

# 1. Trofazna struja

- 1.1 **Uvod u trofazni sustav**
- 1.2 **Trofazni generator**
- 1.3 **Pojam faznih i linijskih napona i struja**
- 1.4 **Trofazni sustav spojen u zvijezdu**
- 1.5 **Trofazni sustav spojen u trokut**
- 1.6 **Snaga u trofaznom sustavu**
- 1.7 **Kompenzacija jalove snage u trofaznom sustavu**
- 1.8 **Rotacijsko magnetsko polje**

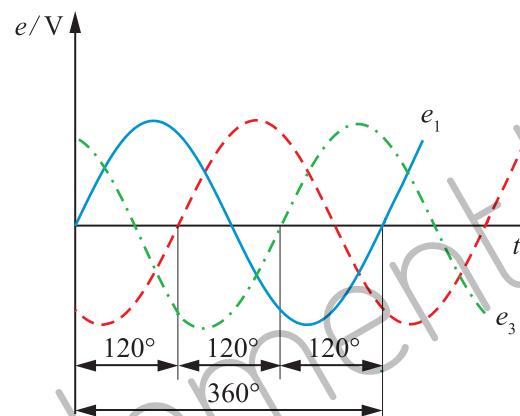


**Nikola Tesla** (1865. – 1943.), hrvatski fizičar. Tesla se rodio u Hrvatskoj, u mjestu Smiljanu kod Gospića. Pohađao je gimnaziju u Gospiću i Karlovcu, a elektrotehniku je studirao u Grazu i Pragu. Radio je u Budimpešti i Parizu. Otkrio je okretno magnetsko polje i napravio prvi praktični motor za izmjeničnu struju. 1884. odlazi u SAD i tri godine kasnije osniva vlastiti laboratorij u kojem dolazi do svojih najvažnijih otkrića: višefaznog sustava izmjeničnih struja, jednofaznog i višefaznog elektromotora, višefaznog transformatora sa željeznom jezgrom, transformatora izmjenične struje visokih frekvencija te brojnih drugih. Objavio je i rezultate procivanja fiziološkog djelovanja struja na ljudsko tijelo i predlagao njihovu primjenu u liječenju. Radio je na ostvarenju bežičnog prijenosa poruka i razvođenju energije bežičnim metodama. U New Yorku je prikazao mogućnost daljinskog upravljanja brodom elektromagnetskim valovima. Patentirao je brojne svoje izume. Bio je nominiran za Nobelovu nagradu, koju nikad nije dobio. Povodom stogodišnjice Teslina rođenja, 1956. godine je jedinica za gustoću magnetskog toka nazvana tesla (T).

## 1.1 Uvod u trofazni sustav

Trofazni sustav čine tri jednofazna sinusna izvora izmjenične struje spojena na odgovarajući način. Ta tri izvora imaju elektromotornu silu jednake amplitude i frekvencije međusobno fazno pomaknute za  $120^\circ$  el.

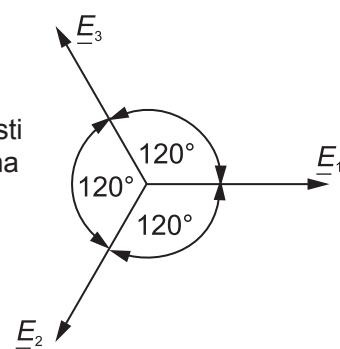
Trofazni se sustav može sastaviti od tri potpuno neovisna izvora spomenutih karakteristika, no takav bi pristup bio neekonomičan i nepraktičan te je stoga u praksi konstruiran trofazni izvor izmjenične struje kao cjelovita nedjeljiva jedinica. Takav se uređaj naziva **trofazni generator** izmjenične struje. Njegove napone možemo prikazati kao tri sinusoide (slika 1.1-1) ili kao tri rotirajuća fazora međusobno pomaknuta za  $120^\circ$  el. (slika 1.1-2).



