1.

Pojam grafa

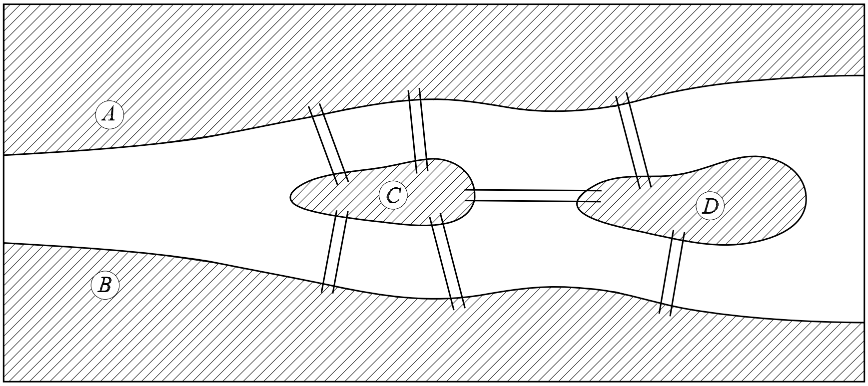
1.1. Motivacija

Do sada smo u diskretnoj matematici prvenstveno učili prebrajati konačne skupove i njihove razne podskupove, rabeći pritom ili direktne tehnike prebrajanja (produktno pravilo, formula uključivanja i isključivanja), ili razvijajući druge matematičke alate (funkcije izvodnice, rekurzivne relacije) za tu svrhu. Većina postavljenih problema elementarne, enumerativne kombinatorike odgovarala je na pitanje *koliko* pojedinih objekata ima (preciznije, *koliki* je kardinalitet odgovarajućih podskupova zadanoga skupa), ili *na koliko se načina* nešto može načiniti (konstruirati, složiti, obaviti). Sljedeći korak u proučavanju konačnih objekata je da više ne promatramo samo skupove ili njihove podskupove kao temeljnu strukturu s kojom radimo, nego da promatramo složenije kombinatoričke strukture i njihova svojstva, te da pomoću njih često uspijemo odgovoriti i na pitanja *kako* nešto učiniti. Najjednostavnija i najčešće primjenjivana kombinatorička struktura je *graf*, pri čemu upravo jednostavnost te strukture omogućuje da puno praktičnih problema lagano možemo prevesti, *izmodelirati* u terminima grafova, a tada na dotične grafove primijeniti poznate dokazane teoretske spoznaje, algoritme i apstraktne ideje.

Za razliku od mnogih drugih dijelova matematike, za teoriju grafova se točno može reći kada je zasnovana. U svome članku iz 1736. godine

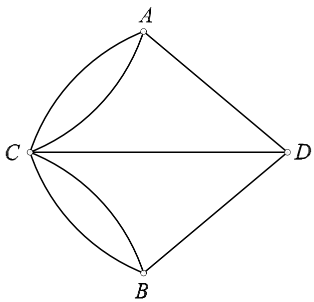
L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis
(Rješenje jednog problema u svezi s geometrijom položaja),
Comm. Acad. Sci. Imp. Petropolitanae 8 (1736), 128–140.

švicarski matematičar Leonhard Euler (1707. – 1783.) obradio je i riješio jedan čuveni stari problem. Pruski grad Königsberg (danas Kalinjingrad, Rusija) leži na rijeci Pregel, koja grad dijeli na četiri teritorija, dva otoka i dva obalna dijela, a koji su u 18. stoljeću bili povezani sa sedam mostova kao na slici.



Pitanje je može li se iz nekog dijela grada Königsberga krenuti u šetnju tako da se svakim mostom prijeđe točno jednom. Evo odmah i neposrednog odgovora. Ako lijeva obala rijeke Pregel (teritorij označen na slici slovom A) nije niti početak niti kraj naše šetnje, onda nam za svaki dolazak na teritorij A i odlazak s njega trebaju dva različita mosta. No, kako je teritorij A spojen s ostalim dijelovima grada trima mostovima, takva je šetnja nemoguća. Dakle, teritorij A morao bi biti početak ili kraj šetnje. Međutim, analogno razmatranje možemo provesti i za preostala tri dijela Königsberga, B, C i D, iz čega proizlazi da bismo u svakom od tih dijelova morali ili početi ili završiti našu šetnju, što je dakako nemoguće.

Vjerujemo da svatko uočava da je prirodni model (skica lišena svih nepotrebnih ukrasa) na kojem se problem königsberških mostova može proučavati sljedeća shema,



a upravo je to primjer jednog (neusmjerenog) grafa. Euler je postavljeno pitanje riješio i u znatno većoj općenitosti, no o tome ćemo detaljnije i preciznije učiti kasnije.

Iako temelji teorije grafova sežu u 18. stoljeće, ta se matematička disciplina kao zasebna teorija intenzivno počela razvijati tek u drugoj polovici 20. stoljeća, a mnoštvo otvorenih problema svjedoči o njenoj aktualnosti i danas. Probleme teorije grafova često je sasvim jednostavno formulirati, no ponekad ih je vrlo teško riješiti.

Svaka se mrežna konfiguracija (cestovna karta, naftovod, strujni krug) može na prirodan način zamijeniti grafom, te se mogu postaviti zanimljiva pitanja koja teorija grafova rješava. Na primjer, zanimljivo je pitanje mogu li se sve ulice zagrebačkog Gornjeg grada učiniti jednosmjernima, a da se pritom može autom dovesti iz bilo koje točke u bilo koju drugu točku, i to naravno u smjeru vožnje. Naravno da to nije moguće ako se zna da ima i slijepih ulica (Visoka), ali razmislite o tom problemu ako se slijepe ulice zanemare.

