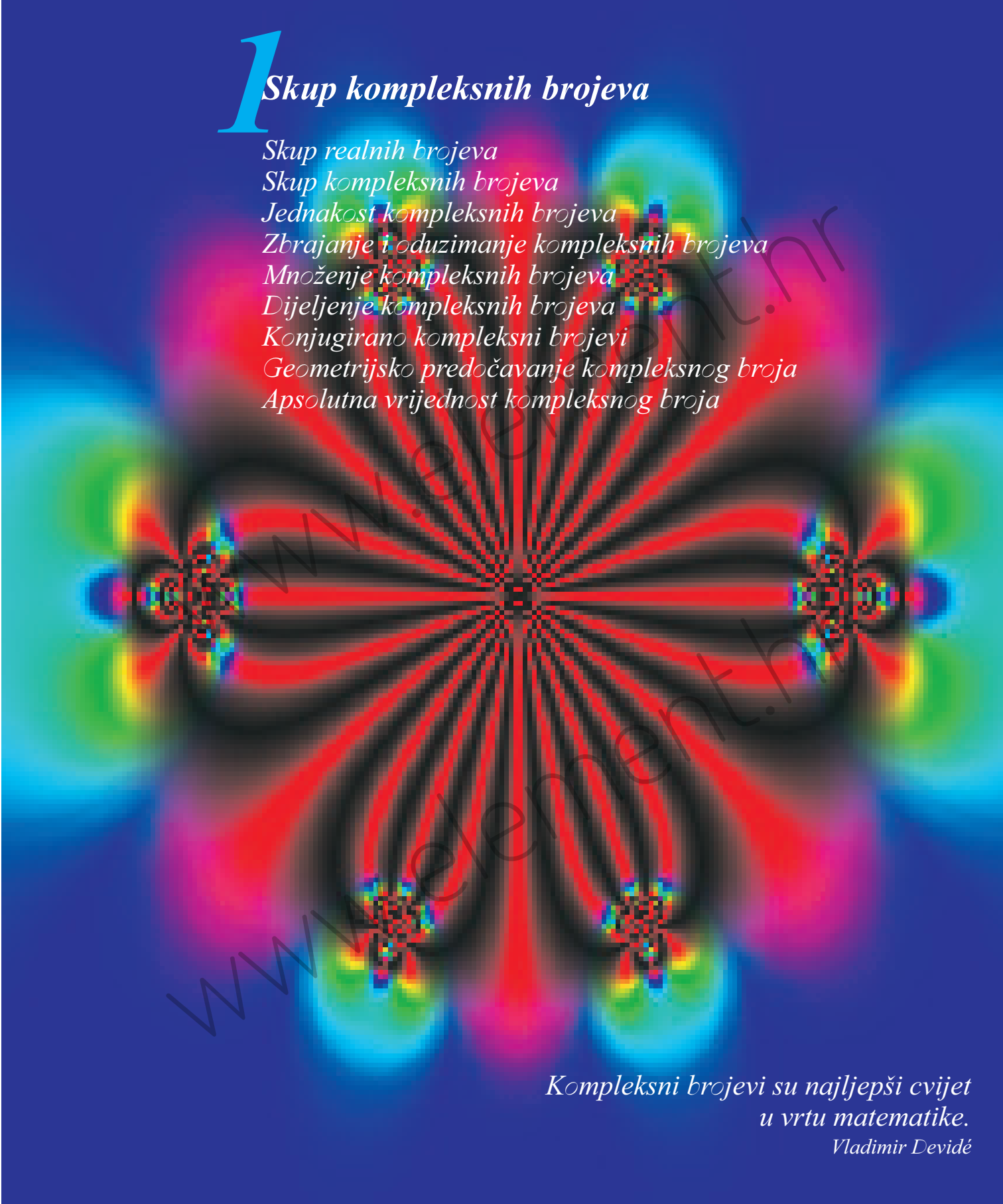
1 Skup kompleksnih brojeva

Skup realnih brojeva
Skup kompleksnih brojeva
Jednakost kompleksnih brojeva
Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva
Množenje kompleksnih brojeva
Dijeljenje kompleksnih brojeva
Konjugirano kompleksni brojevi
Geometrijsko predočavanje kompleksnog broja
Apsolutna vrijednost kompleksnog broja



Kompleksni brojevi su najljepši cvijet u vrtu matematike.
Vladimir Devidé

Kratka povijest kompleksnih brojeva

Heron

Prvi oblik zadatka s obilježjem imaginarnog broja pojavljuje se u djelu «Stereometrica» Herona iz Aleksandrije, oko 50 g. pr. Krista.

U Indiji je oko 850. g. Mahavira napisao: «Po prirodi stvari, negativno nije korijen, negativno nema drugog korijena.»