Slika 1.1-1

Naponi trofaznog generatora prikazani kao tri sinusoide

$E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  – efektivne vrijednosti induciranih napona



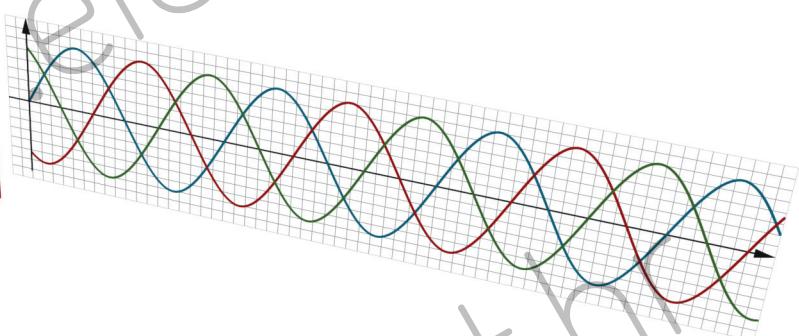
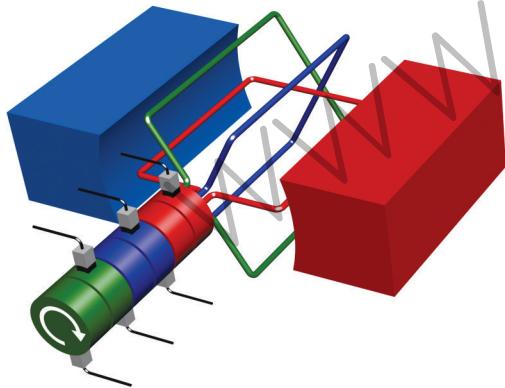
Slika 1.1-2

Naponi trofaznog generatora prikazani kao tri rotirajuća fazora

## 1.2 Trofazni generator

Trofazni generator je uređaj koji na načelu elektromagnetske indukcije pretvara mehaničku energiju u električnu. Načelo rada generatora izmjenične struje obradili smo u udžbeniku *Osnove elektrotehnike I* te ćemo sada samo navesti bitne značajke koje trofazni generator razlikuju od jednofaznog.

Načelnu izvedbu generatora možemo predočiti sa tri jednakata zavoja na jednoj osovini koji nisu međusobno spojeni, a prostorno su razmaknuti za  $120^\circ$ . Zavoji rotiraju u homogenom magnetskom polju (slika 1.2-1). U svakom se zavoju inducira sinusni napon jednakog amplituda i frekvencije, no zbog međusobnog prostornog položaja zavoja inducirani naponi su fazno pomaknuti za  $120^\circ$  el.



Slika 1.2-1

Trofazni generator (načelna izvedba)



Slika 1.2-2

Sinkroni generator

Kod stvarnih trofaznih generatora kakvi se nalaze u elektranama (slika 1.2-2) namoti u kojima se induciranu naponi miruju. Taj dio stroja se naziva stator. Magnetsko polje rotira zajedno s uzbudnim namotom kroz koji teče uzbudna struja na rotirajućem dijelu stroja koji se naziva rotor.

Inducirane elektromotorne sile možemo predočiti izrazima:

$$e_1 = E_m \sin(\omega t)$$

$$e_2 = E_m \sin(\omega t - 120^\circ)$$

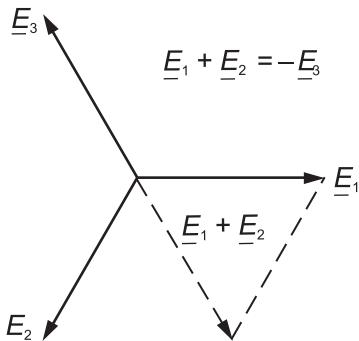
$$e_3 = E_m \sin(\omega t - 240^\circ) \text{ ili } e_3 = E_m \sin(\omega t + 120^\circ),$$

gdje su:

$e_1, e_2, e_3$  trenutačne vrijednosti induciranih EMS, V

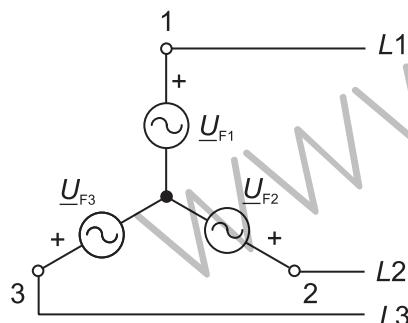
$E_m$  vršna vrijednost (amplituda) induciranih naponi, V

$\omega$  kružna frekvencija induciranih naponi, rad/s.

