ŠKOLSKA (GRADSKA) NATJECANJA

1993.

1. Nađite sve trojke cijelih brojeva (a, b, c) takvih da je $M(b, c) = 1$ i

$$\sqrt{a + \frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

2. Duljina jedne stranice trokuta ABC je 20 cm, a duljine težišnica koje pripadaju drugim dvjema stranicama su 24 cm i 18 cm. Kolika je površina trokuta?

3. Nacrtajte graf ove relacije:

$$||x - 1| - 1| = |y + 1|.$$

4. Dva komada slitine (legure) zlata i srebra sadrže ukupno a kg zlata. Ako bi postotak zlata u prvome komadu bio onaj isti koji je u drugom, oba komada sadržavala bi ukupno b kg zlata. Ako bi postotak zlata u drugome komadu bio onaj isti koji je u prvom, oba komada bi sadržavala ukupno c kg zlata. Koliko kg zlata ima u prvom, a koliko u drugom komadu?

1994.

1. Jedna zagrebačka obitelj krenut će ove godine na ljetovanje na Jadran posljednjeg dana u mjesecu. Umnožak rednog broja dana polaska i rednog broja mjeseca povratka s brojem djece u obitelji te brojem dana ljetovanja je $14\,384$. Odredite datum povratka.

2. Rastavite na faktore izraz:

$$(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3.$$

3. Visina i težišnica iz vrha A trokuta ABC dijele kut α na tri jednaka dijela. Odredite kutove tog trokuta.

4. Riješite sustav jednadžbi

$$x_1+a_2x_2=x_2+a_3x_3=x_3+a_4x_4=x_4+a_5x_5=x_5+a_1x_1=1$$

gdje je $a_1a_2a_3a_4a_5\neq -1$.

1995.

1. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC leže točke F, G, H tako da je F između A i G, a H između G i B. Ako je $|BH|=|BC|$, $|HG|=|HC|$, $|GF|=|GC|$, $|FA|=|FC|$, te $\sphericalangle CAB=5^\circ$, izračunajte koliki je $\sphericalangle ABC$.

2. Duljine stranica baze trostrane piramide jednake su a, b, c. Svi kutovi između bridova uz njezin vrh su pravi. Izračunajte obujam piramide.

3. Dokažite da za realne brojeve $a\neq b\neq c\neq a$ vrijedi sljedeći identitet

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$$

4. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}<\frac{n}{2}.$$

1996.

1. Dokažite da ne postoje realni brojevi a, b, c koji zadovoljavaju jednakosti

$$a + b + c = 63,$$
$$ab + bc + ca = 1996.$$

2. Dokažite da zbroj kvadrata pet uzastopnih cijelih brojeva ne može biti kvadrat nekog cijelog broja.

3. Za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba

$$\frac{a-5}{x+1} - \frac{7+3a}{x-2} = \frac{2ax-5}{x^2-x-2}$$

nema rješenje?

4. Kružnici polumjera $r = 3$ dm opisan je jednakokračan trokut kojemu je kut pri vrhu $120°$. Izračunajte površinu tog trokuta.

1997.

1. Odredite sva realna rješenja jednadžbe:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^{12}} - \frac{4}{x^7} = 0.$$

2. Neka su x i y cijeli brojevi. Dokaži da je tada $3x+y$ djeljivo s 13 ako i samo ako je $5x + 6y$ djeljivo s 13.

3. Iz neke točke hipotenuze pravokutnog trokuta spuste se okomice na katete. Neka su nožišta tih okomica N_1 i N_2. Kada će spojnica tih nožišta, $\overline{N_1N_2}$, biti najkraća? Kolika je duljina te najkraće spojnice ako su duljine kateta a i b?

4. Tri kružnice s nepoznatim središtima, u parovima se dodiruju u točkama A, B i C. Koristeći jedno ravnalo konstruirajte središta tih kružnica.

1998.

1. U trokutu ABC je $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Dokažite da je duljina t_a, težišnice iz vrha A, jednaka

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

2. Odredite broj $\overline{abcd}$ s ovim svojstvom:

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297$$
$$a + b + c = 23.$$

($\overline{abcd}$ je zapis broja u dekadskom sustavu.)

