ŠKOLSKA (GRADSKA) NATJECANJA

1993.

1. Ako su x i y realni brojevi takvi da je $x^2 + y^2 = 1$, dokažite da je tada

$$-\sqrt{2} \leqslant x + y \leqslant \sqrt{2}.$$

2. Riješite jednadžbu

$$\log_{0.125}(2x) - 4\log_{0.25} x \cdot \log_8 x = 0.$$

3. Izvan kvadrata $ABCD$ izabrana je točka O takva da je $|OA| = |OB| = 5$ cm, i $|OD| = \sqrt{13}$ cm. Kolika je površina kvadrata?

4. Dokažite da je za svaki prirodan broj n $\operatorname{Re}(1 + i\sqrt{2})^n$ neparan broj.

1994.

1. Zadan je trokut ABC. Neka je B_1 točka na visini tog trokuta povučenoj iz vrha B takva da je $\sphericalangle AB_1C = 90°$, a C_1 točka na visini tog trokuta povučenoj iz vrha C takva da je $\sphericalangle AC_1B = 90°$. Dokažite da je $|AB_1| = |AC_1|$.

2. U skupu kompleksnih brojeva nađite rješenje sustava jednadžbi:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|$$
$$z_1 + z_2 + z_3 = 1$$
$$z_1 z_2 z_3 = 1.$$

3. Nađite sve parove kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$(1 + x + y)(1 + x^2 + y^2) + xy(1 + xy) - x^3 - y^3 = 0.$$

4. Riješite jednadžbu

$$\frac{1}{2^{2x} + 3} \geqslant \frac{1}{2^{x+2} - 1}.$$

1995.

1. Dokažite da je izraz

$$\sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{17 - 12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}}$$

racionalan broj.

2. Dokažite da jednadžba $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ ima realne korijene x_1 i x_2 za bilo koje realne koeficijente a, b i c te da su a i c korijeni jednadžbe $(y - x_1)(y - x_2) + b^2 = 0$.

3. Neka je z kompleksan broj takav da je $|z| = 2$. Odredite minimum i maksimum izraza

$$\left| z - \frac{1}{z} \right|.$$

4. Unutar trokuta ABC nalazi se točka R. Paralela sa stranicom $\overline{AB}$ kroz R siječe stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ u točkama M i N, paralela sa stranicom $\overline{AC}$ kroz R siječe $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ u točkama E i F, a paralela sa stranicom $\overline{BC}$ kroz R siječe $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u K i P. Površine trokuta NER, PMR i FKR iznose redom a^2, b^2, c^2. Odredite površinu trokuta ABC.

1996.

1. Dokažite da je trokut jednakostraničan ako i samo ako je zbroj duljina njegovih visina jednak deveterostrukom polumjeru njegove upisane kružnice.

2. Odredite brojeve p i q, ako je poznato da je razlika korijena jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ jednaka 5, a razlika njihovih kubova 35.

3. Neka je $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Pokažite da je:

$$(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

4. U trokutu ABC poznate su duljine stranica $b = |AC|$ i $c = |AB|$ i $\sphericalangle ABC = 3\sphericalangle BCA$. Na stranici $\overline{AC}$ odabrane su točke D i E takve da je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBE = \sphericalangle EBC$. Izrazite s pomoću b i c duljine dužina $\overline{AD}$, $\overline{DE}$ i $\overline{EC}$.

1997.

1. Dokažite da svaki pravac koji prolazi središtem upisane kružnice trokuta dijeli opseg i površinu tog trokuta u istom omjeru.

2. Ako su koeficijenti a, b, c takvi da je $a > 0$ i $b > a + c$, dokažite da jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva različita rješenja.