Ima naravno i kompliciranijih i manje očitih primjena teorije grafova. Jedna takva je čuveni *problem* 4 *boje*. Naime, može se pokazati da se svaka geografska karta može obojati s 4 boje, tako da su susjedne države obojane različitim bojama. Rješavanje tog, kao i mnogih drugih problema, međutim nadilazi okvire zacrtane planom ovog kolegija. Mi ćemo se ovdje precizno upoznati s pojmom grafa, proučiti jednostavna strukturalna svojstva grafova, karakteristične primjere, te upoznati najjednostavnije algoritme optimizacije na grafovima. Također, neki od problema teorije grafova iziskuju softversko, programsko rješavanje, no u okviru ovog kolegija mi ćemo takve probleme samo spomenuti i naznačiti moguće pravce rješavanja, a eventualno zainteresiranim studentima ostaviti da sami za vlastito zadovoljstvo načine adekvatne računalne programe.

1.2. Glavne definicije

Definicija 1. **Jednostavni graf** G sastoji se od nepraznog konačnog skupa $V(G)$, čije elemente zovemo **vrhovi** (čvorovi) grafa G i konačnog skupa $E(G)$ različitih dvočlanih podskupova skupa $V(G)$ koje zovemo **bridovi**. Skup $V(G)$ zovemo skup vrhova i ako je jasno o kojem je grafu G riječ označavat ćemo ga kraće samo s V, a skup $E(G)$ zovemo skup bridova i označavat ćemo ga i samo s E. Formalno, ponekad ćemo pisati $G = (V(G), E(G))$ ili kraće još i $G = (V, E)$.

Oznaka V za skup vrhova dolazi od engleske riječi *vertex* za vrh, a oznaka E za skup bridova pak od engleske riječi *edge* za brid.

Uočimo da smo prethodnom definicijom *jednostavnog* grafa isključili mogućnost da su dva vrha spojena s više bridova (budući smo $E(G)$ definirali kao skup), te da postoji brid koji spaja vrh sa samim sobom (jer smo svaki brid definirali kao dvočlani podskup). Ako pak dopustimo višekratnost bridova, ili ako dopustimo brid koji spaja vrh sa samim sobom (takve bridove zvat ćemo *petljama*), onda redovito govorimo o *općem (generaliziranom) grafu*, ili kratko samo o grafu. U većini modela i strukturalnih problema koje ćemo promatrati svejedno je promatramo li ih u jednostavnom ili općem grafu, pa ćemo to posebno naglašavati samo kad odista bude potrebno.

Definicija 2. Za brid $e = \{v, w\}$ kažemo da **spaja** vrhove v i w i bez mogućnosti zabune kraće ga pišemo vw. U toj situaciji kažemo da su vrhovi v i w grafa G **susjedni**. Također, kažemo da je vrh v **incidentan** s bridom e. Naravno, i w je također incidentan s bridom e.

Grafički ćemo vrhove grafa prikazivati kružićima, a bridove spojnicama vrhova. Sjecište dviju spojnica je vrh samo ako je nacrtano kružićem.

Glavni zadatak teorije grafova je proniknuti u strukturu pojedinog grafa, te ustanoviti u čemu je bitna (strukturalna) razlika dvaju promatranih grafova. Najprije ćemo stoga definirati kada dva grafa u apstraktnom smislu smatramo jednakima.

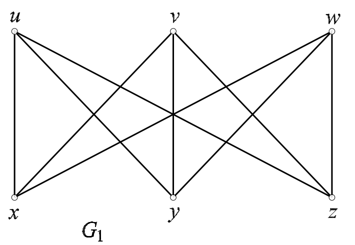
Definicija 3. Za grafove G_1 i G_2 kažemo da su **izomorfni** ako postoji bijektivna korespondencija ($1 - 1$ preslikavanje) između skupova $V(G_1)$ i $V(G_2)$, takva da je broj bridova koji spajaju bilo koja dva izabrana vrha u $V(G_1)$ jednak broju bridova koji spajaju korespondentna dva vrha u $V(G_2)$. Takvu bijekciju zvat ćemo **izomorfizam** grafova.

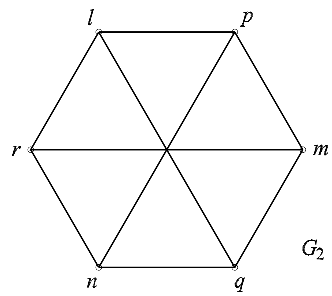
Iz definicije odmah slijedi da za izomorfne grafove G_1 i G_2 vrijedi

$$|V(G_1)| = |V(G_2)|, \quad |E(G_1)| = |E(G_2)|.$$

To je nuždan uvjet izomorfnosti, svakako ne i dovoljan, u što ćemo se uvjeriti na mnoštvu primjera. Evo jednog primjera izomorfnih grafova.

Primjer 1. Dani su grafovi:



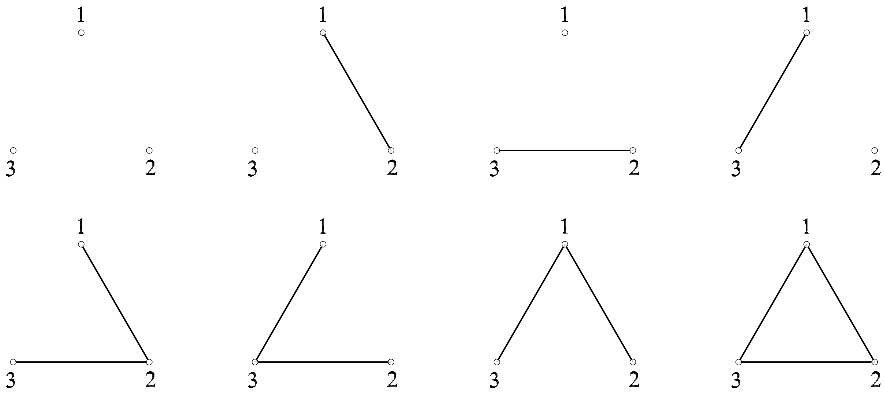


Da bismo ustanovili njihovu izomorfnost, moramo konstruirati bijekciju φ između njihovih skupova vrhova koja čuva susjedstvo. Točnije, $\{v_1, v_2\} \in E(G_1)$ onda i samo onda ako je $\{\varphi(v_1), \varphi(v_2)\} \in E(G_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V(G_1)$. Uvjerite se sami da je bijekcija koja preslikava vrhove $u \mapsto l$, $v \mapsto m$, $w \mapsto n$, $x \mapsto p$, $y \mapsto q$, $z \mapsto r$ izomorfizam zadanih grafova! Pronađite sami neki drugi izomorfizam ovih grafova!

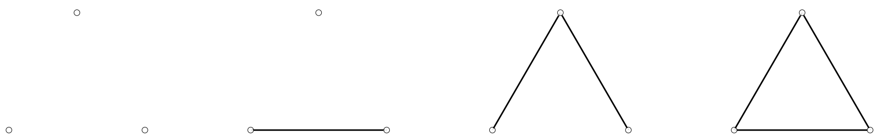
Relacija "izomorfnosti grafova" je relacija ekvivalencije na skupu svih grafova (s n vrhova).

Ovisno o problemu koji proučavamo, vrhovima grafa ponekad će biti dodijeljena imena (oznake, labele), a ponekad neće. Uočimo: dva grafa su izomorfna ako možemo preimenovati vrhove jednog u vrhove onog drugog. U tom smislu, želimo li prebrojiti koliko ima grafova s određenim brojem vrhova, trebamo naglasiti jesu li vrhovi unaprijed označeni (imenovani, labelirani), ili nisu. U drugom slučaju, kad ispitujemo broj grafova s danim brojem neoznačenih vrhova, tražimo zapravo broj svih neizomorfnih grafova s toliko vrhova.

Primjer 2. Prebrojimo sve jednostavne grafove s 3 vrha, najprije uzimljući u obzir da su vrhovi unaprijed označeni (dakle, da ih razlikujemo), a onda uz pretpostavku da nisu označeni (do izomorfizma). Izlistajmo sve grafove s obilježena 3 vrha:



Ima ih dakle točno 8. Evo sada svih neizomorfnih grafova s 3 vrha (neobilježenih vrhova):



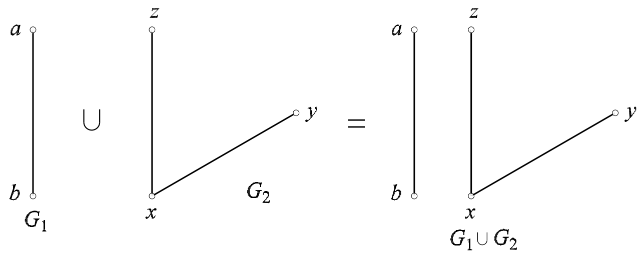
Razmišljali smo pritom "iscrpno", rastavljajući problem prebrajanja na disjunktne podslučajeve: najprije smo pogledali koliko ima neizomorfnih grafova s 3 vrha i 0 bridova, pa onda onih s jednim bridom, i tako redom.

Zadatak 1. Koliko ima različitih jednostavnih grafova s n vrhova koji su unaprijed obilježeni?

Rješenje. Brid identificiramo kao dvočlani podskup skupa vrhova. Svaki dvočlani podskup skupa vrhova ili jest, ili nije brid u grafu. Dakle, za svaki od $\binom{n}{2}$ podskupova imamo dvije mogućnosti. Stoga je broj različitih grafova s n vrhova jednak $2^{\binom{n}{2}}$.

Uočimo da bi bilo smisleno postaviti pitanje koliko ima neizomorfnih (jednostavnih) grafova s n vrhova. Međutim, to je pitanje toliko teško (nije poznata zatvorena formula) da ga jedva, i to redovito uz pomoć računala, možemo riješiti za neke manje n-ove. Vrlo ambicioznim čitateljima ostavljamo da taj problem programski riješe za neke konkretne ne sasvim male n-ove, recimo za $n = 8$, 9 ili eventualno 10.

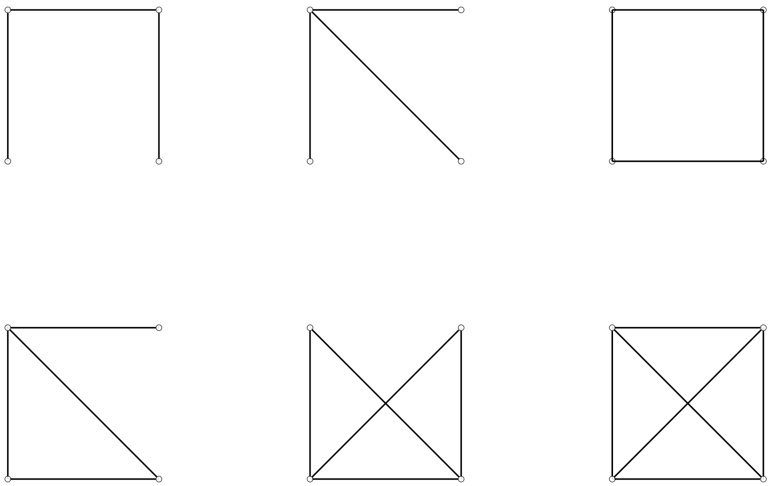
Definicija 4. Za zadane disjunktne grafove $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ i $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ definiramo njihovu **uniju** $G_1 \cup G_2$ kao graf $G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$.



