornje jednakosti parna, pa je zato i broj $a - b$ paran. No, to znači da je lijeva strana jednakosti djeljiva s 8, što desna očito nije, pa smo dobili kontradikciju.

1.19. Iz $2c^2 \leqslant 33$ slijedi da je $0 \leqslant |c| \leqslant 4$, pa iz činjenice da je c djeljiv s 3 zaključujemo da je ili $c = 0$ ili $|c| = 3$. Međutim, $|c| = 3$ povlači da je $3(a-3)^2 + 33b^2 = 15$, odakle je $b = 0$, te $(a-3)^2 = 5$, što je očito nemoguće. Dakle, $c = 0$.

Sada imamo:

$$(a-3)^2 + 2b^2 = 11.$$

Iz $2b^2 \leqslant 11$ slijedi da je $0 \leqslant |b| \leqslant 2$. Za $b = 0$ i $|b| = 2$ dobivamo jednadžbe $(a-3)^2 = 11$ odnosno $(a-3)^2 = 3$, koje nemaju cjelobrojnih rješenja. Za $|b| = 1$ dobivamo da je $(a-3)^2 = 9$, pa je $a = 6$ ili $a = 0$. Dakle, rješenja su trojke $(6, 1, 0)$, $(6, -1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$.

1.20. Broj y mora biti neparan, a kvadrat neparnog broja

$$(2z+1)^2 = 4z^2 + 4z + 1 = 8 \cdot \frac{z(z+1)}{2} + 1$$

daje ostatak 1 pri dijeljenju s 8. Prema tome, broj $2x^2$ daje ostatak 4 pri dijeljenju s 8. Odavde slijedi da je x^2 djeljiv s 2, a nije djeljiv s 4, što je nemoguće.

1.21. Budući da je desna strana jednadžbe neparan broj, zaključujemo da je točno jedan od brojeva x, y jednak 1. Neka je $x = 1$. Tad je $y! = 10z + 8$. Kako broj $10z + 8$ nije djeljiv s 5, mora biti $y \geqslant 4$. Sad se lako može provjeriti da niti jedan od brojeva $y = 2, 3, 4$ nije rješenje dane jednadžbe.

1.22. Dani razlomak možemo zapisati ovako:

$$\frac{n^2 - n - 12}{n - 3} = n + 2 - \frac{6}{n - 3}.$$

Prema tome, dani je izraz cijeli broj za $n - 3 \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$, odnosno $n \in \{4, 2, 5, 1, 6, 0, 9, -3\}$. Iz uvjeta da je

$$\frac{n^2 - n - 12}{n - 3} = \frac{(n - 4)(n + 3)}{n - 3}$$

pozitivan broj dobivamo da je $n \in \langle -3, 3\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle$. Dakle, traženi prirodni brojevi su 1, 2, 5, 6, 9.

1.23. Neka je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = m$. Tad je $m \in \{1, 2, 3\}$. Ako je $m = 3$, onda je očito $x = y = z = 1$.

Ako je $m = 2$, onda mora biti $x = 1$, jer je inače $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant 3 \cdot \frac{1}{2} < 2$.

Sad je $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, odnosno $(y - 1)(z - 1) = 1$, pa je $y = z = 2$.

Konačno, neka je $m = 1$. Tad je $x \in \{2, 3\}$, jer je inače $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant 3 \cdot \frac{1}{4} < 1$. Ako je $x = 2$, onda je $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Odavde je $(y - 2)(z - 2) = 4$, pa je ili $y = z = 4$ ili $y = 3$, $z = 6$. Ako je $x = 3$, onda iz $z \geqslant y \geqslant 3$ i $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ slijedi da je $y = z = 3$.

Dakle, rješenja su trojke $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 3, 3)$.

1.24. Matematičkom indukcijom dokazat ćemo da jednadžba

$$x^2 + y^2 = 5^k$$

ima rješenje u prirodnim brojevima za svaki prirodni broj k. Za $k = 1$ imamo: $2^2 + 1^2 = 5^1$. Pretpostavimo da je $5^k = x^2 + y^2$, $x, y \in \mathbf{N}$, $x > y$. Tad je

$$5^{k+1} = (x^2 + y^2)(2^2 + 1^2) = (x + 2y)^2 + (2x - y)^2.$$

Brojevi $x + 2y$ i $2x - y$ očito su prirodni.

