POGLAVLJE I

# Mudrost i čari igraćih kockica

**Igraće kockice... čine se tako jednostavnim stvarčicama, obične kocke s brojevima.
Stari narodi upotrebljavali su ih za kockanje i za proricanje volje bogova. Matematika igraćih kockica novijeg je datuma i dio je šireg shvaćanja da slučajnost ima svoje obrasce.
Ako znate kako ih pronaći.**

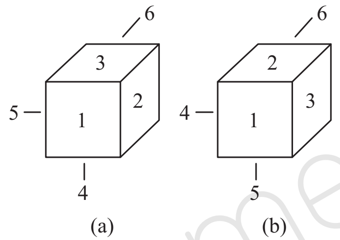
Igraće kockice su među najstarijim kockarskim rekvizitima. Rimski povjesničar Herodot tvrdio je da su kockice poznavali stanovnici drevne Lidije u vrijeme Kralja Atisa, ali Sofoklo se s time nije slagao, pripisujući njihov pronalazak Grku zvanom Palamed koji ih je navodno izumio u vrijeme opsade Troje. Sofoklo je mislio da su kockice izumljene kako bi skratile vrijeme vojnicima dok su čekali da se Trojanci predaju, no zasluga ipak pripada drugima. Kockice su primjerice pronađene u kineskim nalazištima koja potječu iz 600. godine pr. Kr. Arheolozi su ih otkrili i u egipatskim grobovima iz 2000. g. pr. Kr., s istom praktičnom svrhom kao i danas, a neki pronalasci potječu čak iz 6000. g. pr. Kr.

Kockice su, čini se, jedan od osnovnih oblika koji se pojavio neovisno, u mnogim različitim kulturama.

Oblik kockica nije svuda jedinstven. Isti rekvizit pojavljuje se u različitim oblicima i s mnogo čudnih oznaka. Koristili su ih sjevernoamerički Indijanci, južnoameričke kulture kao Azteci i Maye, zatim Polinežani, Inuiti i mnoga afrička plemena. Bile su napravljene od raznih materijala, od dabrovih zuba do porculana. Igra *Dungeons and Dragons* (Tamnice i zmajevi), primjerice, koristi kockice u obliku poliedara.

Kockice su jednostavne, ali njihove su mogućnosti gotovo neograničene.

Kako ovo poglavlje ne bi preraslo u cijelu knjigu, usredotočit ću se samo na uobičajen oblik moderne igraće kockice. Ona je, naravno, kockastog oblika, najčešće ima zaobljene bridove i vrhove, a strane su joj obilježene brojevima. Brojevi su prikazani točkicama (engl. *eyes, oči*). Broj točkica na stranama je 1, 2, 3, 4, 5 ili 6. Zbroj točkica na dvjema suprotnim stranama kockice uvijek je 7, pa postoje 3 para: 1 i 6, 2 i 5, 3 i 4. U odnosu na rotaciju kockice moguća su samo dva položaja (slika 1), s tim da je drugi položaj zrcalna slika prvog. Danas su gotovo sve kockice koje se proizvode na zapadu označene kao na slici 1.a), tako da brojevi 1, 2, 3 kruže u smjeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu u odnosu na njihov zajednički vrh. Rečeno mi je da se u Japanu kockice s ovom orijentacijom koriste u svim igrama, osim u *mah-jonggu*, gdje se koristi orijentacija brojeva kao na slici 1.b). Orijentalne kockice uglavnom imaju puno veću točkicu kao oznaku za broj 1, a neke točkice mogu biti crvene umjesto crne boje, ovisno o kulturi.




