ŠKOLSKA (GRADSKA) NATJECANJA

1993.

1. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu:

$$z^5 + \overline{z} = 0.$$

2. Nađite broj realnih rješenja jednadžbe:

$$\sin x = \frac{x}{1993\pi}.$$

3. Od 1993 dana vektora različitih smjerova niti jedan nije paralelan sa zbrojem svih preostalih vektora. Može li zbroj svih danih vektora biti nul-vektor?

4. Izračunajte zbroj

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + 1993 \cdot 2^{1992}.$$

1994.

1. U točkama parabole $y^2 = 12x$ s ordinatama $2, 6, -3$ povučene su tangente. Koliki je omjer površina trokuta kojeg tvore te tri točke i trokuta kojeg tvore sjecišta tangenata na parabolu u tim točkama?

2. Ako je $x_1 = 1$ i $x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, dokažite da je

$$x_{1994}^2 + x_{1994} < 1.$$

3. Nađite sve strogo rastuće funkcije $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, takve da je $f^{-1} = f$.

4. Može li se ploča 8×8 bez kutnih polja prekriti s 15 pločica oblika  ili  ?

1995.

1. Za broj $x \in (1,2)$ definiran je niz

$$a_0 = 1, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{\log_x 2} + 1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dokažite da je $a_n < \log_{\frac{2}{x}} 2$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

2. Dana je pravilna trostrana prizma. Odredite kut između dijagonale pobočke i pravca koji prolazi težištem osnovice i polovištem nasuprotnog bočnog brida. Poznato je da se stranica osnovice i visina prizme odnose kao $1 : \sqrt{3}$.

3. Pravci $x + y + 4 = 0$ i $7x - y + 4 = 0$ tangente su kružnice čije je središte na pravcu $4x + 3y - 2 = 0$. Nađite jednadžbu te kružnice.

4. Neka je z kompleksan broj takav da je $|z| = 1$. Dokažite da je

$$2 \leq |z-1| + |z+1| \leq 2\sqrt{2}.$$

Kada vrijede znakovi jednakosti?

1996.

1. Neka je $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ funkcija sa skupa pozitivnih cijelih brojeva u skup realnih brojeva takva da vrijedi:

a) $f(1) = 1$,

b) $f(1) + 2f(2) + 3f(3) + \ldots + nf(n) = n(n+1)f(n)$ za $n \geqslant 2$.

Nađite $f(1996)$.

2. Zadana su prva tri člana geometrijskog niza $1,\ q,\ q^2 \quad (q > 0,\ q \neq 1)$.

a) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ tako da kvadrati brojeva $1 - x,\ q - x,\ q^2 - x$ čine aritmetički niz, a zatim ispitajte predznak od x za razne vrijednosti q.

b) Izrazite razliku tog aritmetičkog niza kao funkciju od q. Koji uvjet zadovoljava q ako je ovaj niz rastući?

3. Neka su točke $A_i(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, 3, 4$ na hiperboli $xy = 1$. Dokažite tvrdnju: ako su sve četiri točke na istoj kružnici, onda je $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1$.

4. Nađite kut između težišnica $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ strana ABC i SAC pravilnog tetraedra $SABC$.

1997.

1. Odredite jednadžbu pravca p koji prolazi točkom $T(-1, 1)$, a polovište segmenta kojeg na p odsjecaju pravci $x + 2y - 1 = 0$ i $x + 2y - 3 = 0$ leži na pravcu $x - y - 1 = 0$.

2. Nađite sve prirodne brojeve x za koje je

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\ldots(1+a^{2^n}),$$

gdje je a realan i n prirodan broj.

3. Neka je $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots, p_n \ldots$ niz svih prostih brojeva poredanih po veličini. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$p_n \geqslant 3n - 5.$$

4. Na koji način treba staviti dva predmeta u dvije različite ladice okruglog stola s n ($n \geqslant 5$) ladica, tako da vjerojatnost nalaženja barem jednog predmeta otvaranjem dviju susjednih ladica bude najmanja?

1998.

1. Polovištem tetive parabole $y^2 = \frac{8}{3}x$, koja leži na pravcu $4x - 3y - 12 = 0$, povučena je paralela s x-osi. Sjecištem te paralele i parabole povučena je na nju tangenta. Pokažite da je ona paralelna sa zadanom tetivom.

