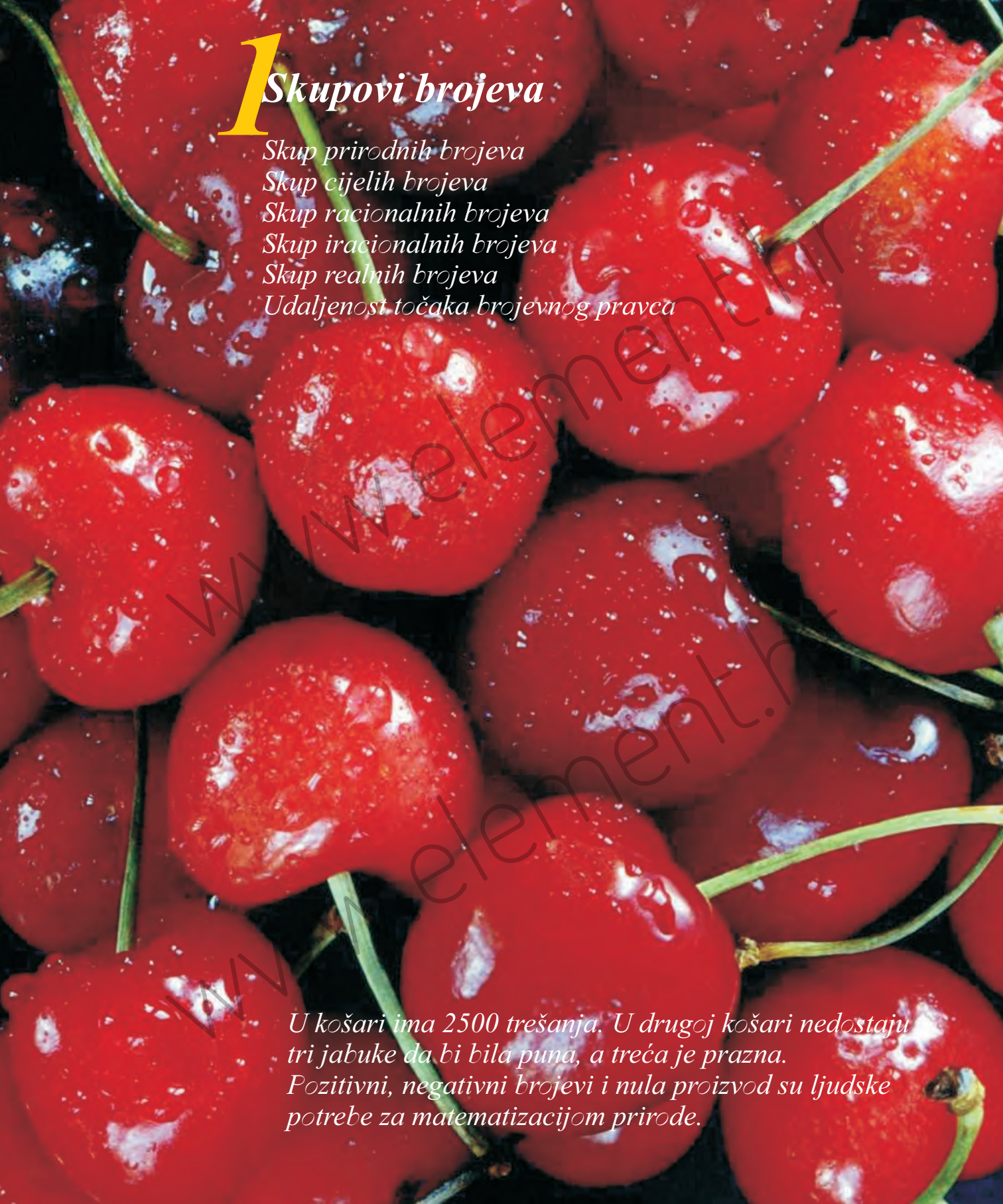
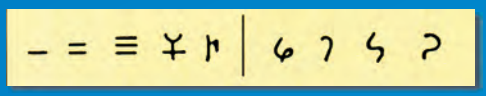


1 Skupovi brojeva

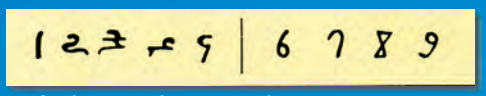
Skup prirodnih brojeva
Skup cijelih brojeva
Skup racionalnih brojeva
Skup iracionalnih brojeva
Skup realnih brojeva
Udaljenost točaka brojevnog pravca

U košari ima 2500 trešanja. U drugoj košari nedostaju tri jabuke da bi bila puna, a treća je prazna. Pozitivni, negativni brojevi i nula proizvod su ljudske potrebe za matematizacijom prirode.

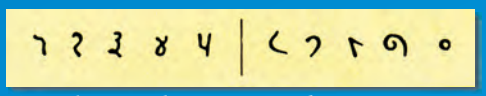
Skupovi brojeva



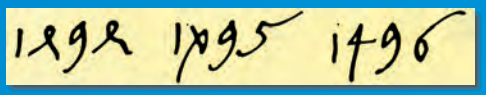
Indijski zapis brojeva, oko 300. pr.Kr.