Koliko god nam se ova definicija čini banalnom (a svakako prirodnom), ona nam omogućuje da definiramo važno svojstvo povezanosti grafa.

Definicija 5. Graf je **povezan** ako se ne može prikazati kao unija neka dva grafa. U suprotnom kažemo da je graf **nepovezan**. Svaki se nepovezani graf dakle može prikazati kao unija povezanih grafova. Svaki član te unije zovemo **komponenta povezanosti**.

Uvjerimo se da do izomorfizma postoji samo 6 povezanih jednostavnih grafova s 4 vrha:



Mi ćemo često promatrati i provoditi dokaze samo za povezane grafove. Naime, ako graf nije povezan, uvijek se svaka njegova komponenta povezanosti može promotriti zasebno.

Jedno od pitanja na koje se redovito može vrlo jednostavno odgovoriti, a pokazuje se važnim strukturalnim svojstvom, je koliko susjednih vrhova ima svaki pojedini vrh.

Definicija 6. **Stupanj vrha** v grafa G je broj bridova koji su incidentni s v. Označavamo ga s $\deg(v)$. Dogovorno, ako je vrh v petlja, onda ona broju $\deg(v)$ doprinosi s 2. Vrh stupnja 0 zovemo **izolirani vrh**, a vrh stupnja 1 zovemo **krajnji vrh**.

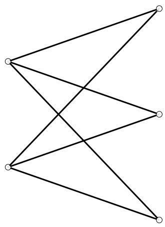
Posebno, zanimljivo je svakome grafu G pridružiti *niz stupnjeva*. Za graf s n vrhova to je n-torka koja se sastoji od rastućeg niza cijelih brojeva koji predstavljaju stupnjeve svih vrhova u grafu G (zajedno s kratnostima).

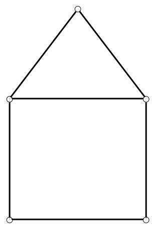
Primjer 3. Pogledajmo graf na slici.

Niz stupnjeva ovog grafa je $(1,1,2,2,2)$. Graf ima dva krajnja vrha.

Postavimo si sada ovakvo pitanje: određuje li niz stupnjeva strukturu grafa? Ili, ekvivalentno, ako dva grafa imaju isti niz stupnjeva, jesu li oni nužno izomorfni? Odgovor daje sljedeći

Primjer 4. Zadani su sljedeći grafovi.





Oba zadana grafa imaju niz stupnjeva $(2,2,2,3,3)$. No, s druge strane, evo strukturalne karakteristike koja ih u bitnome razlikuje. U lijevome grafu vrhovi stupnja 3 međusobno nisu susjedni, dok u desnome jesu. To dokazuje da oni nisu izomorfni. Možete li naći primjer dva neizomorfna grafa s 4 vrha koji imaju isti niz stupnjeva?

Leonhard Euler već je 1736. godine dokazao sljedeću jednostavnu činjenicu.

Lema 1. **(o rukovanju)** *U svakom grafu G je zbroj stupnjeva svih vrhova paran, tj. vrijedi*

$$\sum_{v\in G}\deg(v)\equiv 0\,(mod\,2)$$

Dokaz. Može se zapravo dokazati i konkretnija jednakost: $\sum_{v\in G}\deg(v)=2\cdot|E(G)|$. Nju pak dokazujemo prebrajanjem svih "incidencija" grafa, tj. skupa $\{(v,e)\mid v\in V(G),\, e\in E(G),\, v\in e\}$ na dva načina. Krenemo li od vrhova, za svaki pojedini vrh takvih incidencija ima točno koliko je stupanj dotičnog vrha. Krenemo li od bridova, vidimo da svaki brid ima "dva kraja", tj. da je dvočlani podskup, pa sveukupno incidencija ima $2\cdot|E(G)|$. Time smo dokazali ovu jednakost. Kako je desna strana jednakosti očevidno parna, budući je višekratnik broja 2, to parna mora biti i lijeva strana, što upravo dokazuje tvrdnju leme. ■

Ova se jednostavna činjenica zove Lema o rukovanju jer se može interpretirati ovako: Prilikom rukovanja bilo kojeg broja ljudi, broj ruku koji je u to uključen nužno je paran.

Korolar 2. *Broj vrhova neparnog stupnja u svakom grafu je paran.*

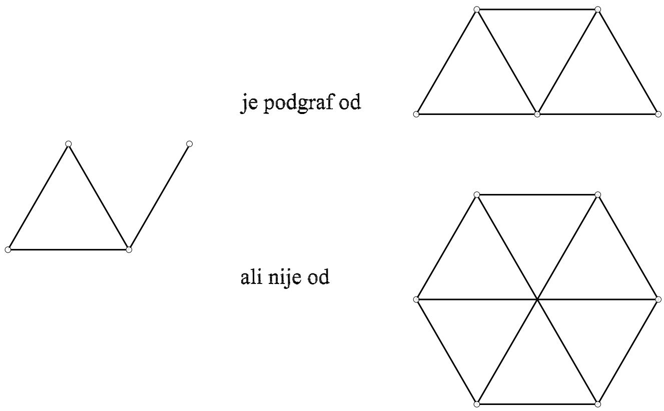
O odnosu među stupnjevima grafa skoro da se ništa više ne može tvrditi, skup stupnjeva može biti vrlo raznolik. Naravno, najpravilniji je slučaj kad je zadan graf u kojem su svi vrhovi istog stupnja.

Definicija 7. Za graf G kažemo da je **regularan**, ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja. Kažemo da je G r-regularan ako je $\deg(v) = r$, $\forall v \in V(G)$. Cijeli broj r tada ćemo zvati **stupanj regularnosti** grafa G.

Niz stupnjeva regularnog grafa je konstantan niz. Razmislite postoji li i kako izgleda 1-regularan graf.