**Slika 1.** *Dva različita načina označavanja kockice*

Kockice se uglavnom bacaju u paru i pritom je osnovni podatak vjerojatnost da se dobije unaprijed zadani ukupan broj točkica. Da bismo izračunali tu vjerojatnost – podrazumijevajući pritom da su kockice ispravne, tj. da svaka strana ima vjerojatnost okretanja jednaku 1/ 6 – ispitat ćemo na koliko je načina moguće postići zadani zbroj. Dobiveni rezultat podijelit ćemo s 36, tj. s ukupnim brojem parova, vodeći pritom računa o tome koja je koja kockica. Možemo si pomoći zamislimo li da je jedna kockica crvene, a druga plave boje. Tada zbroj 12, može pasti samo na jedan način: crvena kockica $= 6$ i plava kockica $= 6$. Vjerojatnost da padne 12 stoga je $1/36$. S druge strane, zbroj 11 može pasti na dva načina: crvena kockica $= 6$, plava kockica $= 5$ *ili* crvena kockica $= 5$, plava kockica $= 6$. Dakle, vjerojatnost je $2/36 = 1/18$.

Ovo se čini očiglednim, no kockice se obično međusobno ne razlikuju, tj. bilo bi neobično obojiti ih. Tako je primjerice slavni mislilac i veliki matematičar i filozof Gottfried Leibniz mislio da je vjerojatnost da se dobije 11 jednaka vjerojatnosti da padne 12. Objašnjavao je kako postoji samo jedan način da padne 11: jedna kockica $= 6$, a druga kockica $= 5$. No, s ovakvim načinom razmišljanja postoji nekoliko problema. Možda je najznačajniji taj što se ovaj rezultat ne slaže s eksperimentom koji pokazuje da se zbroj 11 pojavljuje dvaput češće nego 12. Drugo, to nas navodi na zaključak da je vjerojatnost bacanja *nekog* zbroja (koliko god to bilo) manja od 1. Ili, ako vam se ne sviđa ovo tumačenje, to bi značilo da je vjerojatnost da padne 12 veća od 1/ 36.

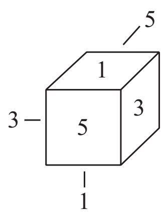
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/36 | 1 1 | | | | | |
| 2/36 | 1 2 | 2 1 | | | | |
| 3/36 | 1 3 | 2 2 | 3 1 | | | |
| 4/36 | 1 4 | 2 3 | 3 2 | 4 1 | | |
| 5/36 | 1 5 | 2 4 | 3 3 | 4 2 | 5 1 | |
| 6/36 | 1 6 | 2 5 | 3 4 | 4 3 | 5 2 | 6 1 |
| 5/36 | 2 6 | 3 5 | 4 4 | 5 3 | 6 2 | |
| 4/36 | 3 6 | 4 5 | 5 4 | 6 3 | | |
| 3/36 | 4 6 | 5 5 | 6 4 | | | |
| 2/36 | 5 6 | 6 5 | | | | |
| 1/36 | 6 6 | | | | | |

**Slika 2.** *Vjerojatnosti za bacanje dviju kockica*

Slika 2 pokazuje vjerojatnosti za sve zbrojeve od 2 do 12. Jedna od igara u kojima je intuitivni osjećaj za ove vjerojatnosti presudan zove se *craps* i potječe iz 1890-ih. U ovoj igri jedan od igrača, bacač (engl. *shooter*), ulaže određenu svotu novca. Drugi igrači se klade do tog iznosa, tj. svaki igrač ulaže iznos po svom izboru, te ako je zbroj njihovih uloga manji od bacačeva uloga, onda bacač smanjuje svoj ulog tako da on odgovara zbroju. Zatim bacač baca kockice. Ishod 7 ili 11 (engl. *natural*) u prvom bacanju bacaču odmah donosi pobjedu, a ishod 2 (engl. *snake eyes*), 3 ili 12 (engl. *craps*) odmah gubi. Inače, bacačev početni ishod, tj. jedan od brojeva 4, 5, 6, 8, 9 i 10, postaje njegov "bod". On nastavlja bacati, uvijek s ciljem da osvoji bod prije nego baci 7 (engl. *craps out*). Uspije li, osvaja sav novac, a ne uspije li – gubi.