2. Dokažite da je za svaki cijeli broj $n \geqslant 0$, broj

$$7^{2n+1} + 2 \cdot 13^{2n+1} + 17^{2n+1},$$

djeljiv s 50.

3. Koliko ima strogo rastućih aritmetičkih nizova čiji su svi članovi pozitivni cijeli brojevi, a zbroj prvih 37 jednak je 1998?

4. U trostranoj piramidi duljina točno jednog brida je veća od 1. Pokažite da njezin obujam nije veći od $\frac{1}{8}$.

1999.

1. Nađite duljinu zajedničke tetive kružnica

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0.$$

Koliko ima zajedničkih tangenata? Nađite njihove jednadžbe, kao i udaljenosti između njihovih dirališta s kružnicama.

2. a) Rastavite na faktore izraz $n^4 + 4$.

b) Dokažite da je

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{313}.$$

3. Neka je $0<a<b<c<d$. Dokažite da je $a^b b^c c^d d^a \geqslant b^a c^b d^c a^d$.

4. Niz $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ definiran je ovako:

$$a_1 = 1,$$
$$a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}), \quad n>1.$$

Odredite a_{1999}.

2000.

1. Nađite sve četveroznamenkaste brojeve koji su jednaki kvadratu nekog cijelog broja, a imaju svojstvo da su im znamenke desetica i tisućica jednake, dok im je znamenka stotica za 1 veća od znamenke jedinica.

2. Ako su a, b i c duljine stranica trokuta, takve da je $a+b=3c$, dokažite jednakost

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=2.$$

3. U elipsu $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ (sa središtem u ishodištu), upisan je trokut ABC tako da je tangenta na elipsu u svakom njegovom vrhu paralelna s nasuprotnom stranicom trokuta. Kolika je površina tog trokuta ako je $C=(0,b)$?

4. Dokažite da je

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

neparan broj za svaki pozitivan cijeli broj n.

2001.

1. Točka $(0,3)$ je na paraboli $f(x) = x^2 + px + q$. Tangenta parabole u toj točki ima koeficijent smjera $k = -1$. Odredite njezinu jednadžbu.

2. Zadan je niz $0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21\ldots$ kod kojeg se razlika susjednih članova uvećava za 1.

a) Odredite opći član niza.

b) Odredite zbroj prvih n članova niza, za prirodan broj n.

3. Nađite sve funkcije $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednadžbu

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x.$$

4. Oko okruglog stola sjedi m žena i n muškaraca ($m+n \geq 3$). Kada, u ovisnosti o m i n, možemo sa sigurnošću tvrditi da postoji osoba koja sjedi između dva muškarca?

2002.

1. Nađite geometrijsko mjesto točaka iz kojih se na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ mogu povući dvije uzajamno okomite tangente.

2. Na krakovima šiljastog kuta α s vrhom A dane su točke D i E, tako da je $|AD| = m$ i $|AE| = n$. U točkama D i E povučene su okomice na krakove kuta na kojima leže. Ako se te dvije okomice sijeku u točki F u unutrašnjosti kuta, dokažite da je

$$\frac{|DF|}{|EF|} = \frac{n - m\cos\alpha}{m - n\cos\alpha}.$$

3. Nađite sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2002} = 2002,$$
$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2002}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2002}^3.$$

4. Prvi član aritmetičkog niza (a_n), kojem su svi članovi prirodni brojevi, je $a_1 = 1$. Broj $4 = 2^2$ jest, a 2 nije član tog niza.

a) Dokažite da postoji jedan i samo jedan takav niz. Napišite njegov opći član.

b) Pokažite da je kvadrat svakog prirodnog broja, koji nije djeljiv s 3, član tog niza.

c) Provjerite da su brojevi 2002 i 2002^2 članovi tog niza. Odredite njihove indekse.

d) Obrazložite zaključak: kvadrat svakog člana niza je član niza. Vrijedi li obrat, tj. ako je kvadrat nekog broja član tog niza, onda je i taj broj član niza.

2003.