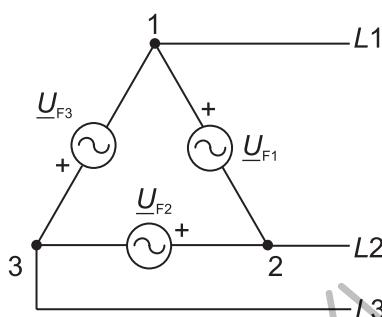


Slika 1.2-3

Vektorski zbroj fazora napona simetričnog trofaznog sustava



a)



b)

Slika 1.2-4

Trofazni generator  
a) spojen u zvijezdu  
b) spojen u trokut

Svaki od pojedinih svitaka, koje nazivamo **fazama generatora**, možemo promatrati kao zasebne izvore izmjeničnog sinusnog napona te bi u načelu mogli funkcionirati neovisno jedan o drugome. No u praksi to nije slučaj, već su faze generatora međusobno spojene.

**Trofazni izvor sinusnog napona sastavljen je od tri jednakata napona fazno pomaknuti za trećinu perioda.**

Karakteristika ovakvog izvora je da je zbroj trenutačnih vrijednosti napona u svakom trenutku jednak nuli, što također vrijedi i za zbroj njihovih fazora (slika 1.2-3). I matematički se može pokazati da je zbroj triju sinusnih napona međusobno pomaknutih za  $120^\circ$  el. uvijek jednak nuli:

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= E_m [\sin \omega t + \sin (\omega t - 120^\circ) + \sin (\omega t + 120^\circ)] = \\ &= E_m (\sin \omega t + \sin \omega t \cos 120^\circ - \cos \omega t \sin 120^\circ + \\ &\quad + \sin \omega t \cos 120^\circ + \cos \omega t \sin 120^\circ) = \\ &= E_m (\sin \omega t + 2\sin \omega t \cos 120^\circ) = \\ &= E_m [\sin \omega t + 2\sin \omega t (-0,5)] = \\ &= E_m (\sin \omega t - \sin \omega t) = 0. \end{aligned}$$

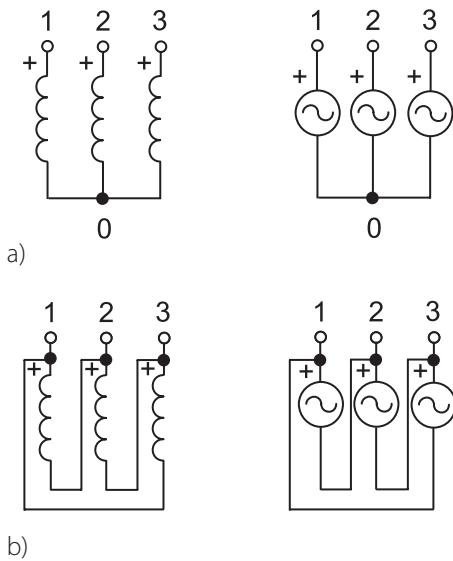
Ovisno o načinu na koji su faze generatora međusobno spojene, možemo govoriti o trofaznom generatoru spojenom u **zvijezdu** ili **trokut**.

**Spoj u zvijezdu** dobit ćemo ako početke trofaznog namota spojimo zajedno, a krajeve namota izvedemo van iz stroja kao izlazne stezaljke generatora (slika 1.2-4a).

Zajednička točka svih triju namota trofaznog generatora spojenog u zvijezdu naziva se **zvjezdiste generatora**.

Ako sva tri namota trofaznog generatora spojimo serijski, a njihove međusobne spojeve izvedemo van iz stroja kao izlazne stezaljke, dobit ćemo **svoj u trokut** (slika 1.2-4b).

U električnim shemama susrećemo različite simboličke prikaze trofaznog generatora koji ne moraju pokazivati prostorni razmještaj namota (slika 1.2-5).



Slika 1.2-5

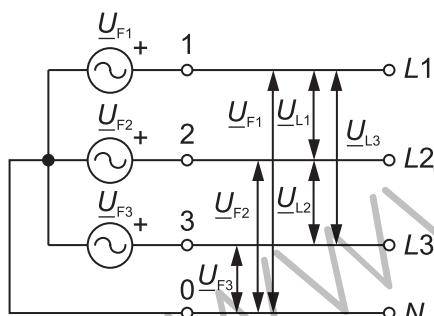
Simbolički prikaz trofaznog generatora

a) spoj u zvijezdu

b) spoj u trokut

**Napomena**

Fazore napona i struje označavamo potcrtajući oznaku efektivne vrijednosti.