Cardano

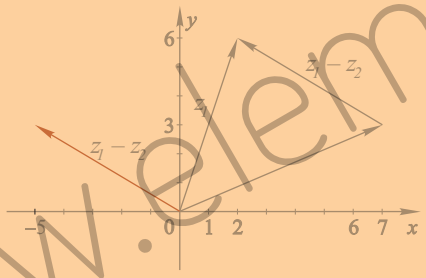
1545. g. Girolamo Cardano kompleksne brojeve nazvao je «fiktivnima». On je, međutim, želio riješiti problem «Podijeli 10 na dva dijela tako da njihov umnožak bude ...40» Cardano je pronašao rješenja 5 + ?(-15) i 5 - ?(-15), no rekao je da bi računanje tih brojeva bilo koliko zahtjevno, toliko i besmisleno.

Descartes

Caspar Wessel dosjetio se načinu grafičkog prikazivanja kompleksnih brojeva, no on je 1799. g. objašnjen u časopisu kojeg je čitalo vrlo malo matematičara. 100 godina kasnije konačno su mu priznate zasluge za djelo koje je moglo biti od značajnog utjecaja za svijet matematike.

Rene Descartes također je pridonio razvoju kompleksnih brojeva, on je uveo nazive «realni» i «imaginarni».

Leibniz



1702. g. Gottfried Willhelm von Leibniz opisao je kompleksne brojeve kao «prekrasni proizvod misaonog rada, gotovo amfibijski između stvari koje jesu i stvari koje nisu.»

Leonard Euler uveo je slovo i u svijet kompleksnih brojeva.

Tek je Gauss svojim utjecajem postigao univerzalno prihvaćanje kompleksnih brojeva. Neovisno od Wessela smjestio je kompleksne brojeve na ravninu.

1. Skup kompleksnih brojeva

1.1. Skup realnih brojeva

Brojevi kojima se služimo pri brojanju su prirodni brojevi. To su brojevi: jedan, dva, tri, četiri, itd. S **N** označavamo **skup prirodnih brojeva**:

lat. *naturalis*, prirodan

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}.$$

Zbroj, ali i umnožak bilo koja dva prirodna broja je također prirodni broj pa kažemo da je skup prirodnih brojeva **zatvoren** s obzirom na operacije zbrajanja i množenja. Broj 1 je najmanji prirodni broj, tj.

$$1 \leq n, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

$\forall x$, za svaki x

$\leq$, manje ili jednako

Skup koji se sastoji od svih prirodnih brojeva i nule označavamo s $\mathbf{N_0}$ pa je

$$\mathbf{N_0} = \{0\} \cup \mathbf{N}, \text{ odnosno } \mathbf{N_0} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

U skupu **N** ne postoji najveći element. Skup prirodnih brojeva je beskonačan.

Ako je n prirodan broj, onda je $2n$ **paran broj**, a $2n - 1$ **neparan broj**.

Ako su a i b prirodni brojevi i ako je $a \geq b$, onda jednadžba

$$a + x = b$$

nema rješenja u skupu **N**. Primjerice, jednadžba

$$10 + x = 2$$

ima rješenje

$$x = 2 - 10 = -8,$$

a broj -8 nije prirodan broj.

Proširivanjem skupa **N** nulom i negativnim brojevima, dobiva se **skup cijelih brojeva**

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

u kojem svaka jednadžba

$$a + x = b, \ a, b \in \mathbf{N}$$

ima rješenje. Skup **Z** je zatvoren s obzirom na operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja jer je rezultat tih operacija na elementima skupa **Z** uvijek cijeli broj. Skup **Z** nema najmanji niti najveći element.

Jednadžba

$$a \cdot x = b, \quad a, b \in \mathbf{Z}, \ a \neq 0$$

nema rješenja u skupu **Z** ako b nije višekratnik broja a. Primjerice, rješenje jednadžbe

1

$$10 \cdot x = 2$$

je

$$x = \frac{1}{5},$$

a to nije cijeli broj. Ovaj jednostavni primjer upućuje na potrebu proširenja skupa cijelih brojeva.

Proširivanjem skupa **Z** brojevima koji se mogu zapisati u obliku razlomaka dobili smo **skup racionalnih brojeva**

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,|\, a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \right\},$$

što zbog svojstva predznaka količnika dvaju cijelih brojeva možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,|\, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N} \right\}.$$

Racionalni brojevi su, primjerice,

$$-5, \quad -0{,}75, \quad 0, \quad \frac{3}{5}, \quad 8{,}26,$$

jer se svaki od njih može napisati u obliku razlomka.

Skup **Q** je zatvoren s obzirom na operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Količnici cijelih brojeva (nazivnik različit od nule) su racionalni brojevi. Podijelimo li brojnik s nazivnikom, racionalni broj ćemo prikazati u **decimalnom zapisu**. Neki od njih su **konačni decimalni brojevi**, a neki **beskonačni i periodski decimalni zapis**.