1. Nad stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, kvadrata $ABCD$ konstruirani su s vanjske strane jednakostranični trokuti BCE, CDF, DAG. Odredite, kao funkciju duljine a stranice kvadrata, obujam tijela koje nastaje rotacijom lika $BECFDGA$ oko pravca AB.

2. Neka je p realan broj. Odredite rješenja x_1, x_2, x_3 jednadžbe

$$x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0,$$

ako je poznato da su ona uzastopni članovi aritmetičkog niza.

3. Ako su α i β kutovi trokuta, dokažite nejednakost

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} \geqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

4. Nađite sve brojeve djeljive s 90 koji imaju točno 20 djelitelja.

2004.

1. Ako je z rješenje jednažbe $z^2 - z + 1 = 0$ izračunajte zbroj

$$z^{2004} + \frac{1}{z^{2004}}.$$

2. Ako su n i k prirodni brojevi, $k \leq n$, dokažite nejednakosti

$$\frac{n^k}{k^k} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

3. Kut između dva susjedna pobočna brida pravilne šesterostrane piramide jednak je kutu između pobočnog brida i baze. Odredite taj kut.

4. Za koje realne brojeve a postoji kompleksan broj z sa svojstvima:

$$|z + \sqrt{2}| = \sqrt{a^2 - 3a + 2} \qquad \text{i} \qquad |z + i\sqrt{2}| < a?$$

2005.

1. Na elipsi sa središtem O nalaze se točke A i B takve da je $\sphericalangle AOB = 90^\circ$. Dokažite da udaljenost točke O od pravca AB ovisi samo o duljinama poluosi elipse.

2. Ako su u trokutu duljine stranica a, b, c tri uzastopna člana aritmetičkog niza (u tom poretku), dokažite da za njegove kutove (α je kut nasuprot stranice a, γ nasuprot stranice c) vrijedi:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}.$$

3. Zadan je rastav skupa prirodnih brojeva:

$$\mathbf{N} = \{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10\} \cup \{11, 12, 13, 14, 15\} \cup \ldots$$

Ako je S_k zbroj svih k brojeva u k-tom skupu iz gornjeg rastava, dokažite da vrijedi

$$S_1 + S_3 + S_5 + \ldots + S_{2n-1} = n^4$$

za svaki prirodni broj n.

4. Na krivulji s jednadžbom $y = x^4 - 2x^2$ nalaze se 4 različite točke $T_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Ako točke T_1, T_2, T_3, T_4 leže na jednom pravcu, dokažite da je $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

2006.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \qquad \text{i} \qquad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

2. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

3. Ako točka P opisuje elipsu čiji su fokusi F_1 i F_2, koju krivulju opisuje težište trokuta F_1F_2P?

4. Ako su duljine stranica trokuta tri uzastopna člana aritmetičkog niza, dokaži da su tada kotangensi polovičnih kutova tog trokuta također uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza.

5. Stanovnici nekog grada igrali su igru *šalji dalje*. Na samom početku je jedan građanin poslao po jedno pismo sedmorici svojih sugrađana. Zatim su neki od građana koji su dobili pismo odustali od igre, a neki su poslali po jedno pismo sedmorici sugrađana koji još nisu sudjelovali u igri. Taj proces se ponavljao više puta i to tako da je svaki građanin koji je dobio pismo ili odustao od igre ili poslao pisma sedmorici novih ljudi. Nakon nekog vremena igra je prestala jer više nitko u gradu nije slao pisma. Dokaži da broj građana koji su odustali od igre ne može biti jednak 2006.

2007.

1. Kružnica je upisana u jednakostraničan trokut kojem je duljina stranice 6. Pokaži da za svaku točku T na toj kružnici vrijedi jednakost:

$$|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = 45.$$

2. Odredi za koju je vrijednost od x četvrti član razvoja binoma

$$\left(\sqrt{2^{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$$

20 puta veći od eksponenta binoma ako je binomni koeficijent četvrtog člana pet puta veći od binomnog koeficijenta drugog člana.

3. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva različitih od nule takav da vrijedi

$$x_n{}^2 - x_{n+1}x_{n-1} = 1, \qquad \forall n \geq 2.$$

Dokaži da izraz $\dfrac{x_{n+1} + x_{n-1}}{x_n}$ poprima istu vrijednost za svaki $n \geq 2$.