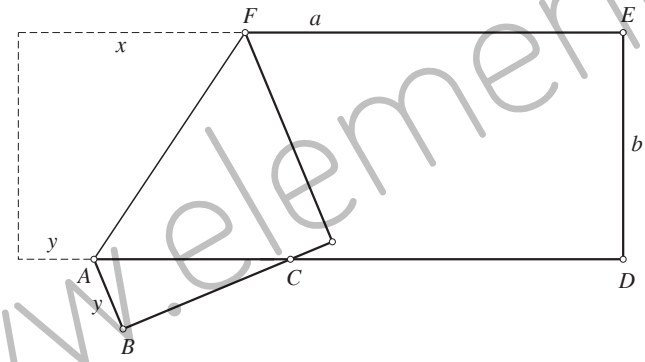
3. Ako su a i b kompleksni brojevi, dokažite da vrijedi jednakost:

$$|1 - a\overline{b}|^2 - |a - b|^2 = (1 + |ab|)^2 - (|a| + |b|)^2.$$

4. Dane su dvije kružnice k_1 i k_2 koje nemaju zajedničkih točaka. Zajedničke vanjske tangente, t_1 i t_2, diraju kružnicu k_1 u točkama A_1 i A_2, a kružnicu k_2 u točkama B_1 i B_2. Zajedničke unutarnje tangente, p_1 i p_2, diraju kružnicu k_1 u točkama C_1 i C_2, a kružnicu k_2 u točkama D_1 i D_2. Dokažite da je udaljenost pravaca A_1A_2 i C_1C_2 jednaka udaljenosti pravaca B_1B_2 i D_1D_2.

1998.

1. List papira stranica duljina a i b presavijen je kao na slici. Izračunajte površinu trokuta ABC, ako je $a = 8$, $b = 3$, $x = 3$ i $y = 1$.



2. Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi za koje je

(i) $z_1 z_2 z_3 = 1$,

(ii) $z_1 + z_2 + z_3 = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3}$.

Dokažite da je barem jedan od njih jednak 1.

3. Riješite jednadžbu:

$$x = 1 - 1998(1 - 1998x^2)^2, \quad x \in \mathbf{C}.$$

4. Zadana je funkcija $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + (a+1)x + 1$, $a \in \mathbf{R}$.

a) Odredite a tako da bude $\left|\dfrac{f(x)}{x^2 + x + 1}\right| < 3$, za svaki $x \in \mathbf{R}$.

b) Odredite uvjete uz koje je graf funkcije $y = |f(x)|$ parabola.

c) Nađite geometrijsko mjesto tjemena svih parabola $y = |f(x)|$. Nacrtajte sliku!

1999.

1. Odredite sve parove prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1999}.$$

2. Ako je $abc \neq 0$, da li je moguće da svaka od ove tri jednadžbe

$$ax^2+bx+c=0,$$
$$cx^2+ax+b=0,$$
$$bx^2+cx+a=0,$$

ima realna rješenja?

3. Neka je ABC trokut kod kojeg je $|AB|<|AC|$ i neka je D polovište onog luka $\overset{\frown}{BC}$ kružnice opisane tom trokutu na kojem leži točka A. Dokažite da za nožište E, okomice iz točke D na stranicu $\overline{AC}$, vrijedi jednakost

$$|AB|+|AE|=|EC|.$$

4. Prikažite u kompleksnoj ravnini skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi

$$|z+c|=|z-c|,$$

gdje je $c \neq 0$ zadani kompleksni broj.

2000.

1. Za realan broj $a \geq 1$ riješite jednadžbu

$$z+a|z+1|+i=0, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Diskusija!

2. Neka je $a+b+c>0$ i neka jednadžba $ax^2+bx+c=0$ nema realnih rješenja. Dokažite da je $c>0$.

3. Konstruirajte trapez $ABCD$, ako je zadan zbroj duljina osnovica, $|AB|+|CD|$, duljine dijagonala $|AC|$ i $|BD|$ i kut pri vrhu A.

4. Dokažite da postoji barem 2000 trojki prirodnih brojeva (a,b,c) takvih da je $a^{15}+b^{15}=c^{16}$.

2001.