1.25. Neka je $x^2 + y^2 = n$. Tad je $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2n$. Obrnuto, ako je $u^2 + v^2 = 2n$, onda je

$$\left(\frac{u + v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u - v}{2}\right)^2 = n.$$

Brojevi $\dfrac{u+v}{2}$ i $\dfrac{u-v}{2}$ cijeli su budući da iz $u^2+v^2=2u$ slijedi da su brojevi u i v ili oba parni ili oba neparni. Prema tome, pridruživanje $(x,y)\mapsto(x+y,x-y)$ bijekcija je kojom rješenjima prve jednadžbe pridružujemo rješenja druge.

1.26. a) Za $n\geqslant 2$ vrijedi:

$$3^n=(1+2)^n\geqslant 1+2n+4\cdot\binom{n}{2}\geqslant 1+2n+n^2=(n+1)^2,$$

pa je $\sqrt[n]{n+1}\leqslant\sqrt{3}$.

b) Iz $x^y=y^x$ slijedi da brojevi x i y imaju iste proste faktore. Dakle, $x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$, $y=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_n^{\beta_n}$ i vrijedi: $\alpha_1 y=\beta_1 x$, $\alpha_2 y=\beta_2 x$,..., $\alpha_n y=\beta_n x$.

Neka je $y>x$. Tad iz gornjih jednadžbi slijedi da je $\alpha_i<\beta_i$ za $i=1,\dots,n$, pa zaključujemo da x dijeli y. Neka je $y=kx$, $k\geqslant 2$. Uvrstimo li ovo u polaznu jednadžbu, dobivamo $x^{kx}=(kx)^x$, odnosno $x^{k-1}=k$. Sad zbog $k\geqslant 2$ mora biti $x\geqslant 2$. Ako je $k\geqslant 3$, onda iz a) slijedi:

$$x=\sqrt[k-1]{k}\leqslant\sqrt{3}<2.$$

Prema tome, $k=2$ i $x=2$.

Dakle, jedina rješenja jednadžbe $x^y=y^x$ koja zadovoljavaju uvjet $x\neq y$ jesu $x=2$, $y=4$ i $x=4$, $y=2$.

1.27. Iz $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=(\sqrt{2}-1)^n$ slijedi da je

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^n}=(\sqrt{2}+1)^n.$$

Odavde je

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Big[(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n\Big].$$

Iz binomnog poučka zaključujemo da je $(\sqrt{2}+1)^n=A+B\sqrt{2}$, gdje su A i B prirodni brojevi. Ako je n paran, onda je $(\sqrt{2}-1)^n=A-B\sqrt{2}$; a ako je n neparan, onda je $(\sqrt{2}-1)^n=B\sqrt{2}-A$. Prema tome, ako je n paran, onda je $\sqrt{x}=B\sqrt{2}$, odnosno $x=2B^2$; a ako je n neparan, onda je $\sqrt{x}=A$, odnosno $x=A^2$. U svakom slučaju x je prirodan broj.

1.28. Aritmetičku sredinu zadanih šest brojeva označimo s x. Tad je

$$P=(x-\frac{5}{2})(x-\frac{3}{2})(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})(x+\frac{5}{2}),$$
$$Q=(x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2}).$$

Nejednakost $P < Q^3$ ekvivalentna je s

$$\left(x^2 - \frac{25}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) < \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)^2,$$

odnosno s $x^2 > -\dfrac{7}{4}$, što je očito točno.

Nejednakost $(Q-1)^3 < P$ ekvivalentna je s

$$\left(x^2 - \frac{13}{4}\right)^3 < \left(x^2 - \frac{25}{4}\right)\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right),$$

odnosno s $x^4 - \dfrac{31}{2}x^2 + \dfrac{493}{16} > 0$.

No, iz $x \geqslant \dfrac{9}{2}$ slijedi da je $x^2 > 20$, pa je

$$x^4 - \frac{31}{2}x^2 + \frac{493}{16} = \frac{x^2}{2}(2x^2 - 31) + \frac{493}{16} > 0,$$

čime je dokazana i nejednakost $(Q-1)^3 < P$.