4. Dokaži da za svaki prirodni broj n i nenegativan realan broj a vrijedi nejednakost

$$n(n+1)a + 2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}).$$

5. Svi sedmeroznamenkasti brojevi sastavljeni od znamenki 1 do 7 (u svakom broju pojavljuje se svaka od tih znamenki) poredani su po veličini počevši od najmanjeg. Na kojem se mjestu nalazi broj 3 654 217?

2008.

1. Dokaži da je $\dfrac{(5n)!}{40^n n!}$ prirodan broj za svaki prirodan broj n.

2. Ako su $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokaži da su $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ također uzastopni članovi aritmetičkog niza.

3. Zadana je elipsa s jednadžbom $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Dokaži da sva sjecišta po dvije međusobno okomite tangente ove elipse leže na istoj kružnici.

4. Odredi zbroj svih peteroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite i koji su zapisani samo znamenkama 1, 2, 3, 4 i 5.

5. Zadan je niz realnih brojeva a_n takav da je $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n+1$ za svaki prirodan broj n i $a_{2009}=2009$. Odredi zbroj $a_1+a_2+\ldots+a_{2008}$.

2009.

1. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt{x^x}=x^{\sqrt{x}}$.

2. Treći član u razvoju binoma $\left(2\cdot\sqrt[n]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-n]{4}}\right)^6$ je 240. Odredi n.

3. Izračunaj $\left(1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)^{14}$.

4. Tri različita realna broja, različita od nule, čine aritmetički niz, a njihovi kvadrati u istom poretku čine geometrijski niz. Odredi sve moguće vrijednosti kvocijenta tog geometrijskog niza.

5. Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je broj $\frac{2009-n}{99}$ prirodan?

6. Jedno od žarišta (fokusa) elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ je žarište parabole $y^2=2px$, a pravac $3x-5y+25=0$ je njihova zajednička tangenta. Dokaži da je trokut kojeg određuju zajedničko žarište i dva dirališta tangente pravokutan.

7. Kut pri vrhu osnog presjeka uspravnog stošca je 2α, a polumjer osnovke r. U taj stožac je upisana pravilna šesterostrana prizma čiji su svi bridovi jednake duljine (jedna osnovka prizme leži u ravnini osnovke stošca, a preostali vrhovi na plaštu stošca). Izračunaj oplošje prizme s pomoću α i r.

8. Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ za } n \geq 3.$$

Dokaži da vrijedi nejednakost $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ za sve $n \in \mathbf{N}$.

2010.

1. Dokaži da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

2. Dana je elipsa čija je jednadžba $x^2 + 4y^2 = 36$. Kružnica k ima središte u točki $(0, 3)$ i prolazi žarištima dane elipse. Odredi sva sjecišta kružnice k s elipsom.

3. Koliki je ostatak pri dijeljenju broja $(\text{ABCDE2010})_{15}$ brojem 7?

Brojevi se u bazi 15 *pišu s pomoću znamenaka* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E *čije su vrijednosti redom* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) takvih da vrijedi $m^5 + n^2 = 1700$.

5. Stazu pravokutnog oblika širine $1.5\,\text{m}$ i duljine $20\,\text{m}$ treba popločati jednakim pločama oblika jednakokračnog pravokutnog trokuta s katetama duljine $50\,\text{cm}$, tako da katete budu paralelne stranicama tog pravokutnika. Odredi broj načina na koji je to moguće napraviti.

6. Odredi sve vrijednosti koje može poprimiti izraz

$$\left|\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{4z}\right|,$$

pri čemu je z kompleksan broj različit od nule.

7. U pravokutnom trokutu težišnica i simetrala pravog kuta dijele hipotenuzu na tri dijela čije duljine, u nekom poretku, čine aritmetički niz. Odredi sve moguće omjere duljina kateta tog trokuta.

Tri broja čine aritmetički niz ako je zbroj najmanjeg i najvećeg jednak dvostrukom srednjem broju.

8. Unutar kvadrata stranice duljine 10 nalazi se šest različitih točaka raspoređenih tako da je udaljenost između svake dvije od njih cjelobrojna. Dokaži da među tim udaljenostima postoje dvije jednake.

2011.