Indijski zapis brojeva, oko 800. pr.Kr. među kojima se pojavljuje znamenka nula.



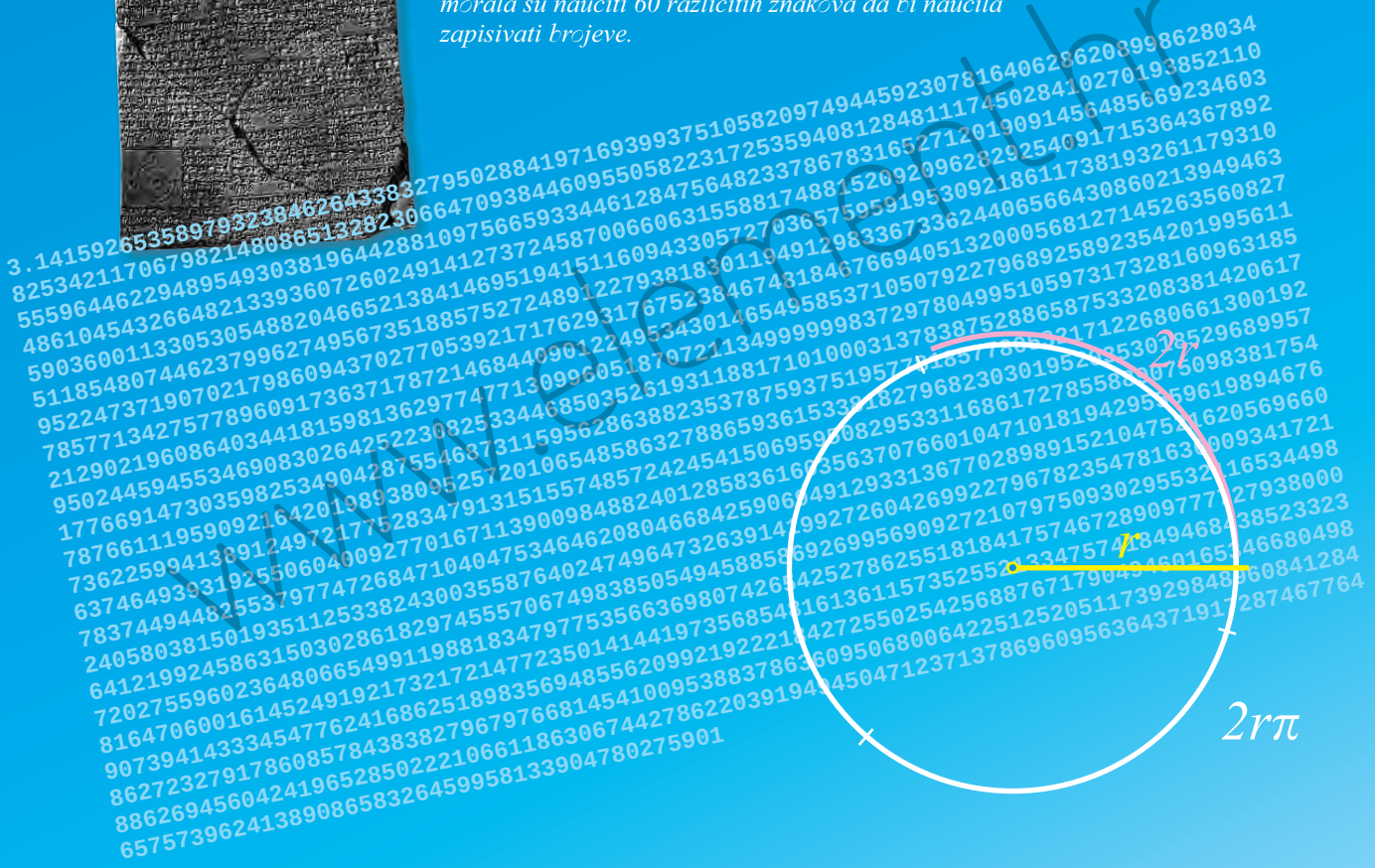
Arapski zapis brojeva iz područja današnje Španjolske, oko 1000. godine.



Zapis brojeva iz Njemačke, 16. stoljeće u rukopisu slikara Albrechta Dürera (1471.-1528.)

Zapis brojeva iz Babilona.

Babilonska kultura naslijedila je onu sumeransku oko 1900. godine p.K. Koristila je klinasto pismo utisnuto na glinene pločice za zapisivanje brojeva. Zanimljivo je da je korišten seksagezimalni sustav brojeva. Dakle, babilonska djeca morala su naučiti 60 različitih znakova da bi naučila zapisivati brojeve.