Primjer 1.

$$\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75, \qquad -\frac{1}{8} = -1:8 = -0{,}125,$$

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots = 0{,}\dot{6}, \qquad \frac{250}{99} = 2{,}5252\ldots = 2{,}\dot{5}\dot{2},$$

$$-\frac{4}{13} = -4:13 = -0{,}307692\ 307692\ldots = -0{,}\dot{3}0769\dot{2}.$$

Između svaka dva racionalna broja nalazi se beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Tako se, npr., između $\frac{2}{3}$ i 1 nalazi njihova aritmetička sredina

$$\frac{\frac{2}{3}+1}{2} = \frac{\frac{2+3}{3}}{2} = \frac{5}{6}, \qquad \frac{2}{3} < \frac{5}{6} < 1,$$

između $\frac{5}{6}$ i 1 opet njihova aritmetička sredina

$$\frac{\frac{5}{6}+1}{2} = \frac{11}{12},$$

i tako dalje. Na ovaj način između $\frac{2}{3}$ i 1 dobivamo beskonačno mnogo brojeva.

Kažemo da je skup **Q gust** i po tome se bitno razlikuje od skupa **Z**.
Skup **Q** ipak ima nekih praznina. Brojevi

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$$

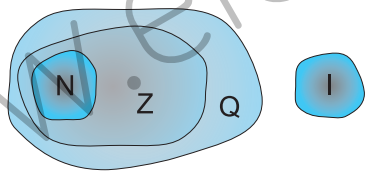
se ne mogu napisati u obliku razlomaka, dakle, nisu racionalni brojevi. U decimalnom zapisu, ovi su brojevi beskonačni decimalni brojevi kod kojih nema periodičnosti, odnosno ponavljanja skupine znamenki. Jednadžba

$$x^2 = 2$$

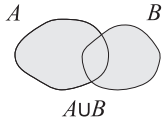
nema rješenja u skupu **Q**.
Brojevi kao $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ su elementi **skupa iracionalnih brojeva I** i oni zajedno s racionalnim brojevima čine skup **realnih brojeva R**. Očigledno je:

$$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}.$$

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$,
$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$

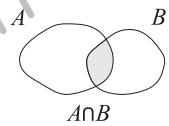


Slika 1.



Realni brojevi pojavljuju se prilikom mjerenja duljina, tj. oni se mogu prikazati na brojevnom pravcu. U prvom razredu smo dokazali da se $\sqrt{2}$ ne može zapisati u obliku razlomka. Da broj $\sqrt{2}$ jest realni broj dokazuje činjenica da dijagonala kvadrata stranice $a = 1$ ima duljinu $d = a\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$ i to nam je omogućilo smještanje broja $\sqrt{2}$ na brojevni pravac.

$\cap$, presjek skupova

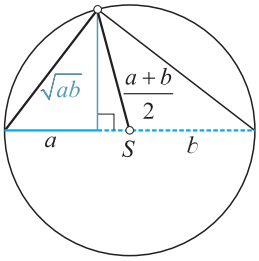


Prisjetimo se nekih svojstava i računskih operacija u skupu realnih brojeva.

A) 1. **Aritmetička sredina** realnih brojeva a i b jest broj $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$.

2. **Geometrijska sredina** pozitivnih realnih brojeva a i b jest broj $\sqrt{a \cdot b}$.

3. Vrijedi: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ (znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $a = b$).



Primjer 2.

Aritmetička sredina brojeva 9 i 18 je $\frac{9+18}{2} = 13{,}5$, a njihova geometrijska sredina je broj $\sqrt{9 \cdot 18} = 9\sqrt{2} \approx 12{,}69$.

Primjer 3.

Aritmetička sredina skupa brojeva 7, 10, 6, 10, 8, 8, 9, 7, 10, 8 jest

1

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot 7 + 3\cdot 8 + 1\cdot 9 + 3\cdot 10}{10} = \frac{6+14+16+9+30}{10} =$$

$$= \frac{6+14+24+9+30}{10} = \frac{87}{10} = 8,7.$$

$\bar{x}$ – aritmetička sredina

B) U skupu realnih brojeva definirane su operacije zbrajanja i množenja. Za sve $a, b, c \in \mathbf{R}$ vrijedi:

Zakoni	Zbrajanje	Množenje
Komutativnost (zamjena)	$a+b=b+a$	$a\cdot b = b\cdot a$
Asocijativnost (udruživanje)	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
Svojstvo neutralnog elementa	$a+0=0+a=a$	$a\cdot 1 = 1\cdot a = a$
Svojstvo suprotnog elementa	$a+(-a)=0$	$a\cdot\frac{1}{a}=1,\ (a\neq 0)$
Distributivnost	$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$	

C) U skupu **R** definirana je **apsolutna vrijednost** (modul) realnog broja kao broj

$$|x| = \begin{cases} x & za\ x>0, \\ 0 & za\ x=0, \\ -x & za\ x<0. \end{cases}$$

Tako je $|3|=3,\ |-5| = -(-5) = 5.$ (Možemo pisati: $|x| = \sqrt{x^2}$.)

Ako su a i b realni brojevi, onda vrijedi:

$$|a+b| \le |a| + |b|, \qquad |a\cdot b| = |a|\cdot|b|, \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b\neq 0.$$

U prvoj relaciji vrijedit će jednakost ako su a i b istog predznaka.