1. Brojevi x i y zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$x+y+\frac{x}{y}=19,$$
$$\frac{x(x+y)}{y}=60.$$

Koje sve vrijednosti može poprimiti $x+y$?

2. Trokutu ABC sa stranicama duljina $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$ opisana je kružnica. Tangenta na tu kružnicu u točki C okomita je na stranicu $\overline{AB}$. Dokažite da je

$$(a^2-b^2)^2=c^2(a^2+b^2).$$

3. Izračunajte vrijednost umnoška

$$\left(1+\frac{1+i}{2}\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right)\ldots$$
$$\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^k}\right)\ldots\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^{2001}}\right).$$

4. Riješite sustav jednadžbi:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=9,$$
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=1,$$

gdje je n prirodan broj, a x_1, x_2, $\ldots$, x_n su pozitivni realni brojevi.

2002.

1. Neka je K polovište hipotenuze $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC i M točka na kateti $\overline{BC}$, takva da je $|BM| = 2|MC|$. Dokažite da je $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MKC$.

2. Ako su a i b realni brojevi, različiti od nule, nađite sva rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}.$$

3. Ako je $ax^3 = by^3 = cz^3$ i $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, dokažite jednakost

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

4. Neka su a, b, c, d cijeli brojevi. Dokažite da je umnožak razlika $b-a$, $c-a$, $d-a$, $c-b$, $d-b$, $c-d$ djeljiv s 12.

2003.

1. Na skupu realnih brojeva definirana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2-2x+1}}.$$

Odredite $f(1) + f(2) + \ldots + f(2003)$.

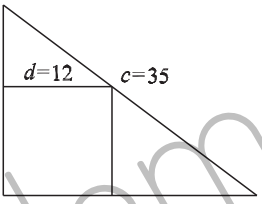
2. U jednakostraničnom trokutu ABC dane su točke $D \in \overline{AB}$ i $E \in \overline{BC}$ takve da je $|AD| = \frac{1}{3}|AB|$ i $|BE| = \frac{1}{3}|BC|$. Pravci AE i CD sijeku se u točki P. Koliki je kut $\sphericalangle BPC$?

3. Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi modula 1. Dokažite da je

$$\frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2}$$

realan broj.

4. U pravokutan trokut s hipotenuzom duljine $c = 35$ upisan je kvadrat sa stranicom duljine $d = 12$, kao na slici. Odredite duljine kateta tog trokuta.



2004.

2.1. Ako su duljine dviju visina trokuta 10 i 6, dokažite da je duljina treće manja od 15.

2.2. Dokažite da su za svaki prirodan broj n rješenja kvadratne jednadžbe

$$2nx^2 - 2(n^2 + 1)x - n^2 - 1 = 0,$$

iracionalni brojevi.

2.3. Odredite sva rješenja jednadžbe $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$.

2.4. Trokut ABC je jednakokračan ($|AB| = |AC|$), a točka D je na onom luku $\overset{\frown}{BC}$ trokutu opisane kružnice koji ne sadrži vrh A. Nadalje, točka E je sjecište pravca CD i okomice iz vrha A na taj pravac. Dokažite da vrijedi:

$$|BD| + |DC| = 2|DE|.$$

2005.

1. Dani su kompleksni brojevi $z = \dfrac{2t - i}{t + i}$ za $t \in \mathbf{R}$.

a) Koje sve vrijednosti može poprimiti $|z|$?

b) Odredite skup parametara t za koje vrijedi

$$|3 \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| < 3.$$

2. Nađite sve realne brojeve x, y koji zadovoljavaju jednadžbu

$$(x^2 + y^2 - 4)^2 (xy - 1)^2 + \sqrt{y^2 - x^2} = 0.$$

3. U jednakokračnom trokutu jedakn kut iznosi 108°. Dokažite da je omjer duljinâ osnovice i kraka tog trokuta jednak $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