1. Skupovi brojeva

1.1. Skup prirodnih brojeva

Brojevi kojima se služimo pri brojenju su **prirodni brojevi**. To su brojevi: jedan, dva, tri, četiri, ..., a označavamo ih s 1, 2, 3, 4 itd. S **N** smo označili **skup prirodnih brojeva:**

N (lat. naturalis - prirodan)

$$\mathrm{N} = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}.$$

Primjerice, brojevi 2 i 103 su prirodni brojevi, a -7 i $0{,}5$ nisu.

Broj 1 je najmanji prirodni broj.

Skup koji se sastoji od svih prirodnih brojeva i nule označavamo s $\mathbf{N_0}$ pa je $\mathrm{N}_0 = \{0\} \cup \mathrm{N}$, odnosno $\mathrm{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

U skupu N ne postoji najveći element. Skup prirodnih brojeva je beskonačan.

Svaki prirodni broj ima svog **neposrednog sljedbenika**. **Neposredni sljedbenik** broja 5 je broj 6, neposredni sljedbenik prirodnog broja n je $n + 1$, a neposredni sljedbenik prirodnog broja $n + 1$ je $(n + 1) + 1$, *tj.* $n + 2$.

$n \in \mathbf{N}$ čitamo: n element od **N** ili n pripada skupu **N**.

Svaki prirodni broj veći od 1 ima svog **prethodnika**. Prethodnik prirodnog broja n $(n > 1)$ je broj $n - 1$.

Sada možemo pisati: $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, ..., n - 1, n, n + 1, ...\}$.

Prirodni broj može biti **paran** ili **neparan**. Svaki se paran prirodni broj može napisati u obliku $2n$, a svaki neparan u obliku $2n - 1$, gdje je $n \in \mathrm{N}_0$ ili $2n - 1$, $n \in \mathbf{N}$.

$2n$ - paran broj
$2n - 1$ - neparan broj

Primjer 1.

$26 = 2 \cdot 13$, $n = 13$

$55 = 2 \cdot 27 + 1$, $n = 27$

Prirodni broj a **djeljiv** je s prirodnim brojem b ako postoji takav prirodni broj c da je $a = b \cdot c$.

Ako je prirodni broj a djeljiv s prirodnim brojem b, onda je a **višekratnik** broja b.

Primjer 2.

Broj 21 je djeljiv s brojem 7 jer je $21 = 7 \cdot 3$. Broj 21 je višekratnik broja 7. Višekratnici broja 7 redom su: 7, 14, 21, 28... Umnožak svakog prirodnog broja n i broja 7 je višekratnik broja 7.

Svaki prirodni broj n ima beskonačno mnogo višekratnika, a svaka dva prirodna broja

imaju beskonačno mnogo zajedničkih višekratnika. Slovom v ćemo označavati **najmanji zajednički višekratnik.**

Primjer 3.

$$\begin{array}{rr|l} 8, & 12 & 2 \\ 4, & 6 & 2 \\ 2, & 3 & \end{array}$$

Višekratnici broja 8 su: 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, **72**, ..., a višekratnici broja 12 su: 12, **24**, 36, **48**, 60, **72**, ...

Zajednički višekratnici brojeva 8 i 12 redom su: 24, 48, 72,... a najmanji među njima je 24 pa je:

$$v(8, 12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 24.$$

Prirodni broj veći od 1 koji je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom jest **prost broj** ili prim - broj. Prosti brojevi redom su:

2, 3, 5, 7, 11, 13...

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Prirodni brojevi koji nisu prosti zovu se **složeni brojevi**. Svaki se složeni broj može napisati kao umnožak prostih brojeva. Tako je

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$, a

$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$.

Kažemo da smo brojeve 12 i 100 rastavili na proste faktore.

Još je Euklid dokazao da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

Po dogovoru, broj 1 ne smatramo niti prostim niti složenim brojem.

Euklid (oko 340. - oko 287. pr. Kr.), starogrčki matematičar. Prvi je predložio aksiome geometrije i imenovao mnoge veličine u geometriji i aritmetici.

Primjer 4.

Dokažimo da ne postoji najveći prost broj.

♦

Pretpostavimo da je p najveći prost broj. Neka je $q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p$ umnožak svih prostih brojeva. Očito je q složen broj pa $q + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot p + 1$ ne može biti složen jer nije djeljiv niti s jednim prostim brojem koji je manji ili jednak p. Znači da je $q + 1$ prost broj pa p nije najveći prost broj.

Ako je prirodni broj a djeljiv s prirodnim brojem b, kažemo da broj b dijeli broj a i pišemo $b \mid a$.

Svojstva djeljivosti: $3 \mid 21$, $7 \mid 56$, $8 \nmid 20$

1. Ako $c \mid a$ i $c \mid b$, onda $c \mid (a + b)$.
2. Ako $c \mid a$ ili $c \mid b$, onda $c \mid a \cdot b$.

Primjer 5.

$11 \mid 99$ i $11 \mid 22$

pa $11 \mid (99 + 22)$ i

$11 \mid 99 \cdot 22$, odnosno $11 \mid 121$ i $11 \mid 2178$.

Brojevi koji dijele neki prirodni broj nazivamo mjerama tog broja.