Primjer 4.

a) $|-7-2| = |-9| = 9$ i $|-7-2| = |-7| + |-2| = 7+2 = 9,$

b) $|-7+2| = |-5| = 5$ i $|-7+2| = |-7| + |2| = 7+2 = 9.$

Primjer 5.

Riješimo jednadžbu $|2x+3| = 5.$

$|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

♦ I. Neka je $2x+3<0$, tj. $x < -\frac{3}{2}$. Tada je

$-(2x+3)=5 \Rightarrow x=-4$, što je rješenje zadane jednadžbe jer je $-4<-\frac{3}{2}$.

II. Neka je $2x+3\geq 0$, tj. neka je $x\geq -\frac{3}{2}$. Tada je

$+(2x+3)=5 \Rightarrow x=1$, što je rješenje zadane jednadžbe jer je $1>-\frac{3}{2}$.

Računanjem napamet lako možemo provjeriti da su $x_1=-4$ i $x_2=1$ rješenja zadane jednadžbe.

Primjer 6.

Riješimo nejednadžbu $|x-2|<3$.

Ako je $|x|<a$ i $a\geq 0$, onda je $-a<x<a$, tj. $x\in\langle -a,a\rangle$.

♦ Sada imamo:

$$-3<x-2<3,$$
$$-3+2<x<3+2,$$
$$-1<x<5 \quad\Rightarrow\quad x\in\langle -1,5\rangle.$$

Primjer 7.

Riješimo nejednadžbu $|x+1|>4$.

Ako je $|x|>b$ i $b\geq 0$, onda je $x<-b$ ili $x>b$, tj. $x\in\langle -\infty,-b\rangle\cup\langle b,\infty\rangle$.

♦ Zadanu nejednadžbu možemo zamijeniti sustavom

$$\begin{cases} x+1<-4 \\ \text{ili} \\ x+1>4, \end{cases} \quad \text{pa je} \quad \begin{cases} x<-5 \\ \text{ili} \\ x>3. \end{cases}$$

Skup rješenja nejednadžbe je $\langle -\infty,-5\rangle\cup\langle 3,\infty\rangle$.

D) **Postotak** je razlomak s nazivnikom 100.

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Primjer 8.

a) $7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07$.

b) 15% od 60% od x je

$$0{,}15\,(0{,}60\cdot x) = 0{,}09\cdot x, \text{ što iznosi } 9\% \text{ od } x.$$

Primjer 9.

Poveća li se realan broj x za 7%, dobije se broj $1{,}07\cdot x$,

a umanji li se realan broj x za 7%, dobije se broj $0{,}93\cdot x$.

1

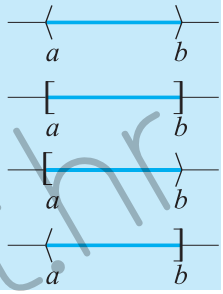
E) **Intervali** su podskupovi skupa **R**:

$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$, otvoreni interval,

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$, zatvoreni interval ili segment,

$[a, b\rangle = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}$, poluotvoreni (poluzatvoreni) interval,

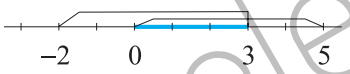
$\langle a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\}$, poluotvoreni (poluzatvoreni) interval,



Primjer 10.

Odredimo presjek intervala $\langle -2, 3]$ i $\langle 0, 5\rangle$.

♦

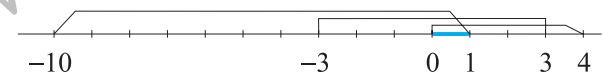


$\langle -2, 3] \cap \langle 0, 5\rangle = \langle 0, 3]$

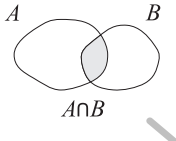
Primjer 11.

Odredimo presjek intervala $\langle -10, 1\rangle$, $[-3, 3]$ i $[0, 4\rangle$.

♦



$\langle -10, 1\rangle \cap [-3, 3] \cap [0, 4\rangle = [0, 1\rangle$



Presjek skupova

$\{3,4\} \cap \{2,4,6\} = \{4\}$

$\{3\} \cap \{4,5\} = \varnothing$

Riješeni zadaci

1. Napišimo brojeve $a = 0,\dot{4}5\dot{6}$ i $b = 1,7\dot{2}\dot{5}$ u obliku razlomka.

♦

$a = 0,456\dot{4}5\dot{6} \quad /\cdot 1000,$

$1000a = 456,\dot{4}5\dot{6} = 456 + 0,\dot{4}5\dot{6},$

$1000a = 456 + a,$

$999a = 456,$

$a = \dfrac{456}{999}.$

$b = 1,7\dot{2}\dot{5} \quad /\cdot 10,$

$10b = 17,\dot{2}\dot{5} = 17 + 0,\dot{2}\dot{5}.$

Postupkom opisanim u pretvaranju broja a u razlomak dobivamo $0,\dot{2}\dot{5} = \dfrac{25}{99}$, pa je

$10b = 17 + \dfrac{25}{99} = \dfrac{1708}{99},$

$b = \dfrac{1708}{990}.$

2. Odredimo stotu decimalu decimalnog zapisa broja $\dfrac{1}{7}$.

♦

Dijeljenjem nađimo decimalni zapis broja $\dfrac{1}{7}$, a to je broj 0,1428571428571... =

$=0,\dot{1}4285\dot{7}$, koji je periodički decimalni broj u kojem se ponavlja skupina od šest znamenaka. Iz $100 = 6 \cdot 16 + 4$ zaključujemo da je stota decimala četvrta znamenka iz skupine znamenaka koje se ponavljaju, a to je znamenka 8.