3. Ako je $x + y + z = 6$, $x, y, z \geqslant 0$, dokažite da je onda $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 12$.

4. U konveksnom mnogokutu s $1\,998$ stranica, njihove duljine su prirodni brojevi. Opseg mnogokuta je $1\,997\,000$. Dokažite da barem dvije stranice tog mnogokuta imaju jednake duljine.

1999.

1. Ako su a, b i c realni brojevi, takvi da je $a \neq b \neq c \neq a$, dokažite da je

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}.$$

2. Iz bilo koje točke M unutar jednakostraničnog trokuta ABC spuštene su okomice $\overline{MH}$, $\overline{MK}$, $\overline{MP}$, na njegove stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ redom. Dokažite da je

a) $|AH|^2 + |BK|^2 + |CP|^2 = |HB|^2 + |KC|^2 + |PA|^2$;

b) $|AH| + |BK| + |CP| = |HB| + |KC| + |PA|$.

3. Dokažite da jednadžba $5x^2 - 4y^2 = 1999$ nema nijedno cjelobrojno rješenje.

4. Nađite sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijede jednakosti

$$|x+y| = 1$$
$$|x| + |y| = 1.$$

Prikažite skup rješenja u koordinatnoj ravnini.

2000.

1. Darko će 2000. godine navršiti onoliko godina koliki je zbroj znamenki godine njegova rođenja. Koje godine je Darko rođen?

2. Koliko različitih cjelobrojnih rješenja ima jednadžba

$$|x| + |y| < 100?$$

3. Ako je $a + b = 1$ i $ab \neq 0$, dokažite jednakost

$$\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

4. Neka su R i r polumjeri opisane i upisane kružnice pravokutnog trokuta. Dokažite nejednakost

$$R \geq r(1+\sqrt{2}).$$

2001.

1. Između znamenki 4 i 9 broja 49 umetnuto je nekoliko četvorki, a iza njih isto toliko osmica. Dokažite da je tako dobiveni broj potpuni kvadrat.

2. Na koliko načina možemo izabrati dva različita broja iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2001\}$ tako da njihov zbroj bude paran?

3. Iz polovišta svake stranice šiljastokutnog trokuta spuštene su okomice na ostale dvije stranice. Dokažite da je površina šesterokuta omeđenog tim okomicama jednaka polovini površine trokuta.

4. Ako su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$, dokažite da je vrijednost izraza

$$\frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{y+1}{yz+y+1} + \frac{z+1}{zx+z+1}$$

konstantna.

2002.

1. Neka su a, b i c međusobno različiti realni brojevi, od kojih nijedan nije jednak nuli, i za koje je $a+b+c=0$. Dokažite da vrijedi:

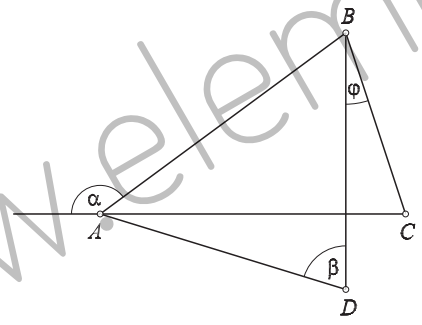
a) $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3$,

b) $\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9$.

2. Riješite sustav jednadžbi

$$|x+y-4| = 5,$$
$$|x-3| + |y-1| = 5.$$

3. Dane su četiri točke A, B, C i D u ravnini tako da je $|AB| = |AC|$ i $|AD| = |BD|$. Ako je za kutove α i β označene na slici, $\alpha + \beta = 200°$, odredite kut $\varphi = \sphericalangle CBD$.



4. Ako je n neparan prirodan broj dokažite da je broj $n^3 + 3n^2 - n - 3$ djeljiv s 48.

2003.

1. Jedinica za asfaltiranje sastoji se od određenog broja radnika i pripadne mehanizacije. Tri jedinice asfaltirale su 20 km autoceste za 10 dana. Koliko još jedinica treba uključiti da radovi budu gotovi za 15 dana ako je preostalo 50 km autoceste za asfaltiranje?

2. Dan je jednakokračan trokut ABC kojemu je kut uz vrh A jednak $120°$. Okomica iz tog vrha na krak trokuta dijeli trokut na dva trokuta od kojih tupokutan ima polumjer upisane kružnice 1. Kolika je površina trokuta ABC?