S pomoću slike 2 i nekoliko dodatnih razmatranja može se izračunati da je vjerojatnost bacačeve pobjede $244/495$, odnosno približno $49,3\ \%$. To je *malo* manje nego "pola-pola", tj. od $50\ \%$. Profesionalni kockari ovu nepogodnost mogu pretvoriti u prednost na dva načina. Jedan je da prihvate ili odbiju razne dodatne oklade s drugim igračima, koristeći se svojim većim znanjem o vjerojatnostima ishoda. Drugi način je da varaju i, koristeći se spretnošću svojih ruku, u igru podmetnu namještene kockice.

Kockice se mogu namiještati na nekoliko načina. Neke strane kockica mogu biti neprimjetno izbrušene, tako da nisu pod pravim kutom, ili mogu biti "podebljane", tj. otežane. Obje ove tehnike čine pojedine ishode bacanja vjerojatnijima od ostalih. Još gore, standardne kockice mogu se zamijeniti "lažnjacima": kockicama koje dolaze u nekoliko izvedbi. Primjerice, kockica može biti numerirana sa samo tri određena broja, tako da su na suprotnim stranama isti brojevi. Slika 3 pokazuje primjer kockice na kojoj su označeni samo brojevi 1, 3 i 5. Kako svaki igrač vidi najviše 3 strane u danom trenutku i kako ne postoje dvije susjedne strane s istim brojem točkica, na prvi pogled se čini da je sve u redu. Međutim, tada nije moguće postići to da brojevi oko svih vrhova kruže na ispravan način. Zaista, ako brojevi 1, 3 i 5 kruže u smjeru suprotnom od smjera kazaljki na satu oko jednog vrha, kako pokazuje slika 3, onda oko drugog vrha moraju kružiti u smjeru kazaljki na satu, tako da pažljiv igrač može otkriti prijevaru.




**Slika 3.** *"Lažnjak" – kako varati*

"Lažnjaci" se mogu upotrijebiti u *crapsu* na nekoliko načina. Par 135-kockica nikad ne može dati zbroj 7 pa igrač nikad ne može postići *craps out*. Kombinacija jedne 135-kockice i jedne 246-kockice ne može dati paran zbroj, pa s njima igrač nikada ne može osvojiti bod za zbrojeve 4, 6, 8 ili 10. Par takvih kockica ne smije se dugo koristiti u igri ako ne želite da ih se otkrije – čak i najnaivniji igrači s vremenom će se početi čuditi što stalno padaju neparni ishodi. Zbog toga se namještene kockice obično brzo ubacuju i izbacuju te na taj način barem malo okreću ishode prema željenom smjeru. Također, postoje "jednosmjerni lažnjaci" – kockice na kojima se jedan broj pojavljuje dvaput.

Stoga je trenutno prepoznavanje pravilnog rasporeda točkica na kockicama bitno za profesionalne kockare, jer može im pomoći u otkrivanju lažnih kockica.

Kockice se često koriste u mađioničarskim i raznim zabavnim trikovima. Mnogi trikovi temelje se na pravilu da je zbroj točkica na suprotnim stranama 7. Jedan od takvih trikova opisan je u knjizi Martina Gardnera *Mathematical Magic Show*. Mađioničar se okrene leđima, a nekog iz publike zamoli da baci tri igraće kockice te da zbroji brojeve koji su pali. Zatim kaže žrtvi da podigne bilo koju od tri kockice i zbroju doda broj s njezine donje strane. Konačno, žrtva ponovno baca odabranu kockicu te dobiveni broj dodaje prethodnom zbroju. Tada se mađioničar okreće i odmah kaže o kojem je zbroju riječ, premda nema pojma koja je kockica bila podignuta.

Kako je to moguće? Pretpostavimo da su pali brojevi $a$, $b$ i $c$ te da je odabrana, primjerice, kockica $a$. Početni zbroj je $a+b+c$. Na to se dodaje $7-a$, što daje zbroj $b+c+7$. Zatim se ponovno baca odabrana kockica, pada broj $d$ i konačni zbroj je $d+b+c+7$. Mađioničar tada pogleda u sve tri kockice, za koje zbroj iznosi $d+b+c$, dakle, sve što treba jest brzo zbrojiti pojedine ishode i tome dodati 7.