1

$100 : 6 = 16$
40
4

3. Zajedno izračunajmo:

a) $5\cdot(-1)^2-4\cdot(-2)^2-3\cdot(-3)^3\cdot(-2)^0=5\cdot1-4\cdot4-3\cdot(-27)\cdot1=5-16+81=70.$

b) $\left(\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+5\cdot\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2=2-25\cdot3=-73.$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

c) $\left(2\cdot\sqrt{3}-4\right)^2=4\cdot3-2\cdot2\sqrt{3}\cdot4+16=28-16\sqrt{3}.$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

d) $\left[2^{-1}:\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]:2^{-2}=\left[\frac{1}{2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]:\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left[\frac{1}{2}:\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]:\frac{1}{4}=$

$=\left[\frac{1}{2}:\frac{9}{4}\right]\cdot4=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\right]\cdot4=\frac{2}{9}\cdot4=\frac{8}{9}.$

$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$

$2^{-1}=\frac{1}{2},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

e) $\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(16^{-\frac{1}{4}}\right)^3=2^{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\cdot2^{4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot3}=2^{-\frac{1}{2}}\cdot2^{-3}=2^{-\frac{1}{2}-3}=2^{-\frac{7}{2}}.$

$\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}\cdot\sqrt{5^3\cdot\sqrt[4]{5^3}}=\sqrt[12]{5}\cdot\sqrt[8]{\left(5^3\right)^4\cdot5^3}=\sqrt[12]{5}\cdot\sqrt[8]{5^{15}}=\sqrt[24]{5^2}\cdot\sqrt[24]{5^{45}}=$

$=\sqrt[24]{5^2\cdot5^{45}}=\sqrt[24]{5^{47}}=\sqrt[24]{5^{24}\cdot5^{23}}=5\sqrt[24]{5^{23}}.$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a},$

$\sqrt[n]{a^n}=a,$

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}.$

4. Tvornička cijena neke robe je 2003 kune. Troškovi prijevoza povećavaju joj cijenu za 2,3%, skladištenje za 0,56%, trgovačka provizija za 12,2% i porezi za 22%. Izračunajmo prodajnu cijenu te robe za Božić ako je popust 25%.

♦

$0,75 \cdot 1,22 \cdot 1,122 \cdot 1,0056 \cdot 1,023 \cdot 2003 = 2115,42$ kuna.

5. Podijelimo broj 156 u omjeru 5 : 7.

♦

Zadatak možemo svesti na sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice :

$$\begin{cases} a+b=156 \\ a:b=5:7. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe zaključujemo da je $a = 5k$, $b = 7k$
pa zamjenom u prvoj dobivamo

$$5k+7k=156$$
$$12\,k=156$$
$$k=13.$$

Očigledno je: $a = 5 \cdot 13 = 65$ i $b = 7 \cdot 13 = 91$.

6. Podijelimo broj 420 u omjeru 2 : 7 : 11.

$$\text{Iz}\begin{cases} a+b+c=420 \\ a:b:c=2:7:11 \end{cases}$$

1

dobivamo : $a = 2k,\quad b = 7k,\quad c = 11k,$

$2k + 7k + 11k = 420,$

$20k = 420,$

$k = 21$ pa je

$a = 2 \cdot 21 = 42,\ b = 7 \cdot 21 = 147,\ c = 11 \cdot 21 = 231.$

7. Racionalizirajmo nazivnik razlomaka:

a) $$\frac{1-3\sqrt{5}}{1+3\sqrt{5}} = \frac{1-3\sqrt{5}}{1+3\sqrt{5}} \cdot \frac{1-3\sqrt{5}}{1-3\sqrt{5}} = \frac{\left(1-3\sqrt{5}\right)^2}{1^2-\left(3\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1-6\sqrt{5}+9\cdot 5}{1-9\cdot 5} = \frac{46-6\sqrt{5}}{-44} =$$
$$= \frac{-2\left(3\sqrt{5}-23\right)}{-44} = \frac{3\sqrt{5}-23}{22}.$$

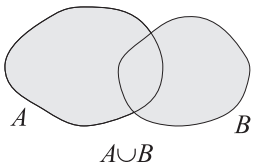
$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3-b^3$