4. Nađite koeficijente a i b takve da polinom $ax^5 + bx^4 + 1$ bude djeljiv s $x^2 - x - 1$.

2006.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi:

$$\operatorname{Re} z = 5 \cdot \operatorname{Im} z \qquad \text{i} \qquad |z - (a + ib)| = 5,$$

gdje su a i b ($a > b$) rješenja kvadratne jednadžbe

$$(x - 1)^2 + 3(x - 1) - 4 = 0.$$

2. U drugim razredima neke škole ima između 100 i 300 učenika. Za vrijeme jedne priredbe ravnatelj ih je namjeravao postaviti u redove. Ako bi ih stavio u 8 redova, jedan bi učenik bio viška. Ako bi ih stavio u 7 redova, dva bi učenika bila viška. Ako bi ih stavio u 6 redova, preostalo bi 5 učenika. Koliko ima ukupno učenika u drugim razredima te škole?

3. Ako je

$$ax^3 = by^3 = cz^3 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$

pokaži da je

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

4. U ovisnosti o pozitivnom realnom parametru p riješi nejednadžbu:

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2.$$

5. Stranica $\overline{BC}$ trokuta ABC dira njegovu upisanu kružnicu u točki D, a tom trokutu pripisana kružnica uz stranicu $\overline{BC}$ dira tu stranicu u točki E. Dokaži da su točke D i E simetrične u odnosu na polovište stranice $\overline{BC}$.

(Trokutu pripisana kružnica je kružnica koja dodiruje jednu stranicu trokuta i produžetke drugih dviju stranica.)

2007.

1. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{x+7}.$$

2. Ako je $z + \frac{1}{z} = 1$, koliko je $z^{2007} + \frac{1}{z^{2007}}$?

3. Ako su oba rješenja jednadžbe $2x^2 + mx + 2 - n = 0$ cijeli brojevi različiti od 0, dokaži da je $\frac{m^2 + n^2}{4}$ složen cijeli broj!

4. Odredi sve realne parametre m za koje funkcija

$$f(x) = x^2 + (m+3)x + (m+2)$$

zadovoljava sljedeća dva uvjeta:

a) $f(x) < 0$ za sve $x \in \langle -1, 3 \rangle$;

b) zbroj recipročnih vrijednosti nul-točaka manji je od $\frac{1}{3}$.

5. Neka je $ABCD$ pravokutnik sa stranicama duljina 20 i 15. Kroz točku C prolazi kružnica sa središtem u vrhu A zadanog pravokutnika. Odredi duljinu one tetive kružnice koja sadrži dijagonalu $\overline{BD}$.

2008.

1. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe:

$$x^3 - y^3 = 91.$$

2. Za koje vrijednosti broja m vrijedi

$$-3 < \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

za svaki realni broj x?

3. Za koje sve kompleksne brojeve z je broj z^3 realan i veći od 27?

4. Neka je $ABCD$ paralelogram, E polovište stranice $\overline{AB}$, F polovište stranice $\overline{BC}$ i P sjecište dužina $\overline{EC}$ i $\overline{FD}$. Dokaži da dužine $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ i $\overline{DP}$ dijele paralelogram na trokute čije se površine u nekom poretku odnose kao $1 : 2 : 3 : 4$.

5. Sjecišta dijagonala pravilnog peterokuta određuju manji peterokut. Odredi omjer duljina stranica manjeg i većeg peterokuta.

2009.

1. Skrati razlomak:

$$\frac{(2^{n-1} + 1)^2 - 4^{n-1}}{4^n + 2^{n+1} + 1}.$$

2. U pravokutnom trokutu duljina visine na hipotenuzu je $4\,\text{cm}$, a duljina težišnice iz vrha pravog kuta $5\,\text{cm}$. Odredi zbroj duljina kateta tog trokuta.