3. Odredite zbroj:

$$\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{2}{1997\cdot 2000}+\frac{2}{2000\cdot 2003}.$$

4. Ako za realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1,$$

dokažite da je

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

2004.

1. Dana je funkcija $f:\mathbf{Z}\longrightarrow\mathbf{Q}$, za koju vrijedi:

$$f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)},\qquad \text{za svaki } x\in\mathbf{Z}.$$

Ako je $f(1)=2$, odredite $f(2004)$.

2. U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$. Na kateti $\overline{BC}$ odabrana je točka E tako da je $|CE| = \frac{1}{2}|BD|$, a na dužini $\overline{AE}$ točka F tako da je $|EF| = |CE|$. Dokažite da je $|AF| = |AD|$.

3. Dokažite da je

$$\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26}$$

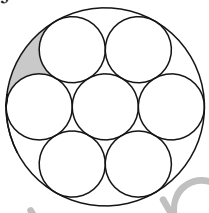
cijeli broj i odredite ga.

4. Odredite sva realna rješenja sustava jednadžbi:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2004} = 2004,$$
$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2004}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2004}^3.$$

2005.

1. Sedam kružnica jednakih polumjera smješteno je unutar veće kružnice kao na slici. Ako je polumjer manje kružnice 1, kolika je površina označenog dijela?



2. Dokažite da je za svaki prirodan broj n, broj $n^5 - n$ djeljiv s 30.

3. Dokažite da je $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ za svaki realan broj x.

4. U kvadratu površine P nalazi se 2005 figura čiji je zbroj površina veći od $2004P$. Dokažite da postoji barem jedna točka zajednička svim figurama.

2006.

1. Koja se znamenka nalazi na 2006. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{469}{1998}$?

2. Tri očeva koraka duga su kao pet sinovih, ali dok otac učini 6 koraka njegov sin učini 7 koraka. Sin je već napravio 30 koraka kada otac krene za njim. Nakon koliko će koraka otac sustići sina?

3. Ako su a, b i c realni brojevi za koje je $a+b \neq 0$, $b+c \neq 0$ i $a+c \neq 0$, dokaži da izraz:

$$\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\left(1+\frac{a}{b+c}\right)\left(1+\frac{b}{a+c}\right)-\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

ne ovisi o vrijednostima brojeva a, b i c.

4. Dokaži da iz jednakosti

$$a^3+b^3+c^3=a^2+b^2+c^2=a+b+c=1$$

slijedi $abc=0$.

5. Nad stranicama kvadrata duljine 1, prema van su konstruirani jednakokračni trapezi tako da su vrhovi svih trapeza ujedno vrhovi pravilnog dvanaesterokuta. Koliki je opseg tog dvanaesterokuta?

2007.

1. Skraćivanjem svedi razlomak na najjednostavniji oblik:

$$\frac{bc(c^2-b^2)+ac(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c)+a^2b^2(b-a)}.$$

2. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu:

$$||x+2|-2x|=\frac{x+3}{2}.$$

3. Neka je p prost broj veći od 3. Dokaži da njegov kvadrat pri dijeljenju brojem 24 daje ostatak 1.

4. Postoji li pravokutan trokut kojemu su duljine kateta cijeli brojevi, a duljina hipotenuze $\sqrt{2006}$?

5. U trokutu ABC duljine stranica su $|BC| = 7$, $|AC| = 3$, a kut pri vrhu A iznosi $\alpha = 30°$. Izračunaj duljinu stranice $\overline{AB}$.

2008.

1. Rastavi izraz:

$$(x^2 + 2x)^4 - (x^3 + 2x^2)^2 - (3x^2 + 6x)^2 + 9x^2$$

na faktore koji se ne mogu dalje rastaviti.

2. Nad stranicama jednakokračnog pravokutnog trokuta ABC s katetom duljine a nacrtani su s vanjske strane kvadrati $ABLK$, $BCNM$ i $CAQP$. Odredi površinu i opseg šesterokuta $KLMNPQ$.

3. Duljine svih bridova i duljina prostorne dijagonale kvadra su prirodni brojevi. Ako su duljine dvaju bridova tog kvadra 9 i 12, odredi duljinu trećeg brida.