$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) = a^3+b^3$

b) $$\frac{4}{5\sqrt[7]{2}} = \frac{4}{5\sqrt[7]{2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2^6}}{\sqrt[7]{2^6}} = \frac{4\sqrt[7]{2^6}}{5\sqrt[7]{2^7}} = \frac{4\sqrt[7]{2^6}}{5\cdot 2} = \frac{2}{5}\sqrt[7]{64}.$$

c) $$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}} =$$
$$= \frac{\sqrt{10}\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}\right)}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3} = \sqrt{10}\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}\right).$$

8. Računajmo s intervalima:



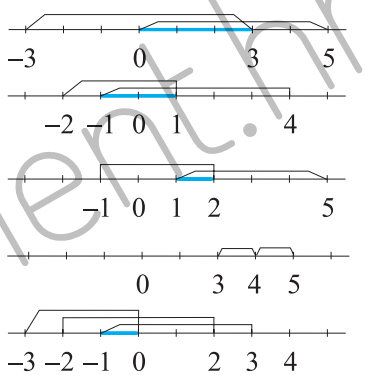
a) $\langle -3, 3\rangle \cap \langle 0, 5\rangle = \langle 0, 3\rangle$,

b) $\langle -2, 1] \cap \langle -1, 4] = \langle -1, 1]$,

c) $[-1, 2] \cup \langle 1, 5\rangle = [-1, 5\rangle$,

d) $\langle 3, 4\rangle \cap \langle 4, 5\rangle = \varnothing$,

e) $\langle -3, 0] \cap \langle -2, 2] \cap \langle -1, 3] = \langle -1, 0]$.



9. Riješimo nejednadžbu $|x+5| \le 7$.

$|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$

$|x| > b \Leftrightarrow x < -b$ ili $x > b$

♦

I. način: Napišimo zadanu nejednadžbu u obliku

$$-7 \le x+5 \le 7.$$

Broj 5 prebacimo i na lijevu i na desnu stranu:

$$-7-5 \le x \le 7-5 \quad \Rightarrow \quad -12 \le x \le 2 \quad \Rightarrow \quad x \in [-12, 2].$$

II. način: Nejednadžbu $|x+5| \le 7$ možemo riješiti i na sljedeći način:

Za $x + 5 < 0$, tj. za $x < -5$ vrijedi:

$$-(x+5)\le 7 \Rightarrow -x-5\le 7 \Rightarrow -x\le 12 \Rightarrow x\ge -12,\ \text{tj. } x\in[-12,-5\rangle.$$

Za $x+5\ge 0$, tj. za $x\ge -5$ vrijedi:

$$+(x+5)\le 7 \Rightarrow x\le 2,\ \text{tj. } x\in[-5,2].$$

Skup rješenja zadane nejednadžbe je unija dobivenih riješenja:

$$[-12,-5\rangle\cup[-5,2]=[-12,2].$$

10. Riješimo nejednadžbu $-5<|3-x|\le 4$.

♦

Zamijenimo nejednadžbu sustavom: $\begin{cases}|3-x|\le 4\\ |3-x|>-5\end{cases}$ i nađimo presjek rješenja svake nejednadžbe.

Prvu nejednadžbu možemo zapisati:

$$-4\le 3-x\le 4.$$

Oduzmimo 3 od svake strane nejednadžbe pa nejednadžbu pomnožimo s -1. (Okrećemo znak nejednakosti.) Dobivamo:

$$-1\le x\le 7,\ \text{tj. } x\in[-1,7].$$

Svaki $x\in\mathbf{R}$ zadovoljava drugu nejednadžbu $|3-x|>-5$ jer je apsolutna vrijednost uvijek pozitivan broj.

Iz $\mathbf{R}\cap[-1,7]=[-1,7]$ zaključujemo da je segment $[-1,7]$ skup rješenja zadane nejednadžbe.

11. Izračunajmo postotak promjene cijene robe koja je četiri puta poskupjela za po 5% i jedanput pojeftinila za 10%.

♦

Roba cijene a, nakon četiri poskupljenja, ima cijenu $(1{,}05)^4\cdot a$, a nakon pojeftinjenja cijenu $0{,}90\cdot(1{,}05)^4\cdot a=1{,}053a$.

Nakon svih promjena, cijena robe je povećana za 5,3%.

12. Cijena neke robe nakon 4 poskupljenja od po $x\%$ jednaka je cijeni iste robe nakon 2 poskupljenja od po 20%. Izračunajmo x.

♦

Iz $\left(1+\frac{x}{100}\right)^4=\left(1+\frac{20}{100}\right)^2$ dobivamo: $\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=1{,}2$ pa je

$$1+\frac{x}{100}=\sqrt{1{,}2},$$

$$1+\frac{x}{100}=1{,}0954,$$

$$\frac{x}{100}=0{,}0954,$$

$$\frac{x}{100}=\frac{9{,}54}{100},$$

$$x=9{,}54.$$

1 Zadaci

1. Izračunajte:

a) $\left[2-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}\cdot\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{0}\cdot 3^{-2}\right]^{-1}$,

b) $(-3)^{-2}\cdot(0.1)^{-1}\cdot\frac{3^{-1}}{6^{-2}}\cdot 2^{-3}$, c) $125^{\frac{2}{3}}\cdot 0.125^{-\frac{1}{2}}\cdot 0{,}008^{-\frac{2}{3}}$,

d) $3600\cdot 10^{-3}$, e) $2{,}3\cdot 10^{-19}\cdot 5100$.