Henry Ernest Dudney, veliki engleski enigmatičar u svojoj knjizi *Amusements in Mathematics* opisuje trik druge vrste. I ovdje mađioničar traži da se bace tri kockice, dok je on okrenut leđima. Ovaj put žrtva treba udvostručiti vrijednost prve kockice i dodati 5, zatim rezultat pomnožiti s 5 i dodati vrijednost sljedeće kockice, te dobiveni rezultat pomnožiti s 10 i dodati vrijednost treće kockice. Čim žrtva kaže rezultat, mađioničar odmah pogađa koji su brojevi pali. Rezultat je, naravno, $10(5(2a+5)+b)+c$ ili $100a+10b+c+250$. Stoga mađioničar od rezultata oduzima 250 i dobiva troznamenkasti broj čije znamenke predstavljaju brojeve na kockicama.

Igre kockicama ne moraju uključivati element slučajnosti. Jedna od takvih igara započinje tako da jedan od igrača odabere cilj, primjerice broj 40. Drugi igrač stavlja jednu kockicu na stol tako da na vrh okreće neki, po volji izabrani broj – recimo 3. S ovom vrijednošću započinje tekući zbroj. Sljedeći igrač zaokreće kockicu za četvrtinu kruga, što u našem slučaju može biti broj 1, 2, 5 ili 6. Broj koji se okrene pribraja se tekućem zbroju. Okrene li igrač kockicu, primjerice, na broj 2, tekući zbroj postaje $3 + 2 = 5$. Igrači naizmjenično okreću kockicu za četvrtinu kruga u smjeru u kojem žele, pribrajaju ishode i tekući zbroj raste. Prvi igrač koji premaši cilj, gubi.

Za analizu ovakvih igara postoji sistematična metoda, detaljno objašnjena u mojoj knjizi *Another fine Math You've Got Me Into*. Ideja je da se stanja u igri svrstaju u dvije klase: "pobjedničko" i "gubitno" te da se tijek igre promatra unatrag, dakle od kraja, koristeći se pritom dvama načelima:

- ako *svaki* potez iz trenutnog stanja vodi do pobjede drugog igrača, onda je trenutno stanje gubitno
- ako *neki* potez iz trenutnog stanja vodi do poraza drugog igrača, onda je trenutno stanje pobjedničko.

Primjerice, ako je tekući zbroj 39 i broj 1 vaš najbolji mogući potez, onda sljedeći igrač nema izbora – morat će prekoračiti 40, pa je vaše trenutno stanje pobjedničko. Da biste zaista i pobijedili, morate povući taj potez.

Za izračun je najbolje promatrati razliku između tekućeg zbroja i cilja – tj. "efektivni cilj" od trenutnog stanja nadalje. U gornjem primjeru, efektivni cilj je $40 - 39 = 1$ i svaki potez sljedećeg igrača će ga premašiti. S druge strane, ako je najbolji mogući potez 2, a efektivni cilj 1, onda sljedeći igrač može okrenuti kockicu na broj 1 i pobijediti.

Donja tablica prikazuje status različitih stanja u igri za efektivne ciljeve od 0 do 25. Najbolji mogući potez nalazi se u svakom retku s lijeve strane, a efektivni cilj prikazan je na vrhu svakog stupca. U svakom od preostalih polja tablice nalazi se ili slovo 'L' koje označava da je stanje gubitno ili popis dobitnih poteza koji vode do pobjede. Uočite da stanja 1 i 6 vode do 4 ista dobitna poteza: 2, 3, 4, 5. Isto vrijedi za stanje $2/5$ i $3/4$ pa tablica ima samo tri retka.