Primjerice:  $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$ ,  $\underline{E}$  i sl.

a)

Slika 1.3-1

Fazni i linijski naponi trofaznog sustava

a) i b) spoj u zvijezdu

**1.3 Pojam faznih i linijskih napona i struja**

Trenutačne vrijednosti induciranih napona trofaznog generatora (elektromotorne sile) označili smo sa  $e_1, e_2, e_3$ , a njihove fazore sa  $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3$ . Pri razmatranju strujno-naponskih prilika u trofaznom sustavu unutarnje ustrojstvo izvora nije od primarne važnosti, već nas prije svega zanimaju naponi na stezaljkama generatora. Stoga ćemo u dalnjim razmatranjima trenutačne vrijednosti faznih napona trofaznog generatora označavati sa  $u_{F1}, u_{F2}, u_{F3}$ , a fazore sa  $\underline{U}_{F1}, \underline{U}_{F2}, \underline{U}_{F3}$ .

**a) Generator spojen u zvijezdu**

Napon koji vlada na pojedinom namotu trofaznog generatora nazivamo **faznim naponom**. To je napon koji vlada između pojedine stezaljke 1, 2 ili 3 i zvjezdista generatora 0 ili nulvodiča  $N$ :  $\underline{U}_{F1}, \underline{U}_{F2}, \underline{U}_{F3}$ .

Napon koji vlada između pojedinih stezaljki 1, 2, 3 ili između pojedinih vodova (linija)  $L1, L2, L3$  naziva se **linijski napon**  $\underline{U}_{L1}, \underline{U}_{L2}, \underline{U}_{L3}$ .

Ako fazne i linijske napone predstavimo kao fazore (slike 1.3-1a i 1.3-1b), možemo ih povezati sljedećim izrazima:

$$\underline{U}_{L1} = \underline{U}_{F1} - \underline{U}_{F2}$$

$$\underline{U}_{L2} = \underline{U}_{F2} - \underline{U}_{F3}$$

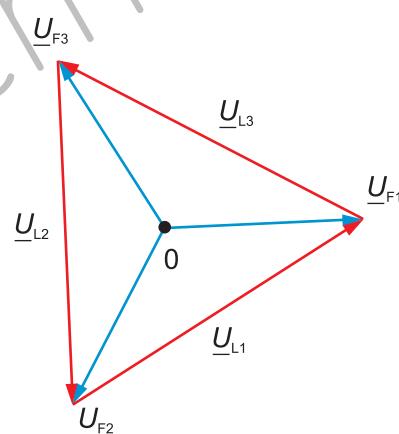
$$\underline{U}_{L3} = \underline{U}_{F3} - \underline{U}_{F1},$$

gdje su:

$\underline{U}_{F1}, \underline{U}_{F2}, \underline{U}_{F3}$  fazni naponi na stezaljkama generatora

$\underline{U}_{L1}, \underline{U}_{L2}, \underline{U}_{L3}$  linijski naponi.

S obzirom na to da se radi o fazorima koji imaju efektivnu vrijednost i pripadni fazni pomak  $\varphi$ , oduzimamo ih kao vektore.



b)

**Napomena**

U Hrvatskoj su efektivne vrijednosti faznog i linijskog napona gradske mreže 220 V i 380 V. Zbog usklađivanja s europskom normom EN50160, fazni napon niskonaponske mreže morat će i u Hrvatskoj biti 230 V, a linijski 400 V.

Ovi su odnosi između faznih i linijskih napona vidljivi iz fazorskog dijagrama (slike 1.3-1b). Odnos efektivnih vrijednosti linijskog i faznog napona ili njihovih tjemnih vrijednosti također možemo matematički izvesti iz fazorskog dijagrama (slika 1.3-3).

$$U_L^2 = (U_F + U_F \cos 60^\circ)^2 + (U_F \sin 60^\circ)^2$$

$$U_L^2 = U_F^2 (1 + 0,5)^2 + U_F^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

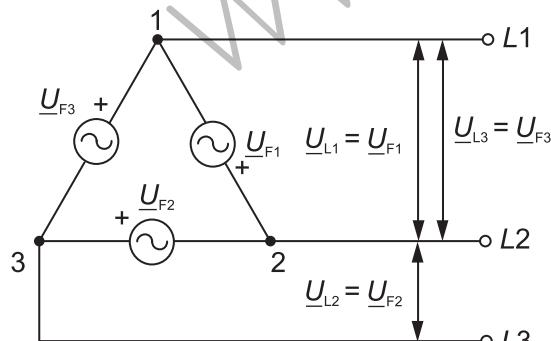
$$U_L^2 = 3 U_F^2 \\ U_L = \sqrt{3} U_F,$$

gdje su:

$U_L, U_F$  efektivna vrijednost linijskog, odnosno faznog napona, V.