Primjer 6.

Broj 30 rastavljen na proste brojeve je $2 \cdot 3 \cdot 5$. Mjere broja 30 su brojevi 2, 3 i 5 te svi mogući njihovi umnošci. Mjere broja 30 su 2, 3, 5, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$ i $2 \cdot 3 \cdot 5$, odnosno 2, 3, 5, 6, 10, 15 i 30.

M(8, 12) = 2 · 2

Najveća zajednička mjera M dvaju prirodnih brojeva je najveći prirodni broj koji dijeli svakoga od njih. Tako je M(8, 12) = 4, M(26, 39) = 13, a M(12, 30, 42) = 6.

12, 30, 42	2
6, 15, 21	3
2, 5, 7	

Ako je M(a, b) = 1, onda kažemo da su a i b relativno prosti brojevi.

Ako je M(a , b) = p > 1, tada je v(a , b) $\neq$ $a \cdot b$

M(12, 30, 42) =6

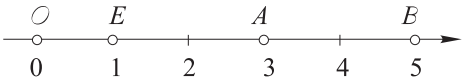
Najveću zajedničku mjeru i najmanji zajednički višekratnik proizvoljnih prirodnih brojeva a i b povezuje relacija

$$M(a, b) \cdot v(a, b) = a \cdot b .$$

Provjerimo gornju relaciju koristeći brojeve 8 i 12. S obzirom da smo izračunali $M(8, 12)$ a to je 4, izračunajmo $v(8, 12)$. To je $2^3 \cdot 3$, tj. $v(8, 12) = 2^3 \cdot 3$.
Slijedi:

$$M(8, 12) \cdot v(8, 12) = 4 \cdot 2^3 \cdot 3 = 2^3 \cdot (4 \cdot 3) = 8 \cdot 12.$$

Znamo da se prirodnim brojevima i nuli mogu pridružiti točke pravca. Na pravcu treba odabrati točku O (ishodište), kojoj ćemo pridružiti broj 0, i desno od nje točku E (jedinična točka), kojoj ćemo pridružiti broj 1. Pravac na kojem su istaknuti ishodište i jedinična točka nazivamo brojevnim pravcem. Većem prirodnom broju pridružit će se točka koja je iza (desno od) točke pridružene manjem prirodnom broju.



slika 1.

Na slici 1. je broju 3 pridružena točka A, a broju 5 točka B. Brojevi 3 i 5 su koordinate ili apscise točke A, odnosno točke B, što kraće pišemo $A(3)$ i $B(5)$.

Proizvoljnom priodnom broju n možemo pridružiti samo jednu točku, $T(n)$, brojevnog pravca.

Zbroj prirodnih brojeva jest prirodni broj i umnožak prirodnih brojeva jest prirodni broj pa kažemo da je skup prirodnih brojeva **zatvoren** s obzirom na operacije zbrajanja i množenja.

U skupu N možemo riješiti jednadžbe oblika $a + x = b$, gdje su a i b prirodni brojevi i $b > a$.

1.2 Skup cijelih brojeva

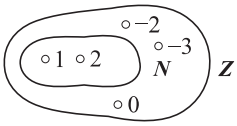
Ponekad čujemo da je temperatura – 8 °C ili da je vodostaj Drave u Osijeku – 1m.

Rješenje jednadžbe $13 + x = 2$ je $x = 2 - 13 = -11$, a -11 nije prirodni broj.

njem. zahl - broj

Primjeri suprotnih brojeva
3 i –3, –2 i 2
x i $-x$

Zbroj dvaju suprotnih brojeva jest nula.



Proširivanje skupa **N** nulom i brojevima suprotnim prirodnim brojevima dobiva se **skup cijelih brojeva**

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

u kojem svaka jednadžba oblika

$$a + x = b; \quad a, b \in N$$

ima rješenje, tj. $x = b - a$.

Skup cijelih brojeva nema najmanji ni najveći element.

Očito je da je:

$$Z \cap N = N,\ Z \cup N = Z \ i\ N_0 \subset Z,\ N \subset Z$$

Skup cijelih brojeva je **zatvoren** s obzirom na operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja jer je rezultat tih operacija na elementima skupa Z uvijek cijeli broj.

Primjer 8.

$10 - 5 \neq 5 - 10$

a) $10 - 3 \cdot 5 \cdot (7 - 8) =$
$= 10 - 15 \cdot (-1) =$
$= 10 + 15 = 25,$

b) $[-7 - (-3)] \cdot [5 - 5 \cdot (5 - 7)]$
$= [-7 + 3] \cdot [5 - 5 \cdot (-2)] =$
$= (-4) \cdot (5 + 10) = -4 \cdot 15 = -60$

1.2.1. Uređaj na skupu cijelih brojeva

Cijeli brojevi se dijele na pozitivne cijele brojeve, nulu i negativne cijele brojeve. Pozitivni cijeli brojevi su veći od nule, a negativni manji od nule.