| status efektivnog cilja | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 ili 6 | L | 2 | 3 | 4 | 5 | 3 | 234 |
| 2 ili 5 | 1 | 1 | 3 | 4 | L | 36 | 346 |
| 3 ili 4 | 1 | 12 | L | L | 5 | 6 | 26 |

| status efektivnog cilja | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 ili 6 | 4 | L | 5 | 23 | 34 | 4 | 5 | 3 | 234 |
| 2 ili 5 | 4 | L | 1 | 3 | 34 | 4 | L | 36 | 34 |
| 3 ili 4 | L | L | 15 | 2 | L | L | 5 | 6 | 2 |

| status efektivnog cilja | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 ili 6 | 4 | L | 5 | 23 | 34 | 4 | 5 | 3 | 234 |
| 2 ili 5 | 4 | L | 1 | 3 | 34 | 4 | L | 36 | 34 |
| 3 ili 4 | L | L | 15 | 2 | L | L | 5 | 6 | 2 |

Izložio sam ove tablice kako bih istaknuo glavnu osobinu: stupci 17–25 isti su kao i stupci 8–16. Kad se jednom utvrdi ovaj obrazac, on se beskonačno ponavlja, tako da su primjerice stupci 26–34, 35–43, 44–52 itd., isti kao stupci 8–16. Svakim potezom se efektivni cilj umanji najviše za 6 pa podatci u pojedinom stupcu ovise samo o podatcima iz prethodnih šest stupaca s lijeve strane. Dakle, čim se u nekom bloku od 6 ili više uzastopnih stupaca pojave podatci jednaki onima iz prethodnog bloka, obrazac se ponavlja beskonačno puta.

Ovakva ponavljanja očekivana su u svim igrama ovakve vrste jer postoji samo konačan broj mogućih stupaca. No, imamo sreću što se ponavljajući blokovi pojavljuju brzo i što su kratki. To nas vodi do cijelog recepta za pobjedničku strategiju, koji je daleko od intuitivnog. Uzmite izabrani cilj i oduzimajte broj 9 uzastopno, sve dok ne dođete do broja između 0 i 16. Tada pogledajte u odgovarajući stupac kako biste vidjeli ima li stanje status pobjede ili gubitka te, ako je pobjeda, odigrajte jedan od preporučenih pobjedničkih poteza.

Pretpostavimo, primjerice, da je cilj 1000. Oduzimajući 9 više puta, dolazimo najprije do broja 19 (koji je još uvijek veći od 16) te konačno do broja 10, gdje stajemo. Stupac ispod 10 kaže nam da uvijek možemo napraviti pobjednički potez. Ako je stanje $1/6$, onda okrećemo kockicu na 5, ako je stanje $2/5$, okrećemo je na 1, ako je stanje $3/4$ pomaknemo je na 3 ili 5. Ponavljajući ovaj postupak, na koncu morate pobijediti.

Ako nemate sreće i početni položaj je gubitnički, morate se nadati da vaši protivnici ne znaju strategiju. Napravite bilo koji potez, čekajte da oni povuku svoje poteze i ponovite izračun. Uskoro biste trebali pogoditi dobitnu kombinaciju, osim ako se ne dogodi čudo pa preuzmete potpunu kontrolu nad igrom. Uz skroman junački trud, cijelu tablicu možete zapamtiti. Ili je možete pojednostavniti, pamteći samo jedan od pobjedničkih poteza za svako stanje, umjesto cijelog popisa. Napravite li to mudro, zapravo možete ignorirati sve stupce nakon jedanaestog, i tako svesti ono što treba zapamtiti na razmnu količinu.