1.29. Neka je $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, te neka je $L_n = \alpha^n + \beta^n$. Tad je

$L_n = (\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}) - \alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}) = 3L_{n-1} - L_{n-2}$.

Budući da je $L_1 = 3$, $L_2 = 7$, iz $L_n = 3L_{n-1} - L_{n-2}$ slijedi da je L_n cijeli broj za sve $n \in \mathbf{N}$. No, jer je $\alpha > 0$ i $\beta > 0$, brojevi L_n su pozitivni, pa zato i prirodni brojevi za sve $n \in \mathbf{N}$.

1.30. Neka je $S_n = (3+2\sqrt{2})^n + (3-\sqrt{2})^n$, te $a = 3+2\sqrt{2}$, $b = 3-2\sqrt{2}$. Tad je

$$\begin{aligned} S_n &= a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1}+b^{n-1}) - ab(a^{n-2}+b^{n-2}) \\ &= 6S_{n-1} - S_{n-2}. \end{aligned}$$

Odavde, iz $S_1 = 6$, $S_2 = 34$, slijedi da je S_n cijeli broj za sve $n \in \mathbf{N}$.

Pogledajmo niz ostataka broja S_n pri dijeljenju s 5. Iz $S_1 \equiv 1 \pmod 5$, $S_2 \equiv 4 \pmod 5$ i $S_n \equiv S_{n-1} - S_{n-2} \pmod 5$ dobivamo da je taj niz:

$$1,\ 4,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 1,\ 4, \ldots .$$

Budući da se u ovom nizu ciklički ponavljaju brojevi 1, 4, 3, 4, 1, 2, zaključujemo da se u njemu ne pojavljuje broj 0, što znači da niti jedan S_n nije djeljiv s 5.

1.31. Neka je $x_n = (5+\sqrt{26})^n + (5-\sqrt{26})^n$. Tad je

$$x_n = 2\left[5^n + \binom{n}{2}5^{n-2}\cdot 26 + \binom{n}{4}5^{n-4}\cdot 26^2 + \ldots\right]$$

prirodan broj za sve $n \in \mathbf{N}$. Nadalje:

$$\begin{aligned}|(5+\sqrt{26})^n - x_n| &= (\sqrt{26}-5)^n = \frac{1}{(\sqrt{26}+5)^n}\\ &< \frac{1}{(5+5)^n} = 10^{-n},\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

1.32. Broj $(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p$ cijeli je broj jednak

$$2\left[2^p + \binom{p}{2}\cdot 2^{p-2}\cdot 5 + \binom{p}{4}\cdot 2^{p-4}\cdot 5^2 + \ldots + \binom{p}{p-1}\cdot 2\cdot 5^{\frac{p-1}{2}}\right].$$

Budući da je $(2-\sqrt{5})^p \in \langle -1, 0\rangle$, zaključujemo da je $[(2+\sqrt{5})^p] = (2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p$. Sad tvrdnja zadatka slijedi iz činjenice da je za $k = 1, 2, \ldots, p-1$ binomni koeficijent

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$$

djeljiv s p, budući da se prost broj p pojavljuje u brojniku, a ne pojavljuje u nazivniku.

1.33.

$$\begin{aligned}[][d^n x] - d[d^{n-1}x] &= [d^n([x] + x - [x])] - d[d^{n-1}([x] + x - [x])]\\ &= d^n[x] + [d^n(x-[x])] - d\cdot d^{n-1}[x] - d[d^{n-1}(x-[x])]\\ &= [d^n(x-[x])] - d[d^{n-1}(x-[x])].\end{aligned}$$

1.34. Iz zadane jednadžbe slijedi da je $|(x-1)^2 - x| < 1$, tj. $-1 < x^2 - 3x + 1 < 1$, pa mora biti $x \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$.

Ako je $x \in \langle 0, 1\rangle$, onda je $[(x-1)^2] = [x] = 0$, pa zadanu jednadžbu zadovoljavaju svi $x \in \langle 0, 1\rangle$.