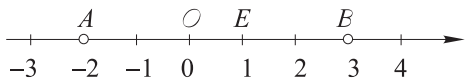
Kažemo da je cijeli broj a manji od cijelog broja b ako je $b - a > 0$ i pišemo $a < b$.

Skup cijelih brojeva je uređen relacijom < (manje), tako da za svaki $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ i $a \neq b$ možemo utvrditi je li $a < b$ ili $b < a$.

Tada je

$$\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$$

pa svakom cijelom broju možemo pridružiti točno jednu točku brojevnog pravca (slika 2.).



slika 2.

Na slici 2. je broju 3 pridružena točka B, a broju –2 točka A. Brojevi 3 i –2 su koordinate ili apscise točaka B i A, što kraće pišemo B (3) i A (–2).

Općenito: Ako je x bilo koji cijeli broj, tada je broju x_T pridružena točno jedna točka T brojevnog pravca koja ima koordinatu (apscisu) x_T, tj. $T(x_T)$.

1.2.2. Apsolutna vrijednost cijelog broja

Apsolutna vrijednost cijelog broja je funkcija koja svakom cijelom broju pridružuje prirodni broj ili nulu na slijedeći način:

$$|x| = \begin{cases} -x \ za \ x < 0 \\ x \ za \ x \geq 0. \end{cases}$$

Tako je

$|3| = 3$, $|-4| = -(-4) = 4$, $|5-3| = 5-3$ i $|3-5| = 5-3$.

Apsolutna vrijednost broja geometrijski znači udaljenost točke pridružene tom broju od ishodišta koordinatnog sustava, tj. $d(O,B) = |3-0| = 3$, koristeći točku B sa slike 2.

Primjer 2.

Izračunajmo vrijednost izraza $2a \cdot |a| + a \cdot |b| - |a-b|$

ako je: a) $a = -3$, $b = -1$, b) $a = 5$, $b = -7$,

♦

a) $2 \cdot (-3) \cdot |-3| + (-3) \cdot |-1| - |-3-(-1)| = -6 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 2 = -18 - 3 - 2 = -23.$

b) $2 \cdot 5 \cdot |5| + 5 \cdot |-7| - |5-(-7)| = 10 \cdot 5 + 5 \cdot 7 - 12 = 73.$

1.3. Skup racionalnih brojeva

Mnogi praktični razlozi nameću potrebu uvođenja novih brojeva. Duljina sobe izražena u metrima i točno vrijeme izraženo u sekundama najčešće nisu cijeli brojevi. Rješenje jednadžbe $5x = 6$, $x = \frac{6}{5}$ nije cijeli broj.

Proširivanjem skupa Z brojevima koji se mogu zapisati u obliku razlomka dobiva se **skup racionalnih brojeva Q**: lat. quotiens - koliko puta

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \,|\, a, b \in Z \ i \ b \neq 0 \right\},$$

što zbog svojstava predznaka količnika možemo zapisati u obliku:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in Z \text{ i } b \in N \right\},$$

$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

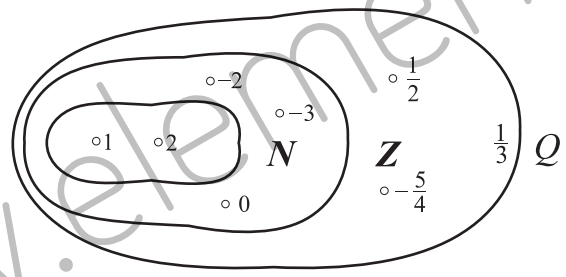
u kojem svaka jednadžba oblika $b \cdot x = a$, $a, b \in Z$ i $b \neq 0$ ima rješenje $x = \frac{a}{b}$.

$\frac{0}{1} = 0$

$\frac{0}{b} = 0, b \neq 0$

$$\frac{3}{4},\ 2{,}3,\ -0{,}05 \in Q, \qquad \left\{-\frac{1}{2}, 0{,}3\right\} \subset Q.$$

Podijelimo li brojnik s nazivnikom racionalni broj ćemo prikazati u decimalnom zapisu. Decimalni zapis može biti konačni ili beskonačni i periodski.



$$N \subset Z \subset Q$$

slika 3.

Primjer 1.

a) $-\frac{1}{4} = -0{,}25$, b) $\frac{3}{20} = 0{,}15$, c) $\frac{2}{3} = 0{,}666... = 0{,}\dot{6}$,

d) $\frac{-4}{13} = (-4) : 13 = -0{,}307692307692... = -0{,}\dot{3}0769\dot{2}$.

1.3.1. Gustoća skupa racionalnih brojeva

Za brojeve x_1 i x_2, broj $\frac{x_1 + x_2}{2}$ se zove aritmetička sredina tih brojeva.