Neki problemi s igraćim kockama odnose se na modificirane kockice s neuobičajenom numeracijom. Primjerice: možete li označiti dvije kockice brojevima 0, 1, 2, 3, 4, 5 ili 6 tako da dobijete par kockica za koji bi svaki zbroj od 1 do 12 bio jednako moguć? (Odgovor potražite na kraju poglavlja.) Možda je najmanje logično svojstvo kockica vezano uz “netranzitivne kockice”. Napravite tri kockice A, B i C tako da budu označene kako slijedi:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A: | 3 | 3 | 4 | 4 | 8 | 8 |
| B: | 1 | 1 | 5 | 5 | 9 | 9 |
| C: | 2 | 2 | 6 | 6 | 7 | 7 |

Nakon više bacanja, B pobjeđuje A. Zapravo na kockici B past će veći broj nego na A s vjerojatnošću $5/9$. Slično, C pobjeđuje B s vjerojatnošću $5/9$. Znači, očigledno će kockica C pobijediti A, zar ne? Ne, zapravo A pobjeđuje C s vjerojatnošću $5/9$.

Sljedeća tablica potvrđuje ove tvrdnje: pokazuje pobjednika za svaku kombinaciju brojeva. Ako, primjerice, B igra sa C, pogledajte drugu tablicu. Pretpostavimo da je na B pao broj 5, a na C 6. Tada C ima veći ishod bacanja, pa pobjeđuje. Stoga se u stupcu pod brojem 5 i retku pod brojem 6 nalazi slovo C.

| | A | 3 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| B | | | | |
| 1 | | A | A | A |
| 5 | | B | B | A |
| 9 | | B | B | B |

| | B | 1 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| C | | | | |
| 2 | | C | B | B |
| 6 | | C | C | B |
| 7 | | C | C | B |

| | C | 2 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| A | | | | |
| 3 | | A | C | C |
| 4 | | A | C | C |
| 8 | | A | A | A |

Prva tablica sadrži 5 slova B i 4 slova A, pa B pobjeđuje A s vjerojatnošću $5/9$.

S kompletom ovakvih kockica možete se obogatiti! Neka vaš protivnik odabere jednu kockicu, a tada vi između preostale dvije odaberite onu koja je pobjeđuje (u puno bacanja, kada je vjerojatnost pobjede veća od $50\,\%$). Ponavljajte. Pobijedit ćete u $55,55\,\%$ slučajeva, iako je vaš protivnik svoju kockicu odabrao prvi i sasvim slobodno, po svojoj volji.

Ipak, malo upozorenje: nemojte se previše oslanjati na teoriju vjerojatnosti ako pravila igre niste definirali jako precizno. U svojoj prekrasnoj maloj knjizi *The Broken Dice*, Ivar Ekeland priča priču o dvojici nordijskih kraljeva koji su bacali kockice kako bi odlučili o sudbini otoka za koji su se borili. Švedski kralj bacio je dvije kockice i dobio duplu šesticu. Hvalio se tim rezultatom kao nepobjedivim i govorio da se norveški kralj, Olaf, može odmah predati. Olaf je promrmljao da i on može dobiti duplu šesticu bacivši svoje dvije kockice. Jedna se okrenula na 6, a druga se raspuknula na dva dijela, pokazujući 6 na jednom i 1 na drugom dijelu. Ukupno: 13! Sve nam to pokazuje da ono što mislite da je moguće, ovisi o tome kako postavite problem.

Ako je priča istinita, kralj Olaf bio je iznimno sretne ruke. A neki cinici misle kako je Olaf smislio prijevaru i lažirao cijeli slučaj.

## Reakcija čitatelja

Mnogi čitatelji pisali su mi o svojim vlastitim varijacijama netranzitivnih kockica, u komentarima članka objavljenog u studenom 1997. Moje kockice imaju brojeve kako slijedi (svaki se pojavljuje dvaput): A(3,4,8); B(1,5,9); C(2,6,7). Tada kockica B pobjeđuje A s vjerojatnošću $5/9$, C pobjeđuje B s vjerojatnošću $5/9$ i A pobjeđuje C s vjerojatnošću $5/9$. George Trepal iz Gehringa, Florida pokazao nam je da ti brojevi, složeni na pravi način, tvore magični kvadrat – kvadratnu tablicu u kojoj je zbroj brojeva u svakom retku, stupcu i na objema dijagonalama uvijek isti. Magični kvadrat glasi:

$$\begin{array}{ccc} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{array}$$