1. Razlika recipročnih vrijednosti dvaju uzastopnih prirodnih brojeva je $0.0aaa\ldots = 0.0\dot{a}$. Koje vrijednosti može poprimiti znamenka a?

2. Neka je z nul-točka polinoma $z^2-2z\cos\frac{\pi}{n}+1$. Odredi sve moguće vrijednosti izraza z^n.

3. Dokaži da je, za sve $n\in\mathbf{N}$, broj $2^{n+2}+3^{2n+1}$ djeljiv sa 7.

4. Matija i Tomislav igraju sljedeću igru:

Svaki od njih baca par igraćih kocaka. Ako barem jedan od njih dobije zbroj brojeva na kockama djeljiv s 3, onda pobjeđuje Matija; inače, pobjeđuje Tomislav.

Kolika je vjerojatnost da će Matija pobijediti?

5. Pravilni tetraedar $ABXY$ smješten je u kocku $ABCDA'B'C'D'$ stranice duljine 1 tako da točka X leži u ravnini $ABCD$. Odredi udaljenost točaka Y i A'.

6. Neka su a i b prirodni brojevi. Koje sve znamenke mogu biti na mjestu jedinica u dekadskom zapisu broja $(a+b)^5-(a^5+b^5)$?

7. Među svim točkama z kompleksne ravnine za koje je $|z+3|+|z-3| = 10$ odredi onu koja je najbliža pravcu koji prolazi točkama $(-3+4i)$ i $(-8+i)$.

8. Neka je n prirodan broj. Dokaži da je broj neparnih brojeva među brojevima

$$\binom{2n+1}{1}, \binom{2n+1}{2}, \ldots, \binom{2n+1}{k}, \ldots, \binom{2n+1}{n}$$

neparan.

2012.

1. Odredi sva rješenja jednadžbe $m! + 2 = n^2$, gdje su m i n prirodni brojevi.

2. U kompleksnoj ravnini skiciraj skup svih kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju uvjet

$$|z-1| - |z+1| = \sqrt{3}.$$

3. Odredi realni broj A, ako se zna da je u razvoju polinoma

$$\left(1+x^4\right)^{12} + A\left(x(1-x^2)^2\right)^{12}$$

koeficijent uz x^{12} jednak 100.

4. U jednoj kutiji nalaze se tri plave i jedna crvena kuglica, a u drugoj kutiji tri crvene i jedna plava kuglica. Najprije iz prve kutije prebacimo jednu (slučajno odabranu) kuglicu u drugu, a zatim iz druge kutije izvučemo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da je ta kuglica crvena?

5. Za koje $n \in \mathbf{N}$ postoje kut α i konveksan n-terokut s kutovima $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$?

6. Odredi sve prirodne brojeve veće od 1 čiji svi djelitelji zapisani u rastućem poretku čine geometrijski niz.

7. Neka su x i y realni brojevi za koje vrijedi $x + y \geqslant 0$. Dokaži da je

$$2^{n-1}\left(x^n + y^n\right) \geqslant (x+y)^n \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbf{N}.$$

8. Na stolu se nalaze 1234 kamenčića. Ratko i Rudi igraju sljedeću igru: najprije Ratko uzme neki paran broj kamenčića, najmanje dva, ali ne više od 100, a zatim Rudi uzme neki neparan broj kamenčića, najmanje jedan, ali ne više od 99. Potezi se dalje vuku naizmjenično, poštujući iste uvjete. Igrač pobjeđuje ako pokupi sve kamenčiće ili ako drugi igrač ne može odigrati svoj potez. Tko ima pobjedničku strategiju, tj. može pobijediti neovisno o igri drugog igrača?

2013.

1. Odredi sve proste brojeve p i q takve da je $p^q + 1$ također prost.

2. Gornja desna četvrtina šahovske ploče (dimenzija 8×8) je prekrivena papirom. Koliko najviše topova možemo postaviti na preostali dio šahovske ploče tako da se međusobno ne napadaju? Na koliko načina se to može napraviti? (Dva topa se međusobno napadaju ako se nalaze u istom retku ili u istom stupcu.)