Između svaka dva racionalna broja nalazi se beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Tako se između $\frac{2}{3}$ i 1 nalazi njihova aritmetička sredina:

$$\frac{\frac{2}{3} + 1}{2} = \frac{\frac{2+3}{3}}{2} = \frac{5}{6}, \qquad \frac{2}{3} < \frac{5}{6} < 1,$$

između $\frac{5}{6}$ i 1 opet njihova aritmetička sredina:

$$\frac{\frac{5}{6}+1}{2} = \frac{\frac{5+6}{6}}{2} = \frac{11}{12}$$

i tako dalje. Na ovaj način između $\frac{2}{3}$ i 1 dobivamo beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Zato kažemo da je skup racionalnih brojeva gust i po tome se bitno razlikuje od skupa cijelih brojeva.

1.3.2. Zapisivanje decimalnog broja u obliku razlomka

Svaki decimalan broj kojem je zapis konačni decimalan broj ili beskonačni i periodski decimalan broj možemo napisati u obliku razlomka.

Primjer 2.

Napišimo u obliku razlomka brojeve:

a) 3,27, b) −0,05, c) −13.

♦

a) $3,27 = \frac{327}{100}$, b) $-0,05 = -\frac{5}{100}$, c) $-13 = \frac{-13}{1}$.

Primjer 3.

Napišimo u obliku razlomka brojeve:

a) $0,333... = 0,\dot{3}$; b) $2,343434... = 2,\dot{3}\dot{4}$.

♦ a) $x = 0,\dot{3}$

$x = 0,3\dot{3} \quad /\cdot 10$

$10x = 3,\dot{3} = 3 + 0,\dot{3}$

$10x = 3 + x$

$9x = 3$

$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

b) $y = 2,\dot{3}\dot{4}$

$y = 2,34\dot{3}\dot{4} \quad /\cdot 100$

$100y = 234 + 0,\dot{3}\dot{4}$

$100y = 234 + y - 2$

$99y = 232$

$y = \frac{232}{99}$.

Primjer 4.

Napišimo u obliku razlomka broj $a = 1,7\dot{2}\dot{5}$.

♦

$a = 1,7\dot{2}\dot{5} \quad /\cdot 10$

$10a = 17,\dot{2}\dot{5}$

$10a = 17 + 0,\dot{2}\dot{5}$.

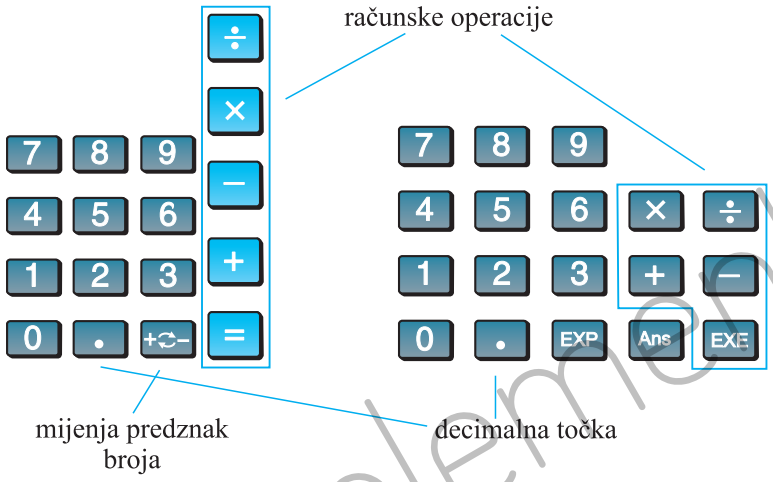
1 Postupkom opisanim u primjeru 11 dobivamo:

$$0,\dot{2}\dot{5} = \frac{25}{99} \text{ pa je } 10a = 17 + \frac{25}{99} = \frac{1708}{99}, \quad a = \frac{1708}{990}.$$

1.3.3. Džepno računalo

Računanje decimalnim brojevima, posebno dijeljenje višeznamenkastim brojem, iziskuje stanoviti napor. Za olakšanje napornog računanja koristimo se suvremenom tehnologijom, tj. džepnim računalom. Najčešće su u uporabi dvije vrste računala prikazane na slici.

U dijelu koji se odnosi na znamenke i računske operacije nema bitnih razlika:



Tipke koje imaju isto značenje

←	;	AC	- brisanje zadnje znamenke
=	;	EXE	- jednakost
1/x	;	x^{-1}	- recipročni broj
2nd	;	SHIFT	- sekundarna funkcija

Primjer 1.

Izračunajmo pomoću džepnog računala:

a) 21,368 + 5,37 + 52,749,

♦ 2 1 . 3 6 8 + 5 . 3 7 + 5 2 . 7 4 9 = 79.487

b) 879,56 – 95,648,

♦ 8 7 9 . 5 6 − 9 5 . 6 4 8 = 783.912 ,

c) 56,91 · 1,28,

♦ 5 6 . 9 1 × 1 . 2 8 = 72.8448 ,

d) 81,94 : 3,74,

♦ 8 1 . 9 4 ÷ 3 . 7 4 = 21.90909091 .

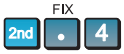
Primjer 2.

Izračunajmo pomoću džepnog računala 2 : 3.

Uočimo da računalo zaokružuje na zadnju decimalu na zaslonu.