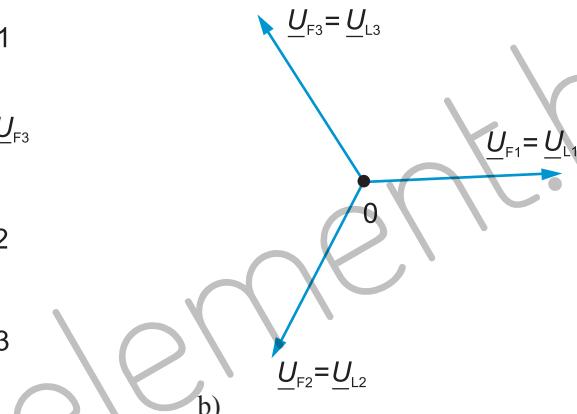
Linijski naponi u simetričnom trofaznom sustavu spojenom u zvijezdu imaju efektivne vrijednosti  $\sqrt{3}$  puta veće od faznih:

$$U_L = \sqrt{3} U_F.$$



Slika 1.3-2

Fazni i linijski naponi trofaznog sustava  
a) i b) spoj u trokut



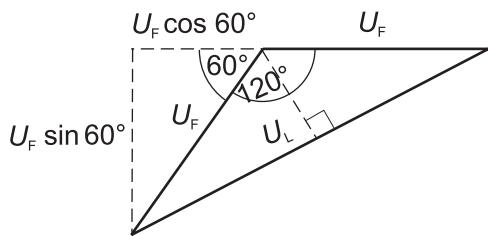
b) Generator spojen u trokut

Ako su namoti trofaznog generatora spojeni u trokut, vidljivo je na slikama 1.3-2a i 1.3-2b da su naponi između pojedinih vodova (linija)  $L_1, L_2, L_3$  jednaki faznim naponima generatora.

$$U_{L1} = U_{F1}$$

$$U_{L2} = U_{F2}$$

$$U_{L3} = U_{F3}.$$



Slika 1.3-3

Matematički odnos faznog i linijskog napona

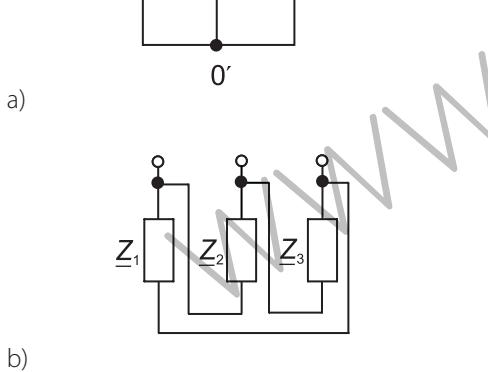
Linijski naponi u simetričnom trofaznom sustavu spojenom u trokut jednaki su faznim naponima:

$$U_L = U_F.$$

### c) Trofazno trošilo

Da bismo mogli govoriti o strujama, trofazni sinusni izvor mora biti opterećen. U trofaznom sustavu trošilo može biti dvojakog karaktera: jednofazno ili trofazno. S pojmom jednofaznog trošila smo se susreli i ranije, pa sada možemo zamijetiti kako je trofazno trošilo sastavljeno od tri dijela koja međusobno mogu biti spojena u zvijezdu ili trokut (slike 1.3-4a i 1.3-4b). Sa  $0'$  označavamo zvjezdiste trošila spojenog u zvijezdu.

Trofazno trošilo je simetrično ako je impedancija trošila u svakoj fazi jednak. Priklučimo li takvo trošilo na trofazni izvor, u fazama izvora će poteći **fazne struje** jednake amplitude. Struje koje teku vodovima (linijama) koji spajaju izvor i trošilo nazivamo **linijskim strujama**.



b)

Slika 1.3-4

Trofazno trošilo  
a) spojeno u zvijezdu  
b) spojeno u trokut

### Napomena

$Z$  – ovako označavamo otpor u krugu izmjenične struje koji ima vrijednost  $Z$  i kut  $\varphi$  (impedancija).