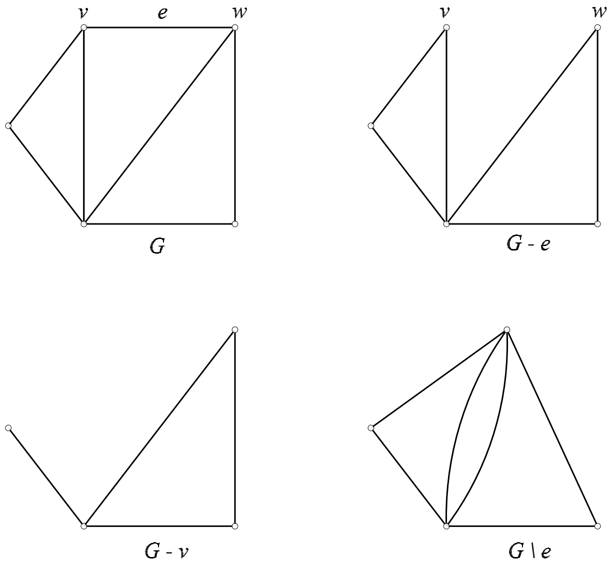
Definicija 8. **Podgraf** grafa G je graf čiji vrhovi pripadaju skupu $V(G)$, a bridovi skupu $E(G)$.

Primjer 5.



Podgrafove često dobivamo iz danog grafa G brisanjem vrhova ili bridova. Ako je e neki brid od G, onda s $G - e$ označavamo graf G bez brida e. Općenitije, ako je $F \subseteq E(G)$, onda je $G - F = (V(G), E(G) \setminus F)$. Ako je v vrh od G, onda je $G - v$ podgraf od G dobiven brisanjem vrha v i svih bridova incidentnih s v. Ako je pak $S \subseteq V(G)$, onda se graf $G - S$ dobiva uklanjanjem svih vrhova iz podskupa S, kao i svih bridova koji su incidentni s bilo kojim od uklonjenih vrhova. Sa $G \setminus e$ označit ćemo graf dobiven kontrakcijom brida e. Točnije, vrhove incidentne s tim bridom slijepimo, uzimljući pritom u obzir sve bridove s kojima su oba slijepljena vrha incidentna. Uočimo da $G \setminus e$ nije podgraf od G.

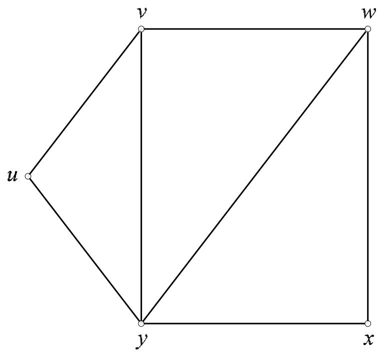
Primjer 6.



Zadatak 2. Neka je G graf s n vrhova i m bridova, neka je v vrh od G, takav da je $\deg(v) = k$, te neka je e brid iz G. Koliko vrhova i bridova imaju grafovi $G - e$, $G - v$, $G \setminus e$?

Rješenje. Graf $G - e$ nastao je brisanjem jednog jedinog brida. Dakle ima isto vrhova koliko i G, n, te bridova za jedan manje, $m - 1$. Graf $G - v$ nastaje uklanjanjem vrha v i svih bridova koji su s njime incidentni, a tih je točno $\deg(v)$. Dakle, vrhova je $n - 1$, a bridova $m - k$. Konačno, kontrahiramo li brid e, u novom grafu $G \setminus e$ imamo $n - 1$ vrhova (jer smo dva vrha slijepili), te $m - 1$ bridova (svi osim kontrahiranog brida e).

Do sada smo grafove predstavljali grafički, što je vizualno čitatelju najjednostavnije. Međutim, pitanje je kako graf reprezentirati u računalu, ili uopće, kako s grafovima spretno računati. Prvo se zapitajmo, što nam je minimalno potrebno znati da bismo graf imali u potpunosti zadan. Npr, znamo li vrhove grafa (koji su sada fiksno označeni, jer graf reprezentiramo na jedinstven način), vidimo da je sasvim dovoljno poznavati skup bridova. Takav se zapis zove *lista bridova*. Za graf



lista bridova je:

$$\{uv,\ uy,\ vw,\ vy,\ wx,\ wy,\ xy\}\ .$$

Lista susjedstva je lista (polje) gdje je svaki element liste podskup skupa vrhova koji čine susjedi određenog vrha. U gornjem primjeru ta bi lista izgledala ovako:

$$[u : \{v, y\};\ v : \{u, y, w\};\ w : \{v, y, x\};\ x : \{y, w\};\ y : \{u, v, w, x\}]$$

Definicija 9. Označimo li vrhove zadanog grafa G s $V = \{1, 2, \dots, n\}$, onda definiramo **matricu susjedstva** $A = [a_{ij}]$ kao $n \times n$ matricu čiji je element a_{ij} jednak broju bridova koji spajaju vrh i s vrhom j.

Za jednostavni graf matrica susjedstva je očito simetrična $0-1$ matrica. Za prethodni primjer grafa, uz preimenovanje vrhova $(u, v, w, x, y) = (1, 2, 3, 4, 5)$, dobivamo ovu matricu susjedstva:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uočimo da zbroj elemenata u pojedinom retku (ili stupcu) točno odgovara stupnju odgovarajućeg vrha.