Ako je $x \in \langle 2, 3\rangle$, onda ga možemo pisati kao $x = 2 + \alpha$, gdje je $\alpha \in [0, 1\rangle$. Jednadžba prelazi u $[\alpha^2 + 2a + 1] = 2$, tj. $2 \leqslant \alpha^2 + 2a + 1 < 3$. Rješavanjem ovog sustava nejednadžbi dobivamo da je $\alpha \in \langle -1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{2}] \cup [-1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{3}\rangle$, što uz uvjet $\alpha \in [0, 1\rangle$ daje $\alpha \in [-1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{3}\rangle$. Prema tome, $x \in [1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}\rangle$.

Dakle, rješenje je $x \in \langle 0, 1\rangle \cup [1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}\rangle$.

1.35. Pretpostavimo suprotno, tj. da je broj $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionalan. Tad je $a - \sqrt{2} = \sqrt{3}$, pa je $a^2 - 2\sqrt{2}a + 2 = 3$. Dakle, dobili smo da je broj $\sqrt{2} = \dfrac{a^2-1}{2a}$ racionalan, što je kontradikcija.

1.36. Kvadriranjem jednakosti $c\sqrt{5} = -a\sqrt{2} - b\sqrt{3}$ dobivamo $5c^2 = 2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6}$.

Budući da je broj $\sqrt{6}$ iracionalan, odavde slijedi da je $ab = 0$. Analogno iz činjenice da su brojevi $\sqrt{10}$ i $\sqrt{15}$ iracionalni dobivamo da je $ac = 0$ i $bc = 0$. Prema tome, $a = b = c = 0$ jedini su brojevi s traženim svojstvom.

1.37. Neka je $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5}$, $y = \sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5}$, te neka je $\alpha = \sqrt[3]{3}$.

Iz $\sqrt[5]{5} = y - \alpha$ slijedi:

$$5 = y^5 - 5y^4\alpha + 10y^3\alpha^2 - 10y^2\alpha^3 + 5y\alpha^4 - \alpha^5,$$

odnosno:

$$(y^5 - 30y^2 - 5) + \alpha(15y - 5y^4) + \alpha^2(10y^3 - 3) = 0.$$

Iz formule

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

slijedi da je y nultočka polinoma

$$P(y) = (y^5 - 30y^2 - 5)^3 + 3(15y - 5y^4)^3 + 9(10y^2 - 3)^3 \\ - 9(y^5 - 30y^2 - 5)(15y - 5y^4)(10y^3 - 3).$$

To je polinom 15. stupnja s vodećim koeficijentom jednakim 1. Iz $P(x - \sqrt{2}) = 0$ dobivamo $Q(x) + R(x)\sqrt{2} = 0$, gdje je $\partial Q = 15$, $\partial R \leqslant 14$ i vodeći koeficijent od Q jednak je 1. Prema tome, x je nultočka polinoma $Q^2(x) - 2R^2(x) = x^{30} + a_{29}x^{29} + \ldots + a_0$, s cjelobrojnim koeficijentima.

Pretpostavimo da je x racionalan. Tad je $x = \dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$. No, iz $\left(\dfrac{m^{30}}{n^{30}} + a_{29} \cdot \dfrac{m^{29}}{n^{29}} + \ldots + a_0\right) \cdot n^{29} = 0$ slijedi da je $n = 1$. Dakle, x bi morao biti prirodni broj. Međutim, iz $\dfrac{4}{3} < \sqrt{2} < \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{17}{12} < \sqrt[3]{3} < \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{5}{4} < \sqrt[5]{5} < \dfrac{3}{2}$ slijedi da je $4 < x < \dfrac{9}{2}$, pa x ne može biti prirodan broj.

1.38. Neka je $\sqrt[p]{n^p + p} = \dfrac{x}{y}$, gdje su x i y relativno prosti prirodni brojevi. Tad je $n^p + p = \dfrac{x^p}{y^p}$, pa mora biti $y = 1$. Kako je $n^p + p = x^p$, to mora biti $x > n$, tj. $x \geqslant n + 1$. No, sad je

$$x^p \geqslant (n + 1)^p = n^p + p \cdot n^{p-1} + \ldots + 1 > n^p + p,$$

te smo dobili kontradikciju.