3. U trokutu ABC poznati su kutovi $\sphericalangle CAB = 35^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Ako je t tangenta na kružnicu opisanu tom trokutu s diralište m u vrhu C, a p paralela s pravcem AB kroz vrh C, odredi kut između pravaca p i t.

4. Dani su kompleksni brojevi $z = 7 - i$, $w = -3 + 4i$. Odredi $\left|\dfrac{z^{20}}{\overline{w}^{10}}\right|$.

5. Neka su x_1, x_2 različita rješenja jednadžbe $2x^2 - 3x + 4 = 0$. Izračunaj $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}$.

6. Žicu duljine 1 m treba razrezati i od dobivenih dijelova napraviti jedan jednakostranični trokut i jedan kvadrat. Cijelu žicu treba iskoristiti. Odredi duljinu stranice trokuta i duljinu stranice kvadrata tako da zbroj površina trokuta i kvadrata bude što manji.

7. Odredi prirodne brojeve a, b i c tako da vrijedi jednakost $(a + bi)^3 - 107i = c$. (i je imaginarna jedinica.)

8. Odredi $a > 0$ tako da površina lika omeđenog grafovima funkcija

$$y = |ax - 3| + |ax + 3| \qquad \text{i} \qquad y = 10$$

bude jednaka 8.

2010.

1. Odredi zbroj svih pozitivnih djelitelja broja 2010.

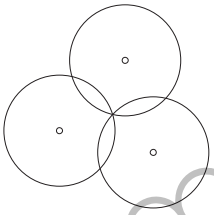
2. Dane su dvije kvadratne jednadžbe

$$x^2 + ax + 1 = 0, \qquad x^2 + x + a = 0.$$

Odredi sve vrijednosti parametra a za koje te jednadžbe imaju barem jedno zajedničko rješenje.

3. Žicom duljine 10 km treba ograditi pravokutno zemljište koje s jedne strane ima ravni zid (žicu je potrebno koristiti za preostale tri stranice), tako da površina tog zemljišta bude najveća moguća. Kolika je površina tako ograđenog zemljišta?

4. Tri kruga polumjera $1\,\text{cm}$ imaju točno jednu zajedničku točku, a njihova središta vrhovi su jednakostraničnog trokuta. Odredi površinu skupa svih točaka koje pripadaju dvama od tih krugova.



5. Dvadeset i četiri točke raspoređene su u šest stupaca i četiri retka, kao na slici. Pokaži da se od danih točaka može odabrati njih točno dvanaest tako da nikoje četiri od njih nisu vrhovi pravokutnika sa stranicama paralelnim danim retcima i stupcima.

6. Neka je $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Izračunaj:

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^k + \ldots + z^{2010}.$$

7. Dvije kružnice sijeku se u točkama P i Q. Ako dva pravca koja prolaze kroz točku Q sijeku prvu kružnicu u točkama A i B, a drugu kružnicu u točkama C i D, dokaži da su trokuti PAB i PCD slični.

8. Odredi sve cijele brojeve x za koje je $x^2 + 3x + 24$ kvadrat nekoga cijeloga broja.

2011.

1. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $\frac{n-1}{n-5}$ cijeli broj.

2. Neka je $ABCD$ kvadrat stranice 1. Kružnica k ima polumjer 1 i središte u točki C. Odredi polumjer kružnice k_1 koja dira kružnicu k i dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$.

3. Odredi sve realne brojeve a takve da, za svaki realan broj x, vrijedi

$$\frac{x}{x^2+2x+3} > \frac{x+a}{1+x+x^2}.$$

4. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$|z| = |z+1| = \left|\frac{1}{z}\right|.$$

5. Mario je napisao 30-znamenkasti prirodni broj čiji je zbroj znamenaka 123. Zatim je iza tog broja dopisao još jednom sve njegove znamenke u nekom drugom poretku. Dokaži da dobiveni 60-znamenkasti broj nije kvadrat prirodnog broja.