Definicija 10. Označimo li dodatno i bridove zadanog grafa G s $E = \{1, 2, \dots, m\}$, onda definiramo **matricu incidencije** kao $n \times m$ matricu $B = [b_{ij}]$ čiji su elementi

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je vrh } i \text{ incidentan s bridom } j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Uočite da svaki stupac matrice incidencije ima na točno dva mjesta 1, dok su na ostalim mjestima nule. Te dvije jedinice točno kazuju koja dva vrha spaja dotični brid. Matrica incidencije za prethodni primjer je npr. (to je sada ovisno o tome kako si numeriramo bridove)

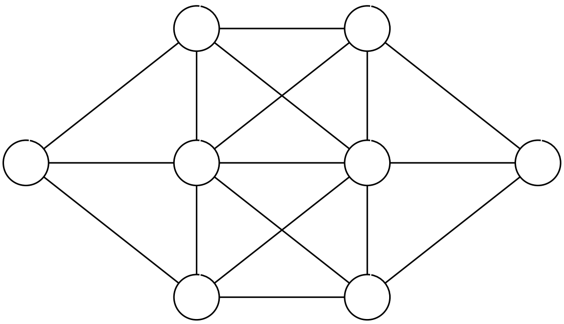
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pridijelite sami bridovima ovog grafa labele sukladno ovoj matrici incidencije i uvjerite se da matrica incidencije jednoznačno definira strukturu grafa. Što bi se desilo s matricom incidencije ako biste preimenovali skup vrhova (skup bridova)? Što bi se desilo s matricom susjedstva ako biste preimenovali skup vrhova?

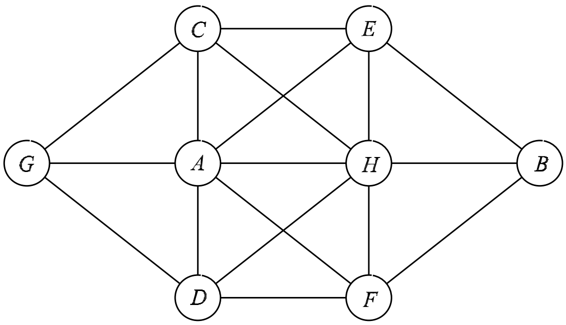
Zadatak 3. Ako je G jednostavni graf s najmanje 2 vrha, dokaži da G mora sadržavati barem 2 vrha istoga stupnja.

Rješenje. Općenito, imamo li jednostavni graf s n vrhova, onda stupnjevi pojedinih vrhova mogu biti brojevi $0, 1, \ldots, n-1$. Mogućnosti je dakle n. Međutim, uočimo da je nemoguće da u grafu istodobno postoji vrh stupnja 0 i stupnja $n-1$ (takav bi naime bio susjedan svakom drugom vrhu). Dakle, različitih stupnjeva vrhova grafa ima najviše $n-1$. Sada primijenimo Dirichletov princip, iz kojeg neposredno slijedi da postoje barem dva vrha istoga stupnja.

Zadatak 4. Smjesti slova A, B, C, D, E, F, G i H u krugove sa slike tako da nijedno slovo nije susjedno s onim slovom s kojim je susjedno u (engleskoj) abecedi.



Rješenje. Iscrpno pretraživanje vodilo bi do ispitivanja $8!$ mogućnosti. Želimo li si uštedjeti vrijeme, uočimo neravnopravnost slova A i H u odnosu na sva ostala, budući ona imaju samo po jednog susjeda među danim slovima, a ostala slova po dva. S obzirom da dva središnja polja sheme imaju stupanj 6, u njih možemo staviti samo ta dva slova, jer ostala slova, s dva susjeda u abecedi, mogu biti smještena u polja stupnja najviše 5. Uočimo dalje da je svejedno jesmo li stavili slovo A lijevo ili desno, jer je shema simetrična. Nakon ovog početka vjerujemo da će svatko moći ispuniti shemu slovima do kraja i naći jedno rješenje. Koliko različitih rješenja ima? Jesu li ona sva međusobno izomorfna? Na ova pitanja ćete lako odgovoriti uočite li sve simetrije zadane sheme. Evo jednog rješenja:

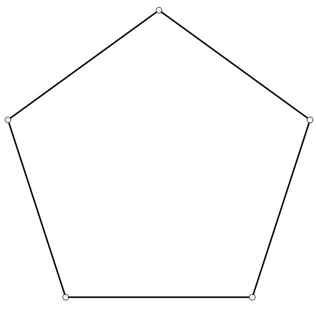


Zadatak 5. Pokaži da u svakoj grupi od 6 ljudi postoje 3 čovjeka koji se međusobno poznaju ili postoje 3 čovjeka od kojih nitko ne poznaje preostala dva.

Rješenje. Izmodelirajmo rješenje pomoću grafova. Vrhovi grafa bit će naravno promatrani ljudi, a njihovo poznanstvo realizirajmo kao susjedstvo. Pitanje je, dakle, možemo li uvijek garantirati da u jednostavnom grafu sa 6 vrhova postoji „trokut" ili pak tri vrha koja nisu vezana niti jednim bridom. Uočimo, ne smanjujući općenitost, bilo koji od 6 vrhova i nazovimo ga s u. Kako osim u ima 5 drugih vrhova s kojima u može biti susjedan ili nesusjedan, to on mora biti u jednom od ta dva odnosa s barem 3 vrha. Razmotrimo situaciju kad je u susjedan s barem 3 vrha. Tri njegova susjeda neka su v_1, v_2 i v_3. Ako su neki od vrhova v_i međusobno susjedni, onda smo gotovi, jer oni zajedno s vrhom u čine trokut. Ako su pak sva tri vrha v_i međusobno nesusjedna, onda smo našli tri vrha koja nisu vezana niti jednom bridom, pa smo opet dokazali tvrdnju. Analogno se razmotri situacija kad u ima barem 3 nesusjeda.

Zadatak 6. Postoji li grupa od 5 ljudi u kojoj se bilo koja izabrana trojica niti međusobno poznaje, niti ne poznaje?