Pored toga, ovdje se pojavljuje neobična "dualnost". Ako se za označavanje triju kockica upotrijebe redci umjesto stupaca ovog kvadrata: A(8,1,6); B(3,5,8); C(4,9,2) (uz napomenu da se i ovdje svaki broj na kockici pojavljuje dvaput ako želite šesterostranu kockicu, a ne neku neobičnu trostranu), rezultirajući komplet kockica opet je netranzitivan: A pobjeđuje B s vjerojatnošču $5/9$, B pobjeđuje C s vjerojatnošću $5/9$ i C pobjeđuje A s vjerojatnošću $5/9$.

Pogledamo li magični kvadrat oblika:

$$\begin{array}{ccc} 8 & 1 & 9 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 11 & 4 \end{array}$$

rezultat je još zanimljiviji i drukčiji. Uz označavanje prema redcima: A pobjeđuje B s vjerojatnošću $6/9$, B pobjeđuje C s vjerojatnošću $6/9$, a C pobjeđuje A s vjerojatnošću $5/9$. Označimo li pak kockice prema stupcima magičnog kvadrata, B pobjeđuje A s vjerojatnošću $5/9$, C pobjeđuje B s vjerojatnošću $5/9$ i A pobjeđuje C s vjerojatnošću $5/9$.

Trepalov komplet, označen najmanjim mogućim brojevima, koji slijedi obrazac $6/9$, $6/9$, $5/9$ glasi: A(1,4,4); B(3,3,3); C(2,2,5). Zalman Usiskin sa Sveučilišta u Chicagu postavio je i odgovorio na prirodno pitanje: može li se ostvariti prednost veća od $5/9$? Preciznije, imamo li tri netranzitivne šesterostrane *namještene* kockice, kolika je najveća moguća vjerojatnost $p$ za koju sva tri para kockica omogućuju pobjedu s vjerojatnošću većom ili jednakom $p$? Pod namještanjem podrazumijevam da se strane kockica ne okreću s istom vjerojatnošću. U odgovoru će se pojaviti slavni broj – zlatni broj

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

– na kockici A broj 4 past će s vjerojatnošću $\phi - 1$, a broj 1 s vjerojatnošću $2 - \phi$

– kockica B uvijek se okrene na 3

– na kockici C broj 2 će se okrenuti s vjerojatnošću $\phi - 1$, a 5 s vjerojatnošću $2 - \phi$.

Tada A pobjeđuje B, B pobjeđuje C, C pobjeđuje A – sve s vjerojatnošću $\phi - 1$ što je približno 0,618. To je znatno više od $5/9 = 0,555$ i to je najveća prednost koja se može dobiti.

Podmetnute kockice mogu se s velikom preciznošću zamijeniti poštenim igraćim kockicama, ali tada one moraju biti u obliku poliedra s puno strana tako da se svaki broj pojavljuje i po nekoliko puta. Koristeći se pravilnim ikosaedrima s 20 strana možemo postići da vjerojatnost pobjede iznosi $16/25 = 0,64$ tako da kockice označimo kako slijedi:

– A ima brojku 4 na 12 stranica i brojku 1 na 8 stranica

– B ima brojku 3 na svih 20 stranica

– C ima brojku 2 na 12 stranica i brojku 5 na 8 stranica.

## Odgovor

**Da bi pri** bacanju dviju kockica zbrojevi od 1 do 12 bili jednako vjerojatni, jedna kockica mora biti označena brojkama 1, 2, 3, 4, 5, 6, a druga brojkama 0, 0, 0, 6, 6, 6.

# Internetske stranice

Općenito:

http://en.wikipedia.org/Dice
Http://mathworld.wolfram.com/dice.html

O netranzitivnim kockicama:

http://en.wikipedia.org/nontransitive_dice

Povijest:

http://hometown.aol.com/dicetalk/polymor2.html

O namještanju kockica:

http://homepage.ntlworld.com/dice-play