6. Neka su a, b i c tri različita realna broja od kojih niti jedan nije jednak nula. Promatramo kvadratne jednadžbe:

$$ax^2+bx+c=0, \quad bx^2+cx+a=0, \quad cx^2+ax+b=0.$$

Ako je $\frac{c}{a}$ rješenje prve jednadžbe, dokaži da sve tri jednadžbe imaju zajedničko rješenje. Odredi umnožak drugih triju rješenja tih jednadžbi (ne-zajedničkih).

7. U četverokutu $ABCD$ vrijedi

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ, \quad |AB| = |BC|, \quad |CD| + |DA| = m.$$

Odredi površinu četverokuta $ABCD$ u ovisnosti o m.

8. Ivan, Stipe i Tonći izmjenjuju se u bacanju kockice. Prvi baca Ivan, onda Stipe pa Tonći, i nakon toga opet Ivan i tako dalje istim redom. Svaki od njih, kad je njegov red, baca kockicu jednom, sve dok ne dobije prvu "šesticu". Nakon što dobije svoju prvu šesticu, u svakom idućem bacanju Ivan baca kockicu četiri, Stipe šest, a Tonći osam puta.

Tonći je zadnji dobio prvu šesticu, u svom desetom bacanju, i tada je igra završila. Ako je kockica bačena 47 puta, odredi tko je od njih kockicu bacao najviše puta.

2012.

1. Za koje vrijednosti realnog parametra m jednadžba

$$(m-1)x^2 - 2mx + 2 = 0$$

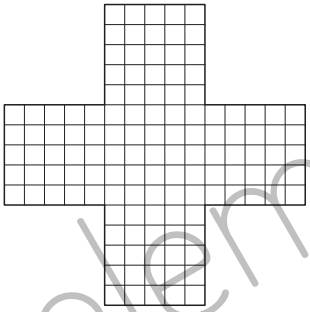
nema negativnih realnih rješenja?

2. Ante je napisao redom sve prirodne brojeve od 1 do 40, jednog za drugim bez razmaka i tako dobio mnogoznamenkasti broj $12345\ldots383940$. Zatim je odlučio obrisati 60 znamenaka tog broja. Koji najveći broj Ante može dobiti na taj način?

3. Trokut površine $1.5\ \mathrm{cm}^2$ upisan je u kružnicu polumjera $1.25\ \mathrm{cm}$ i pritom je jedna stranica trokuta promjer te kružnice. Kolike su duljine stranica tog trokuta?

4. Za koje $x \in \mathbf{R}$ je broj $\sqrt[3]{4+4x}$ veći od broja $1+\sqrt[3]{x}$?

5. Lik  koji se sastoji od pet jediničnih kvadratića zovemo "*plus*". Na koliko se načina *plus* može smjestiti na *ploču* istog oblika koja se sastoji od $5 \cdot 5^2$ jediničnih kvadratića, tako da prekriva točno pet jediničnih kvadratića?



6. Odredi sve prirodne brojeve manje od 1000 koji su jednaki zbroju kvadrata svojih znamenaka.

7. Odredi i skiciraj u kompleksnoj ravnini skup svih brojeva z koji zadovoljavaju uvjet

$$\mathrm{Re}\left[(4+3i)z^2\right] \geqslant 0.$$

8. U šiljastokutnom trokutu ABC točka M je nožište visine iz vrha A, a točka N nožište visine iz vrha B. Ako je $|AN| = |NM|$, dokaži da središte upisane kružnice trokuta ABC leži na visini $\overline{BN}$.

2013.

1. Koji broj ima više djelitelja u skupu prirodnih brojeva, 2013^2 ili $20\,480$?

2. Odredi kompleksni broj z takav da je

$$\operatorname{Re}\frac{1}{1-z} = 2 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im}\frac{1}{1-z} = -1.$$

3. Neka je ABC pravokutan trokut i $\overline{CN}$ njegova visina. Ako je $|AC| = |BN| = 1$, kolika je duljina hipotenuze $\overline{AB}$?