Računanje decimalnim brojevima zaokruživanjem na unaprijed zadani broj (n) decimala omogućuje funkcija FIX.

Primjerice, za $n = 4$ pritisnimo:



, onda će računalo rezultate zaokružiti na 4 decimale.

Zadatak: Izračunajmo zadatke iz primjera 1 na: a) 2 decimale, b) 3 decimale.

Ako džepnim računalom pomnožimo milijun s milijunom dobit ćemo $1.^{12}$. Sa značenjem ovog rezultata upoznat ćemo se u sklopu teme *Potencije*.

1.3.4. Uspoređivanje razlomaka

$0,\dot{2} = \frac{2}{9}$

$3,\dot{2} = 3 + \frac{2}{9} = \frac{29}{9}$

$0,\dot{6}7\dot{8} = \frac{678}{999}$

Razlomke možemo skraćivati i proširivati.

Tako je $\frac{2}{3} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{10}{15}$ i $\frac{12}{8} = \frac{12 : 4}{8 : 4} = \frac{3}{2}$.

Razlomke možemo uspoređivati. Tako je $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$ jer je $5 > 3$, a $\frac{2}{9} < \frac{2}{7}$ jer $9 > 7$.

Općenito za dva razlomka $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ vrijedi: $\frac{a}{b} = \frac{a\cdot d}{b\cdot d}$ i $\frac{c}{d} = \frac{b\cdot c}{b\cdot d}$.

Sada ih možemo uspoređivati jer imaju jednake nazivnike. Istinita je samo jedna od ovih triju mogućnosti:

$\frac{a}{b} = \frac{k\cdot a}{k\cdot b}; k \neq 0$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ako je $a\cdot d = b\cdot c$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ako je $a\cdot d < b\cdot c$, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ako je $a\cdot d > b\cdot c$.

Primjer 5.

Usporedimo razlomke a) $\frac{21}{14}$ i $\frac{9}{6}$, b) $\frac{3}{4}$ i $\frac{9}{10}$.

a) $\frac{21}{14} = \frac{9}{6}$ jer je $21\cdot 6 = 9\cdot 14$, b) $\frac{3}{4} < \frac{9}{10}$ jer je $3\cdot 10 < 9\cdot 4$.

Skup racionalnih brojeva je **zatvoren** s obzirom na operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Uvijek imajmo na umu da dijeljenje s nulom nije definirano.

Primjer 6.

a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$,

b) $\frac{3}{4}-\frac{7}{4}=-\frac{4}{4}=-1$,

c) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5+4\cdot 3}{3\cdot 5}=\frac{22}{15}$,

d) $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 5}=\frac{6}{35}$,

e) $\frac{4}{9}:\frac{5}{2}=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{45}$,

f) $\frac{1}{2}:2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Za racionalne brojeve općenito vrijedi:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b},\qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b},\qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Pozor!

$\frac{5}{0}$ – *neodređeno*

$\frac{0}{0}$ – *neodređeno*

Dijeljenje s nulom nije definirano.

1.3.5. Recipročni brojevi

Brojevi 2 i $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ i -3, $\frac{4}{5}$ i $\frac{5}{4}$ su **recipročni brojevi**. Umnožak dvaju recipročnih brojeva jest jedan.

$3^{-1}=\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

$-2^{-1}=-\frac{1}{2}$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}=-\frac{3}{2}$

Brojevi a i $\frac{1}{a}$ $(a\neq 0)$ su recipročni brojevi. Umjesto $\frac{1}{a}$ najčešće pišemo a^{-1} pa je

$$a\cdot\frac{1}{a}=1,\ \text{odnosno}\ a\cdot a^{-1}=1.$$

$a^{-1}=\frac{1}{a}$

$a\cdot a^{-1}=1$

$a\cdot\frac{1}{a}=1$

Dijeljenje dvaju racionalnih brojeva može se napisati u obliku složenog ili dvostrukog razlomka. Tako je

$$\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{5}{6}\quad\text{isto što i}\quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{5}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}.$$

Brojevi 2 i 5 su vanjski članovi, a brojevi 3 i 4 su unutarnji članovi navedenog dvostrukog razlomka. Očito vrijedi:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

1

Razlomke pomoću džepnog računala zapisujemo ovako:

$\frac{5}{8} \rightarrow$ [5] [a b/c] [8], na zaslonu se pojavljuje [5⌟8].

Ako je razlomak skrativ, primjerice;

$\frac{3}{15} \rightarrow$ [3] [a b/c] [1] [5] [=] [1⌟5],

vidimo da nakon pritiska [=] računalo skrati razlomak.

Dvojni razlomak zapisujemo ovako:

$4\frac{2}{3} \rightarrow$ [4] [a b/c] [2] [a b/c] [3] [4_2⌟3].

Ako taj rezultat želimo zapisati kao dvojni razlomak, pritisnemo [2nd] [a b/c], pojavi se [14⌟3], a ponovnim pritiskom [2nd] [a b/c] vraćamo [4_2⌟3].