3. Koliko ima kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

$$|z| = 1, \qquad \mathrm{Re}\,(z^{100}) = \mathrm{Im}\,(z^{200})?$$

4. Igrači A, B i C bacaju kockicu jedan za drugim. Kolika je vjerojatnost da C dobije veći broj nego ostala dva igrača?

5. Odredi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$2^n \cdot (n!)^2 < (2n)!.$$

6. Sva četiri sjecišta parabole $y = x^2 + px + q$ i pravaca $y = x$ i $y = 2x$ nalaze se u prvom kvadrantu. Uočimo dva dijela parabole koja leže između tih pravaca. Dokaži da razlika duljina njihovih ortogonalnih projekcija na os x iznosi 1.

7. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je $\log_2 (3^n + 7)$ također prirodan broj.

2014.

1. Nikola je zamislio pet brojeva. Prvi broj koji je zamislio je -2, a peti je 6. Prva četiri broja su uzastopni članovi aritmetičkog niza, a zadnja tri su uzastopni članovi geometrijskog niza. Koje je brojeve Nikola zamislio?

2. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} < \sqrt{n}+1.$$

3. Za realni broj a, neka je $\mathcal{P}_a$ parabola s jednadžbom $y = x^2 + ax + (2014 - a)$. Dokaži da sve parabole $\mathcal{P}_a$ prolaze istom točkom.

4. Tamara je na ploču napisala paran prirodan broj. Nakon toga je, jednog za drugim, napisala još dvanaest brojeva tako da je svaki od njih za 5 veći od kvadrata prethodno napisanog broja. Odredi kojom znamenkom može završiti posljednji napisani broj.

5. Na ploči dimenzija 5×7 kojoj su sva polja bijela, potrebno je obojati točno 17 polja crnom bojom tako da nastali raspored crnih i bijelih polja na ploči bude centralnosimetričan, tj. da se ne mijenja rotacijom za 180° oko središta ploče. Na koliko je načina to moguće napraviti?

6. Točkama A, B i C parabole povučene su tangente na nju. One se u parovima sijeku u točkama K, L i M tako da je KL tangenta u točki A, KM tangenta u točki B, a LM tangenta u točki C. Presjek pravca AC i paralele s osi parabole kroz točku B je točka N. Dokaži da je četverokut $KLMN$ paralelogram.

7. Višnja je odlučila napisati na ploču sve prirodne brojeve od 1 do 2014 u nekom poretku. Višnjin brat Marijan će između svaka dva susjedna broja napisati apsolutnu vrijednost njihove razlike, a zatim sve početne brojeve obrisati. Ovaj postupak Marijan će ponavljati sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj. Odredi najveći mogući broj koji na kraju može ostati na ploči.

2015.

1. Neka su a, b i c realni brojevi i $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija zadana formulom

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + c\sin x - 1.$$

Ako je $f(-2015) = 2015$, odredi $f(2015)$.

2. Koliki je koeficijent uz x^9 u polinomu $\left(1 + x^3 + x^6\right)^{10}$?

3. Neka je n prirodni broj i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} k!(k^2 + k + 1)$.

Izračunaj $\dfrac{S_n + 1}{(n+1)!}$.

4. U kutiji se nalazi jedna crvena i pet bijelih kuglica označenih brojevima 1, 2, 3, 4, 5. Ne gledajući, Domagoj izvlači jednu po jednu kuglicu sve dok ne izvuče crvenu kuglicu, nakon čega prekida izvlačenje. Izvučene kuglice se ne vraćaju u kutiju. Kolika je vjerojatnost da je zbroj brojeva na izvučenim bijelim kuglicama barem 10?

5. Za prirodni broj n označimo s R_n broj čiji se dekadski zapis sastoji od n znamenki 1. Dokaži tvrdnju: ako je R_n prost broj, onda je i n prost broj.

6. Neka su M i N redom nožišta visina iz vrhova A i B šiljastokutnog trokuta ABC. Neka je Q polovište dužine $\overline{MN}$, a P polovište stranice $\overline{AB}$. Ako je $|MN| = 10$ i $|AB| = 26$, odredi duljinu $|PQ|$.

7. Neka je n prirodni broj. Svaki od brojeva n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n-1$ ima najveći neparni djelitelj. Odredi zbroj tih najvećih neparnih djelitelja.