4. Dokaži da zbroj svih troznamenkastih brojeva čiji se dekadski zapis sastoji od tri različite znamenke različite od nule ima barem tri različita prosta djelitelja.

5. U koordinatnom sustavu označene su sve cjelobrojne točke (x, y) pri čemu je $1 \leq x \leq 200$ i $1 \leq y \leq 100$, ukupno $20\,000$ točaka. Koliko ima dužina duljine $\sqrt{5}$ čiji su krajevi označene točke?

6. Neka je $0 < a < b < c < d$ i neka svaka od kvadratnih funkcija $p(x) = x^2 + dx + a$ i $q(x) = x^2 + cx + b$ ima dvije različite realne nul-točke. Dokaži da su sve četiri nul-točke međusobno različite.

7. Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je S sjecište njegovih dijagonala. Simetrala kuta $\sphericalangle ADC$ raspolavlja dužinu $\overline{AS}$ i siječe pravac BC u točki E. Odredi omjere $|BE| : |BC|$ i $|AB| : |BC|$.

2014.

1. Učenici su odlučili igrati igru s ukupno 960 žetona. Najprije su podijelili sve žetone tako da svatko od njih ima isti broj žetona. Čim su to napravili, stigao je njihov nastavnik te se poželio priključiti igri. Svaki učenik mu je dao po 4 žetona, pa su svi imali jednak broj žetona i bili su spremni za početak igre. Koliko učenika sudjeluje u igri?

2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\left|z^2 - i\right| = 1 \quad \text{i} \quad |z| = \sqrt{2}.$$

3. Neka su a, b i c cijeli brojevi i $a \neq 0$. Može li diskriminanta kvadratne funkcije

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

biti jednaka 51?

4. Vrhovi peterokuta $ABCDE$ leže na istoj kružnici. Ako je $\sphericalangle CAD = 50^\circ$, odredi

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle AED.$$

5. Neka je A broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 105, a B broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 147. Odredi omjer $A : B$.

6. U trokut ABC upisan je romb $AKLM$ tako da točka K leži na $\overline{AB}$, točka L na $\overline{BC}$, a točka M na $\overline{CA}$. Ako je duljina stranice tog romba $2\sqrt{2}$, površina trokuta LMC iznosi 3, a površina trokuta KLB iznosi 4, dokaži da je $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

7. Neka je a prirodni broj te b i c cijeli brojevi, takvi da jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva različita rješenja u intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right]$. Dokaži da je $a \geqslant 6$.

2015.

1. Dokaži sljedeću tvrdnju: ako je z kompleksni broj za koji je $\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=0$, onda je $|z|=1$.

2. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokaži da je $\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAO$.

3. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od $1\,000\,000$ koji su kvadrati prirodnih brojeva, a daju ostatak 4 pri dijeljenju sa 8?

4. Zbroj kvadrata svih rješenja jednadžbe $x^4+ax^2+b=0$ jednak je 32, a umnožak svih rješenja te jednadžbe je 4. Odredi a i b.

5. U četverokutu $ABCD$ zadano je $|AB|=6$, $|BC|=9$, $|CD|=18$ i $|AD|=5$. Odredi duljinu dijagonale $\overline{AC}$ ako je poznato da je ta duljina prirodni broj.

6. Žicom duljine d treba ograditi zemljište u obliku kružnog isječka tako da površina tog zemljišta bude najveća moguća. Kolika je površina tako ogradenog zemljišta?

7. Na košarkaškom turniru svaka od ekipa igra točno dva puta sa svakom od ostalih ekipa. Pobjeda donosi 2 boda, poraz 0 bodova, a neriješenog rezultata nema. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji košarkaški turnir s n ekipa na kojem je jedna ekipa, pobjednik turnira, imala 26 bodova, a točno dvije ekipe najmanji broj bodova, i to 20 bodova.