Razlomak u decimalni broj i obrnuto pretvara funkcija F◄►D, primjerice,

$\frac{5}{8} \rightarrow$ [5] [a b/c] [8] [2nd] [F◄►D], pojavi se [0.625].

Obrnuto, 0,625 u razlomak pretvorimo istim postupkom [0.625] [2nd] [F◄►D], pojavi se [5⌟8].

Sada ćemo broj 1,065 pretvoriti u razlomak: [1] [.] [0] [6] [5] [2nd] [F◄►D], pojavi se [1_13⌟200] [2nd] [a b/c] [213⌟200].

1.3.5. Uređaj na skupu Q

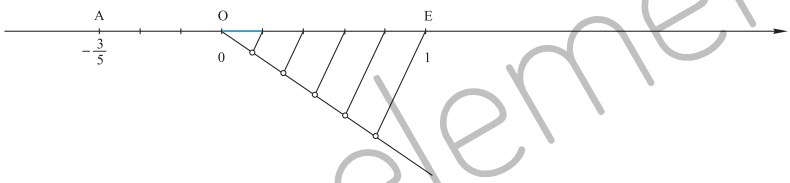
Za svaka dva različita racionalna broja a i b možemo utvrditi koji od njih je manji. Ako je $a \in Q$, $b \in Q$, onda je $a < b$ ili $b < a$. Poštujući uređaj u skupu cijelih brojeva, vrijedi $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ako je $ad < bc$ za $b > 0$ i $d > 0$.

Skup Q je uređen relacijom < (manje) pa se svakom racionalnom broju može pridružiti točno jedna točka brojevnog pravca.

slika 4.

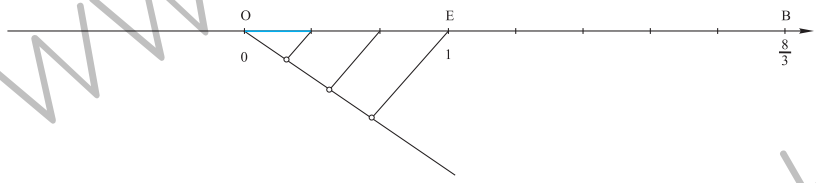
Na slici 4. nacrtan je brojevni pravac x. Točka O s koordinatom 0 je ishodište, a točka E s koordinatom 1 je jedinična točka brojevnog pravca. Broju $-\frac{3}{5}$ pridružena je točka A, a broju $\frac{8}{3}$ točka B na sljedeći način:

Podijelimo jediničnu dužinu $\overline{OE}$ na pet jednakih dijelova i dužinu $\frac{1}{5}\overline{OE}$ 3 puta nanesimo lijevo od ishodišta.



slika 5.

Podijelimo jediničnu dužinu $\overline{OE}$ na 3 jednaka dijela i dužinu $\frac{1}{3}\overline{OE}$ 8 puta nanesimo desno od ishodišta.



slika 6.

1.3.6. Postotak i promil

Postotak je razlomak s nazivnikom 100, tj. razlomak oblika $\frac{p}{100}$, a piše se p % i čita "pe posto".

$$p\% = \frac{p}{100}$$

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$88‰ = \frac{88}{1000} = 0,088$$

Postotak je broj kojim se izražava koliko jedinica jedne veličine dolazi na sto jedinica te iste veličine, a izračunava se ovako:

dio : cjelina = postotak · 100%.

Primjer 7.

U razrednom odjelu je 28 učenika, a 7 ih ima ocjenu odličan iz matematike. Koliko posto učenika tog razrednog odjela ima ocjenu odličan iz matematike?

♦

Odgovor je: $\frac{7}{28} \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$.

Primjer 8.

Prilikom prženja kava gubi 12% svoje mase. Koliko će se mase izgubiti prilikom prženja 15 kg kave?

♦

12% od 1 kg jest $\frac{12}{100} \cdot 1\text{ kg} = 0{,}12\text{ kg}$.

12% od 15 kg jest $\frac{12}{100} \cdot 15\text{ kg} = 1{,}8\text{ kg}$.

Promil je razlomak s nazivnikom 1000, tj. $\frac{p}{1000} = p‰$.

Primjer 9.

Izračunajmo masu zlatnog pokala finoće 820 ‰ ako sadrži 385 grama čistog zlata.

♦

Treba naći x iz jednadžbe: $\frac{820}{1000} \cdot x = 385.$

Dobijemo $x = 469{,}5$ pa je masa zlatnog pokala 469,5 grama.

Poveća li se realni broj x za 3%, dobije se broj $x + \frac{3}{100}x = x + 0{,}03x = 1{,}03x.$

Umanji li se realni broj x za 7%, dobije se broj $x - \frac{7}{100}x = x - 0{,}07x = 0{,}93x.$

Primjer 10.

Džepnim računalom izračunajmo 17% broja 1995?

♦

17% od 1995 je $\frac{17}{100} \cdot 1995 = 339{,}15$.

Računalom: 

ili

.