4. Magični kvadrat je tablica dimenzija $n \times n$ u koju su upisani svi prirodni brojevi od 1 do n^2, na takav način da u svakom stupcu, u svakom retku i na obje dijagonale zbroj upisanih brojeva bude jednak istom broju S_n. Na slici je prikazan jedan magični kvadrat 3×3.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Odredi zbroj S_n u magičnom kvadratu $n \times n$.

5. a) Nađi sve prirodne brojeve kojima je prva znamenka 6 i koji zadovoljavaju uvjet da se uklanjanjem te prve znamenke dobije broj koji je 25 puta manji od početnog.

b) Dokaži da ne postoji prirodan broj n sa svojstvom da se uklanjanjem njegove prve znamenke dobije broj koji je 35 puta manji od n.

2009.

1. Skrati razlomak $\dfrac{a^4 - 2a^3 - 2a^2 + 2a + 1}{(a+1)(a+2)}$.

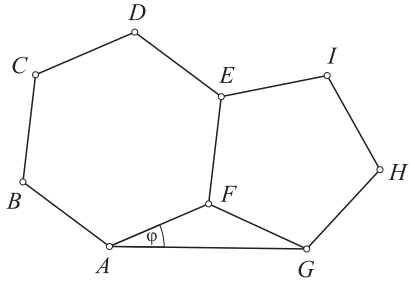
2. Ako dvoznamenkastom broju s lijeve strane dopišemo znamenku 3, dobit ćemo broj čiji je dvokratnik 27 puta veći od zadanog dvoznamenkastog broja. Odredi taj dvoznamenkasti broj.

3. Odredi najveći cijeli broj n za koji vrijedi nejednakost

$$3\left(n - \frac{5}{3}\right) - 2(4n+1) > 6n + 5.$$

4. Koliko djelitelja ima broj 288?

5. Na slici su pravilni šesterokut $ABCDEF$ i pravilni peterokut $EFGHI$. Odredi kut $\sphericalangle FAG$.



6. Trapez $ABCD$ ima pravi kut pri vrhu B, a dijagonala $\overline{BD}$ je okomita na krak AD. Duljina kraka $\overline{BC}$ je 5 cm, a duljina dijagonale $\overline{BD}$ je 13 cm. Izračunaj površinu trapeza $ABCD$.

7. Na proslavi Aninog rođendana, nakon prvog oglašavanja zvona na ulazna vrata došao je jedan gost. Nakon drugog, i svakog sljedećeg zvonjenja, došla su dva gosta više nego prethodni put. Ako se zvono oglasilo n puta, koliko je ukupno bilo gostiju na proslavi?

8. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $n^2 - 440$ potpuni kvadrat.

2010.

1. Neka je n prirodni broj i $a \neq 0$ realni broj. Potpuno skrati razlomak:

$$\frac{a^{3n+1} - a^4}{a^{2n+3} + a^{n+4} + a^5}.$$

2. Odredi prirodni broj čiji je 9-erokratnik između 1100 i 1200, a 13-erokratnik između 1500 i 1600.

Za prirodni broj n, n-terokratnik nekog broja je broj koji je n puta veći od tog broja.

3. Tri kružnice polumjera $2\,\text{cm}$ nalaze se u ravnini tako da središte svake od njih leži na sjecištu drugih dviju kružnica. Odredi površinu presjeka svih triju krugova određenih tim kružnicama.

4. Ako nekom broju obrišemo znamenku jedinica, dobit ćemo broj koji je za 2010 manji od polaznog broja. Koji je polazni broj?

5. U vreći se nalazi dovoljno velik broj crvenih, bijelih i plavih kuglica. Svaki učenik uzima nasumce iz vreće po tri kuglice. Koliko najmanje mora biti učenika da bismo bili sigurni da neka dvojica od njih imaju istu kombinaciju kuglica, tj. jednak broj kuglica svake boje?

6. Ako je $a^2 + 2b^2 = 3c^2$, pokaži da je

$$\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{b-c}{b-a}\right) \cdot \frac{a+2b+3c}{a+c}$$

prirodni broj.