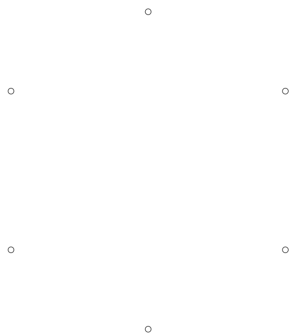
Rješenje. Možda je netko pomislio da ćemo „imitirati" rješenje prethodnog zadatka. No, ovdje grupa od 5 ljudi s traženim svojstvima postoji. Evo je:



1.3. Primjeri

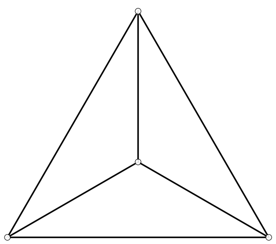
Kad proučavamo razna strukturalna svojstva grafova, redovito nam treba mnoštvo primjera za koje znamo točno kako izgledaju odnosno kakvu strukturu imaju, pa na njima naše daljnje pretpostavke i ispitivanja jednostavno možemo provjeriti. Stoga ovdje navodimo nekoliko serija jednostavnih grafova i još neke važne sporadične primjere i konstrukcije.

Primjer 7. Nul-graf je graf čiji je skup bridova prazan skup. Uočimo da su svi nul-grafovi s istim brojem vrhova međusobno izomorfni. Nul-graf s n vrhova označavat ćemo s N_n. U nul-grafu je svaki vrh izoliran, tj. stupanj svakog vrha jednak je nuli.

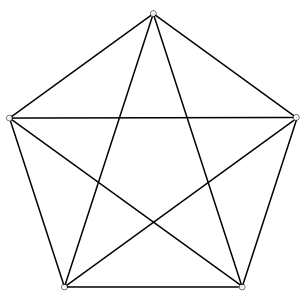


N_6

Primjer 8. Jednostavni graf kod kojeg su svaka dva vrha susjedna zovemo potpuni graf. Potpuni graf s n vrhova označavamo s K_n. Uočimo da potpuni graf ima $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ bridova, te da svaki od n vrhova ima točno $n-1$ susjeda, pa je K_n $(n-1)$-regularan.

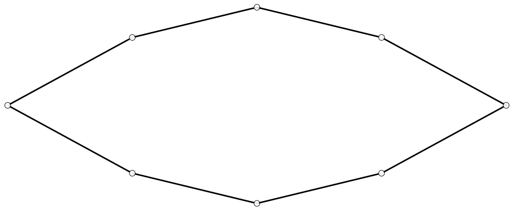


K_4



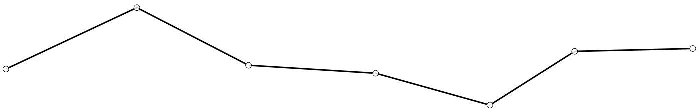
K_5

Primjer 9. Povezani 2-regularni graf zovemo ciklički graf (ili kratko ciklus). Ciklički graf s n vrhova označavamo s C_n. Ciklus C_n ima n vrhova i n bridova. Što se općenito može reći o grafu koji je 2-regularan? Uočite da to ne mora biti ciklus, već to može biti i disjunktna unija ciklusa.



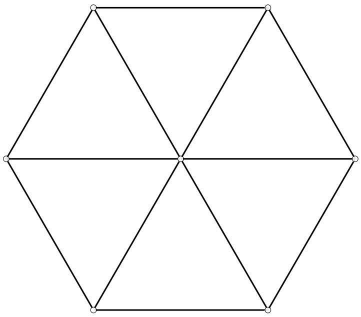
C_8

Primjer 10. Graf koji dobijemo iz cikličkog grafa brisanjem točno jednog brida zovemo lanac i označavamo s P_n, ako ima n vrhova.



P_7

Primjer 11. Graf koji dobijemo iz ciklusa C_{n-1} tako da svaki njegov vrh spojimo s jednim novim vrhom zovemo kotač s n vrhova i označavamo s W_n. Jednostavno se izračuna da je $|E(W_n)| = 2n - 2$.

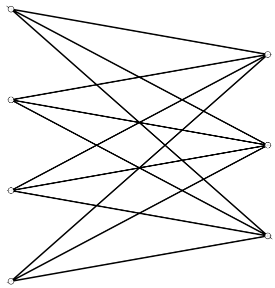


W_7

Definicija 11. Ako skup vrhova grafa G možemo razdvojiti u dva disjunktna skupa A i B tako da svaki brid od G spaja neki vrh skupa A s nekim iz skupa B, onda kažemo da je G **bipartitan graf**.

Alternativno možemo reći da je G bipartitan graf ako mu vrhove možemo pobojati u dvije boje, npr. crnu i bijelu, tako da je svaki brid incidentan s jednim crnim i s jednim bijelim vrhom. Uočimo na primjer da je svaki lanac P_n bipartitan. Uvijek je naime moguće krenuti od jednog krajnjeg vrha lanca i naizmjence pobojati sve njegove vrhove.

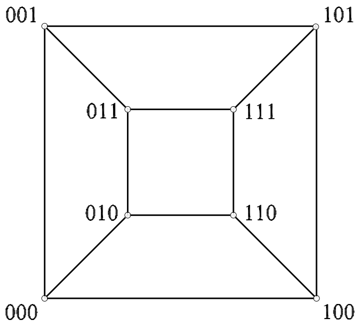
Primjer 12. Potpuni bipartitni graf je onaj bipartitni graf s particijom skupa vrhova $V(G) = A \cup B$ kod kojeg je svaki vrh iz skupa A spojen sa svakim iz B. Ako je $|A| = r$, te $|B| = s$, onda takav graf označavamo s $K_{r,s}$.



$K_{4,3}$

Jasno je da vrijedi da graf $K_{r,s}$ ima $r+s$ vrhova i $r \cdot s$ bridova.