1.39. Primijetimo da opisani postupak ne mijenja parnost sume svih brojeva napisanih na ploči. Zato je posljednji broj iste parnosti kao i suma svih brojeva od 1 do 1986, a broj

$$1 + 2 + \ldots + 1986 = \frac{1986 \cdot 1987}{2} = 993 \cdot 1987$$

neparan je.

1.40. Budući da je $M(1000, 15) = 5$, bit će precrtani točno oni brojevi koji pri djeljenju s 5 daju ostatak 1, dakle njih 200. Prema tome, neprecrtano će ostati 800 brojeva.

1.41. Skup $\{46, 47, \ldots, 90\}$ ima 45 elemenata i zadovoljava uvjete zadatka. Skup S smije sadržavati najviše jedan od brojeva k i $90 - k$ $(k = 1, 2, \ldots, 44)$, te ne smije sadržavati broj 45. Zato nijedan skup s više od 45 elemenata ne zadovoljava uvjete zadatka.

1.42. Pretpostavimo suprotno, tj. da je n neparan, te je zadani produkt neparan. Tad su brojevi $a_i - i$, za $i = 1, 2, \ldots, n$, neparni, pa je i njihova suma neparna kao suma neparnog broja neparnih brojeva. Međutim, ta je suma jednaka $(a_1 + \ldots + a_n) - (1 + \ldots + n) = 0$, pa smo dobili kontradikciju.

1.43. Podniz s traženim svojstvom definirat ćemo induktivno. Očito je $a_1 > 1$, pa možemo staviti $i_1 = 1$. Pretpostavimo da su $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ takvi da je $a_{i_k} > i_k$, za $k = 1, \ldots, n$. Tvrdimo da tad postoji $j > i_n$ takav da je $a_j > j$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $a_j \leqslant j$ za svaki $j > i_n$. Neka je $m = a_{i_n}$. Tad je

$$\{a_j : i_n < j \leqslant m\} \subseteq \{2, 3, \ldots, m\} \setminus \{a_k : k = 1, \ldots, i_n\}.$$

No, skup na lijevoj strani ima $m - i_n$ elemenata, dok skup na desnoj strani ima $m - 1 - i_n$ elemenata, pa smo dobili kontradikciju. Dakle, postoji $j > i_n$ takav da je $a_j > j$, pa možemo staviti $i_{n+1} = j$.

1.44. Označimo dani broj s x. Tad je $x = 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, pa je $x^2 = 2^{2n} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+1}(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^{n+1}(2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1) + 1 = 2^{2n-1} + 2^{2n-2} + \ldots + 2^{n+1} + 1.$

Dakle,

$$(\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ jedinica}})_2^2 = (\underbrace{11\ldots1}_{n-1 \text{ jedinica}}\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ nula}}1)_2.$$

1.45. Neka je $m = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2$, gdje su a, b, c, d prirodni brojevi. Tad je $m \cdot n = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

Ako broj mn nije Pitagorin, onda je $ad = bc$ i $ac = bd$. Odavde slijedi da je $a = b$ i $c = d$, pa je $mn = (2ac)^2$.

1.46. Promatrajmo funkciju $F : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ definiranu s $F(n) = \frac{D(n)}{n}$. Tad je $F(1) = 0$, $F(p) = \frac{1}{p}$ za sve proste brojeve p, te $F(uv) = F(u) + F(v)$. Treba naći sve one $n \in \mathbf{N}$ za koje je $F(n) = 1$. Ako je $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, onda je

$$F(n) = \alpha_1 F(p_1) + \ldots + \alpha_k F(p_k) = \frac{\alpha_1}{p_1} + \ldots + \frac{\alpha_k}{p_k}.$$

Iz relacije

$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \ldots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1$$

zaključujemo da je $0 < \alpha_i \leqslant p_i$, za $i = 1, \ldots, k$. Također za $i \in \{1, \ldots, k\}$ množeći gornju relaciju s $p_1 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_k$ dobivamo da je broj $\frac{\alpha_i}{p_i} p_1 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_k$ prirodan, što znači da $p_i \mid \alpha_i$, tj. da je $\alpha_i = p_i$. Odavde slijedi da je $k = 1$, tj. $n = p^p$ za neki prost broj p.