7. Pravokutni trokut ABC s katetama duljina $15\,\text{cm}$ i $20\,\text{cm}$ i pravim kutom u vrhu B sukladan je trokutu BDE s pravim kutom u vrhu D. Točka C leži unutar dužine $\overline{BD}$, a točke A i E nalaze se s iste strane pravca BD.

a) Odredi udaljenost točaka A i E.

b) Izračunaj površinu presjeka trokuta ABC i BDE.

8. Neka su p i q različiti neparni prosti brojevi. Dokaži da broj $(pq+1)^4 - 1$ ima barem četiri različita prosta djelitelja.

2011.

1. Ako pola ekipe radnika za trećinu dana obavi četvrtinu posla, koliko će ekipa uz iste uvjete obaviti 15 poslova za pet dana?

2. U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle BAC = 120°$. Točka D nalazi se unutar trokuta tako da vrijedi $\sphericalangle DBC = 2\sphericalangle ABD$ i $\sphericalangle DCB = 2\sphericalangle ACD$. Izračunaj mjeru kuta $\sphericalangle BDC$.

3. Marko danas slavi rođendan. Njegov otac Joško i djed Luka razgovaraju:

– Sada su i Markov i tvoj i moj broj godina prosti brojevi!

– Da, a za pet godina sva tri će biti kvadrati prirodnih brojeva.

Koliko je godina imao Luka na dan Markovog rođenja?

4. Neka su a, b i c realni brojevi takvi da je

$$a + b + c = 3 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Koliko je $a^2 + b^2 + c^2$?

5. Koliko najmanje elemenata treba izbaciti iz skupa

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$$

tako da umnožak preostalih elemenata bude kvadrat prirodnog broja?

6. Zbroj duljina krakova trapeza iznosi $4\sqrt{10}$, a duljina visine 6. Površina trapeza je 72. Ako je taj trapez upisan u kružnicu, odredi polumjer te kružnice.

7. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 2011 koji su djeljivi barem jednim od brojeva 2 i 7, a nisu djeljivi brojem 5?

8. Dokaži da ne postoje neparni cijeli brojevi x, y, z za koje vrijedi

$$(x - z)^2 + (y - z)^2 = (x + y)^2.$$

2012.

1. Koliko se kvadrata prirodnih brojeva nalazi između 4^9 i 9^4, ne uključujući ta dva broja?

2. Neka je a realan broj. Odredi zbroj svih triju rješenja jednadžbe

$$x^3 - a^2x + ax - x + a^2 - a = 0.$$

3. Ako je $a + b = 4$ i $a^2 + b^2 = 14$, odredi $a^3 + b^3$.

4. Dan je pravilni peterokut $ABCDE$. Pravci BC i DE sijeku se u točki F. Odredi kutove trokuta BEF.

5. Eleonora ima mnogo kocki čije su sve strane bijele boje. Najprije odvoji jednu kocku i stavi ju u praznu kutiju. Zatim uzima jednu po jednu kocku i oboji neke njene strane zelenom bojom, ali tako da se ta kocka razlikuje od svih koje su već u kutiji, te i tu kocku stavlja u kutiju. Koliko najviše kocki može biti u kutiji?

6. Polumjer opisane kružnice jednakokračnog trokuta s osnovicom duljine a i krakovima duljine b iznosi R. Dokaži da vrijedi jednakost $a^2R^2 + b^4 = 4b^2R^2$, bez obzira je li trokut šiljastokutan, pravokutan ili tupokutan. **7.** Ana ima četiri puta toliko godina koliko je imao Petar kada je Ana imala toliko godina koliko Petar ima sada. Kada Petar bude imao toliko godina koliko Ana ima sada, oboje zajedno će imati 95 godina. Koliko godina ima Ana, a koliko Petar?

8. Odredi sve parove prostih prirodnih brojeva p i q za koje postoji cijeli broj a takav da vrijedi $a^4 = pa^3 + q$.

2013.

1. Odredi realni broj a tako da $x = \frac{1}{2}$ bude rješenje jednadžbe

$$\left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{x+1} - \frac{4x^2}{x^2-1}\right)\left(\frac{1}{a^3+a^2} - \frac{1-a}{a^2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Na ispitu iz matematike rješava se 40 zadataka. Točan odgovor vrijedi 15 bodova, a netočan -4 boda. Dinko je riješio sve zadatke, no nažalost neke pogrešno. Koliko je pogrešnih odgovora dao, ako je ukupno imao 353 boda?