2. Izračunajte:

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{63}{125}\right)^{-\frac{3}{2}}$, b) $\left((27)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$,

c) $\left(0{,}0001^{\frac{3}{4}}\right)^{-1}$, d) $\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{7}{3}}$.

3. Izračunajte:

a) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{16}$, b) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\cdot\sqrt[4]{27}$,

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

c) $\left(3\sqrt{5}-6\right)^2\cdot\left(1-\sqrt{5}\right)^3$, d) $\frac{\sqrt[3]{0{,}125}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{-1}}{1-\sqrt{0{,}25}}$.

4. Racionalizirajte nazivnik:

a) $\frac{25}{4\sqrt{5}}$, b) $\frac{9}{2\sqrt[5]{27}}$, c) $\frac{6}{\sqrt[3]{9\sqrt{27}}}$, d) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$,

e) $\frac{2-3\sqrt{5}}{2+3\sqrt{5}}$, f) $\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}$, g) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$, h) $\frac{6}{1+\sqrt[3]{2}}$.

5. Riješite jednadžbe:

a) $x\sqrt{2}+\sqrt{2}=4-x$, b) $1+x\sqrt{3}=4x-3\sqrt{3}$,

c) $\frac{x}{1+x}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, $x\neq-1$, d) $\frac{x+3}{\sqrt{3}-2}=\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$,

e) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, f) $\frac{2x}{\sqrt{2}}=\frac{x\sqrt{2}-1}{12}$.

6. Riješite jednadžbe:

a) $(3x-2)(5x+1)=(2+3x)^2-3x(3-2x)$, b) $\frac{3}{3x-3}=\frac{7}{4x+8}$,

1

c) $(3x+5):(6x+1)=x:(2x-1)$,

d) $\frac{4}{2x-2}+\frac{6x}{3-3x}=\frac{5}{6}$,

e) $\frac{8}{3x+7}-\frac{19x+1}{9x^2-49}=\frac{2}{3x-7}$,

f) $\frac{6}{3x-3}-\frac{x^2}{x^2-2x+1}=\frac{1+x}{1-x}$.

7. Riješite nejednadžbe:

a) $4\frac{1}{2}:x\geq\frac{3}{5}$,

b) $3\frac{3}{4}:x<\frac{5}{4}$,

c) $x:1\frac{1}{4}>\frac{3}{2}$,

d) $2x+3\geq x-2$,

e) $(3-4x)(x-1)\leq 2(1-x)(2x+3)$,

f) $x-\frac{3x+1}{2}-\frac{4x-1}{3}+\frac{11x}{6}>0$,

g) $\frac{3x-1}{12}-\frac{3}{4}<2x-\frac{5-10x}{6}$.

8. Riješite sustav nejednadžbi:

a) $\begin{cases}\frac{x+4}{3}<2x-3\\ x+1<2x-10,\end{cases}$

b) $(5-x)(x-7)>0$,

c) $2x^2+x-15\leq 0$,

d) $\frac{x+3}{x+8}\leq 0$.

9. Riješite jednadžbe s apsolutnom vrijednošću:

$|x|=a \Leftrightarrow x=\pm a$

a) $|x|+2x=1$,

b) $\frac{|4x|-4}{1+|4x|}=-3$,

c) $|3x-2|-3=6x$,

d) $|-x+2|=\frac{3}{2}x-1$,

e) $|4x+3|=|x-1|-2$,

f) $|x+1|-|2x-3|=5(2-x)$.

10. Riješite nejednadžbe s apsolutnom vrijednošću:

$|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$

$|x|>a \Leftrightarrow x<-a$ ili $x>a$

a) $|x-5|\leq 1$,

b) $|x-2|>3$,

c) $3|x+1|\leq 2$,

d) $|5-3x|>6\cdot x$,

e) $|2x-3|\geq x+1$,

f) $4|5-2x|\leq 10-6x$,

g) $-2|1-2x|\geq 7-7x$,

h) $|x-5|+2|x|<7$,

i) $\left|\frac{x}{2x+3}\right|>4,\ x\neq-\frac{3}{2}$,

j) $\left|\frac{x+1}{x-3}\right|>4,\ x\neq 3$,

k) $|1-x|-3<-2|x-3|$,

l) $|-4x+1|-|3x+2|<9$.

1

11. Odredite tok funkcije:

a) $f(x)=-\frac{3}{2}x+5$, b) $f(x)=\frac{1}{2}x-3$,

c) $f(x)=6x-4$, d) $f(x)=-2x-1$.

12. Grafički i računski riješite sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

a) $\begin{cases} y=x+1 \\ 2x+y-7=0, \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=3 \\ y-x+2=0, \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ x+4y=2. \end{cases}$

13. Kolika je prosječna površina 8 stanova od kojih je jedan površine 97 m^2, dva su površine po 73 m^2, tri su površine po 56 m^2 i dva su površine po 41 m^2?