Primjer 13. k-kocka Q_k je graf čiji vrhovi odgovaraju svim binarnim nizovima $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in \{0, 1\}$, duljine k, te čiji bridovi spajaju one binarne nizove koji se razlikuju točno na jednom mjestu.



Q_3

Pogledajmo općenito glavna svojstva k-kocke. Jasno je da je broj vrhova k-kocke jednak broju binarnih nizova duljine k, dakle $|V(Q_k)| = 2^k$. Koliko bridova ima takva kocka? Jednostavnije je prvo utvrditi k-regularnost. Naime, svaki vrh je susjedan točno s onim vrhovima s kojima se, shvaćen kao binarni niz, razlikuje na jednoj poziciji. Svaki niz je duljine k, pa ima točno k mjesta na kojima se može razlikovati, dakle točno k susjeda. Sada, kad smo utvrdili k-regularnost, jednostavno je prebrojati skup bridova. Naime, svaki od 2^k vrhova incidentan je s k bridova, no u tom brojanju prebrojali smo svaki brid dvaput. Stoga je

$$|E(Q_k)| = \frac{2^k \cdot k}{2} = k \cdot 2^{k-1}.$$

Definicija 12. Ako je G jednostavni graf sa skupom vrhova $V(G)$, onda je njegov **komplement** $\overline{G}$ jednostavni graf s istim skupom vrhova $V(G)$, dok su dva vrha u $\overline{G}$ susjedna onda i samo onda ako oni nisu susjedni u grafu G.

Označimo li skup svih dvočlanih podskupova skupa V s $\binom{V}{2}$, onda vrijedi da je $E(\overline{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ i u tom smislu je skup bridova komplementarnog grafa komplementaran (u skupovnom smislu) skupu bridova zadanog grafa. Traženje komplementa je dualna operacija, tj. $\overline{\overline{G}}$ je izomorfan s G. Naime, ako su vrhovi u i v susjedni u G, onda oni nisu susjedni u $\overline{G}$, pa su opet susjedni u njegovom komplementu $\overline{\overline{G}}$. Identiteta koja preslikava skup vrhova od G u onaj od $\overline{\overline{G}}$ dakle čuva susjedstvo, pa je izomorfizam.

Komplement nul-grafa s n vrhova je potpuni graf s n vrhova: $\overline{N_n} = K_n$. Komplement potpunog bipartitnog grafa je unija dvaju potpunih grafova: $\overline{K_{r,s}} = K_r \cup K_s$.

Ako nam je poznata matrica susjedstva A jednostavnog grafa G, što se može reći o matrici susjedstva $\overline{A}$ njemu komplementarnog grafa $\overline{G}$? Ako su različiti vrhovi i i j susjedni u G, onda je $a_{ij} = 1$. No, u $\overline{G}$ onda i i j nisu susjedni, pa je $\overline{a}_{ij} = 0$. Slično se vidi i za različite nesusjedne vrhove u G, u smislu da je tada $a_{ij} = 0$, i $\overline{a}_{ij} = 1$. Posebno treba obratiti pozornost na dijagonalne elemente, budući su oni u obje matrice susjedstva jednaki 0. Konačno, označimo li s J matricu koja se sastoji od samih jedinica, tj. koja na svim mjestima ima ulaz 1, a s I jediničnu matricu, možemo pisati

$$\overline{A} = J - I - A.$$

1.4. Zadaci za vježbu

Zadatak 7. Može li se jednoznačno (do izomorfizma) odrediti struktura jednostavnog grafa s n vrhova kojem je zadan niz stupnjeva $(1, 1, 2, 2, 2, \ldots, 2)$? Ispitaj što sve može biti takav graf! Što ako se doda uvjet da je graf povezan?

Zadatak 8. Nađi niz stupnjeva za kotač W_n s n vrhova. Uvjeri se neposredno da je uvijek broj vrhova neparnog stupnja paran!

Zadatak 9. Neka je A matrica incidencije grafa C_4 (kojem su vrhovi numerirani slijedom, npr. u smjeru kazaljke na satu). Izračunaj A^n!

Zadatak 10. Ispitaj za koje n-ove je ciklus C_n bipartitan graf. Za koje n-ove je kotač W_n bipartitan?

Zadatak 11. Dokaži da je k-kocka Q_k bipartitan graf za svaki $k \geq 2$.

Zadatak 12. Uz koje uvjete na parametre su grafovi K_n, $K_{r,s}$, W_n regularni? S kojim stupnjem regularnosti?

Zadatak 13. Dokaži da je komplement r-regularnog jednostavnog grafa $(n-r-1)$-regularan.

Zadatak 14. Što je komplement kocki s 8 vrhova? Možeš li prepoznati geometrijsko tijelo u dobivenom komplementarnom grafu?

Zadatak 15. Za jednostavni graf koji je izomorfan svome komplementu kažemo da je samokomplementaran. Dokaži da ako je G samokomplementaran, onda mu je broj bridova $n \equiv 0, 1 \pmod 4$

Zadatak 16. Nađi sve samokomplementarne grafove s 4 i s 5 vrhova.

Zadatak 17. Bridni graf $L(G)$ jednostavnog grafa G definira se kao graf čiji vrhovi su u bijektivnoj korespondenciji s bridovima grafa G, pri čemu su dva vrha od $L(G)$ susjedna onda i samo onda ako su odgovarajući bridovi u G susjedni (tj. incidentni s jednim zajedničkim vrhom). Pokaži da K_3 i $K_{1,3}$ imaju iste bridne grafove.

Zadatak 18. Pokaži da je bridni graf tetraedra izomorfan s oktaedrom.

Zadatak 19. Dokaži da ako je G k-regularan, onda je njegov bridni graf $L(G)$ $(2k-2)$-regularan.