3. Duljine kateta pravokutnog trokuta su 6 cm i 8 cm. Koliki je polumjer tom trokutu opisane kružnice?

4. Samo je jedan djelitelj broja $3^{12}-1$ veći od 70 i manji od 80. Odredi ga.

5. Dan je pravilni 2013-erokut $A_1A_2\ldots A_{2013}$. Neka je S sjecište dužina $\overline{A_1A_4}$ i $\overline{A_3A_5}$. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle A_3SA_4$.

6. Odredi najmanji prirodni broj n tako da je polovina od n kvadrat nekog prirodnog broja, trećina od n kub nekog prirodnog broja, a petina od n peta potencija nekog prirodnog broja.

7. Ivica i Marta imaju dva identična seta od pedeset karata s različitim simbolima. Svaki od njih promiješa svoj set karata. Potom Ivica stavi na stol svoj set karata, a zatim Marta stavi svoje karte na Ivičine. Ivica zatim broji koliko je karata između pojedine dvije identične karte, za svaki od 50 parova identičnih karata, te zbraja dobivene brojeve. Koje sve rezultate Ivica može dobiti?

2014.

1. Dokaži da je broj 2012^9+2016^9 djeljiv s 2014.

2. Pravilni šesterokut i jednakostranični trokut imaju isti opseg. Koliki je omjer njihovih površina?

3. U kutiji se nalazi po k loptica s oznakom k za sve $k=1,2,\ldots,50$ (dakle jedna loptica s oznakom 1, dvije loptice s oznakom 2, ..., 50 loptica s oznakom 50). Iz kutije se izvlače loptice bez gledanja. Koliko je najmanje loptica potrebno izvući da bismo bili sigurni da je izvučeno barem 10 loptica s istom oznakom?

4. Neka su a i b različiti realni brojevi i neka je $s=a-b$ i $t=a^3-b^3$. Izrazi $(a+b)^2$ s pomoću s i t.

5. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva koji su sastavljeni od međusobno različitih znamenaka iz skupa $\{0,1,2,3,4,5\}$ i djeljivi su s 5?

6. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je

$$3^{2n+1}-4^{n+1}+6^n$$

prost broj.

7. Neka je ABC trokut u kojem je najdulja stranica $\overline{BC}$, a kut $\sphericalangle BCA$ tri puta veći od kuta $\sphericalangle ABC$. Simetrala vanjskog kuta kod vrha A siječe pravac BC u točki A_0, a simetrala vanjskog kuta kod vrha B siječe pravac AC u točki B_0. Ako je $|AA_0| = |BB_0|$, odredi kutove danog trokuta.

2015.

1. Odredi prirodni broj n takav da mu je zbroj najmanja dva djelitelja 6, a zbroj najveća dva djelitelja 1122.

2. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a^3 + b^3 = 2ab(a+b)$. Odredi $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$.

3. Površina presjeka većeg i manjeg kvadrata iznosi dvije trećine površine manjeg kvadrata, a također i jednu petinu površine njihove unije. Odredi omjer duljina stranica većeg i manjeg kvadrata.

4. U ravnini je nacrtano sto kružnica s istim središtem polumjera $1, 2, \ldots, 100$. Najmanji krug obojan je crvenom bojom, a svaki od 99 kružnih vijenaca omeđenih dvjema kružnicama crvenom ili zelenom bojom tako da su susjedna područja različitih boja.

Odredi ukupnu površinu zeleno obojanih područja.

5. Neka je I središte upisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC i neka je $|AC| > |BC|$. Simetrala kuta i visina iz vrha C sijeku se pod kutom od $10°$. Ako je $\sphericalangle AIB = 120°$, odredi kutove trokuta ABC.

6. Postoji li prirodan broj n takav da je $n^2 + 2n + 2015$ kvadrat nekog prirodnog broja?

7. Na nogometnom turniru sudjeluje pet ekipa koje igraju svaka sa svakom točno jednom. Pobjeda donosi 3 boda, poraz 0 bodova, a neriješeno 1 bod. Može li se dogoditi da na kraju turnira, u ukupnom poretku, svaka ekipa osim posljednje ima točno dva boda više od sljedeće?