14. Podijelite broj 546 na 4 pribrojnika koji su u omjeru 5 : 8 : 11 : 15.

15. Kolika je cijena robe koja nakon 3 poskupljenja od po 8% i jednog pojeftinjenja od 12% iznosi 1998 kuna?

16. Koliko posto materijala otpada ako se:

a) iz kvadratne ploče izreže najveći mogući krug,

b) iz kruga izreže najveći mogući kvadrat,

c) iz kocke izradi najveća moguća kugla,

d) iz kugle izradi najveća moguća kocka.

Rješenja

1. a) $-\frac{9}{2}$, b) $\frac{5}{3}$, c) $1250\sqrt{2}$, d) 3,6, e) $1{,}173\cdot 10^{-15}$.

2. a) $\frac{125}{27}$, b) $\sqrt[3]{9}$, c) 1000, d) $3\sqrt[3]{3}$.

3. a) $36\sqrt[3]{2}$, b) $3\sqrt[8]{243}$, c) $72\left(38-17\sqrt{5}\right)$, d) 6.

4. a) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$, b) $\frac{3\sqrt[5]{9}}{2}$, c) $\frac{2}{3}\sqrt[6]{3^5}$, d) $-\frac{6+9\sqrt{2}}{7}$,

e) $\frac{12\sqrt{5}-49}{41}$, f) $\frac{4\sqrt{6}+11}{5}$, g) $2-\sqrt{3}$, h) $2\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$.

5. a) $5\sqrt{2}-6$, b) $\sqrt{3}+1$, c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, d) $-\frac{5}{3}\sqrt{3}$, e) $5\sqrt{6}-13$, f) $\frac{-\sqrt{2}}{22}$.

6. a) $x=-\frac{3}{5}$, b) 5, c) $\frac{5}{6}$, d) nema rješenja jer $x\neq 1$, e) -71, f) $x=\frac{3}{2}$.

7. a) $\left\langle -\infty,\frac{15}{2}\right]$, b) $\langle 3,+\infty\rangle$, c) $\left\langle \frac{15}{8},+\infty\right\rangle$, d) $[-5,+\infty\rangle$, e) $\langle -\infty,1]$, f) $\varnothing$, g) $\langle 0,+\infty\rangle$.

8. a) $\langle 11,+\infty\rangle$, b) $\langle 5,7\rangle$, c) $\left[-3,\frac{5}{2}\right\rangle$, d) $\langle -8,-3]$.

9. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{16}, -\frac{1}{16}$, c) $-\frac{1}{9}$, d) $\frac{6}{5}$, e) $\varnothing$, f) $\frac{3}{2}$.

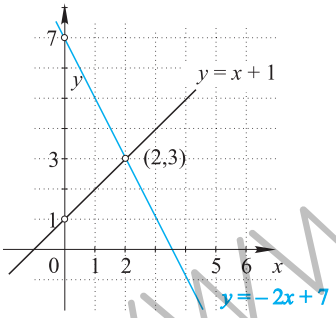
10. a) $[4,6]$, b) $\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 5,+\infty\rangle$, c) $\left[-\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right]$, d) $\left\langle -\infty,\frac{5}{9}\right\rangle$, e) $\left\langle -\infty,\frac{2}{3}\right] \cup [4,+\infty\rangle$,

f) $\left\langle -\infty,\frac{15}{7}\right\rangle \cup [5,+\infty\rangle$, g) $\left[\frac{5}{3},+\infty\right\rangle$, h) $\left\langle -\frac{2}{3},2\right\rangle$, i) $\left\langle -\frac{12}{7},-\frac{3}{2}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{3}{2},-\frac{4}{3}\right\rangle$,

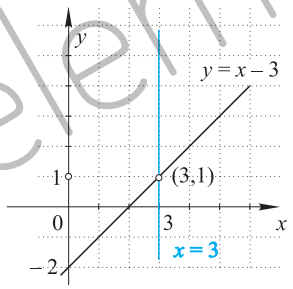
j) $\left\langle \frac{11}{5},3\right\rangle \cup \left\langle 3,\frac{13}{3}\right\rangle$, k) $\left\langle 2,\frac{10}{3}\right\rangle$, l) $\langle -6,12\rangle$.

11. a) pada, b) raste, c) raste, d) pada.

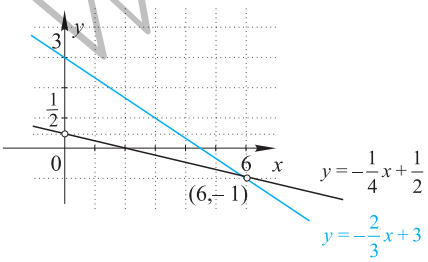
12. a) (2, 3),



b) (3, 1),



c) (6, –1).



13. 61,625.

14. 70, 112, 154, 210.

15. 1802,36 kn.

16. a) 21,5%, b) 36,3%, c) 47,6%, d) 63,2%.