Slika 1.4-1

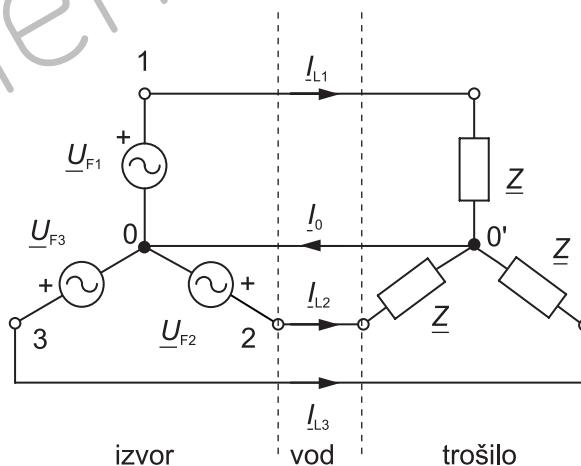
Simetričan trofazni sustav spojen u zvijezdu s nulvodičem

### 1.4 Trofazni sustav spojen u zvijezdu

#### SIMETRIČNO OPTEREĆENJE

##### a) Trofazno simetrično trošilo spojeno u zvijezdu s nulvodičem

Simetrični trofazni sustav spojen u zvijezdu sastavljen je od trofaznog simetričnog izvora na koji je priključeno simetrično trofazno trošilo. Zvjezdiste izvora i zvjezdiste trošila spojeno je vodičem koji se naziva nulvodič ili povratni vodič (slika 1.4-1). Pretpostavimo da su linijski vodiči i nulvodič zanemarive impedancije (zanemarivog otpora induktiviteta i kapaciteta).



Trofazno simetrično trošilo ima u svakoj fazi jednaku vrijednost (modul) impedancije  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$  i jednak fazni kut impedancije:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi,$$

gdje su:

$Z, Z_1, Z_2, Z_3$  vrijednost impedancije pojedine faze trošila,  $\Omega$

$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  fazni kut impedancije pojedine faze trošila, rad.

Potencijal zvjezdišta izvora se uzima kao referentan. Spajanjem zvjezdišta izvora i zvjezdišta trošila nulvodičem, točke  $0'$  i  $0$  su na istom potencijalu pa je napon  $\underline{U}_{0'0}$  između zvjezdišta jednak nuli:

$$\underline{U}_{0'0} = 0.$$

Na osnovi toga zaključujemo da je svaka faza trošila spojenog u zvijezdu priključena na napon jedne faze izvora. Dakle, vrijedi:

$$U_1 = U_{F1} = U_F$$

$$U_2 = U_{F2} = U_F$$

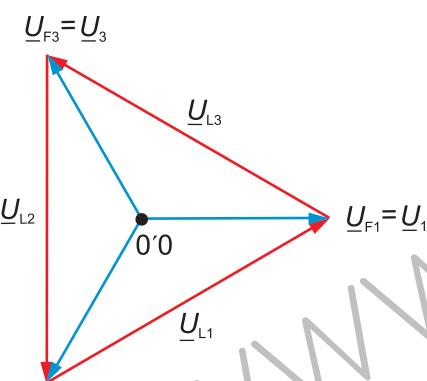
$$U_3 = U_{F3} = U_F,$$

gdje su:

$U_1, U_2, U_3$  efektivne vrijednosti faznih napona trošila, V

$U_{F1}, U_{F2}, U_{F3}$  efektivne vrijednosti faznih napona izvora, V.

U simetričnom trofaznom sustavu spojenom u zvijezdu fazni napon trošila jednak je faznom naponu izvora. Svi fazni naponi imaju jednake efektivne vrijednosti  $U_F$  i međusobno su pomaknuti u fazi za  $120^\circ$  el.



Slika 1.4-2

Fazorski dijagram faznih i linijskih napona

U odjeljku 1.3 a) pokazali smo da je efektivna vrijednost linijskog napona  $\sqrt{3}$  puta veća od efektivne vrijednosti faznog napona.

U simetričnom trofaznom sustavu spojenom u zvijezdu linijski napon je  $\sqrt{3}$  puta veći od faznog napona:

$$U_L = \sqrt{3} U_F.$$

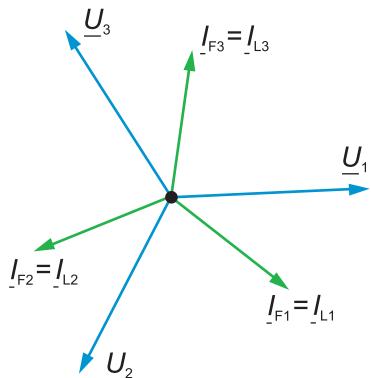
Fazorski dijagram faznih i linijskih napona simetričnog trofaznog trošila spojenog u zvijezdu s nulvodičem prikazan je na slici 1.4-2.

Struje kroz pojedine faze izvora, linije (vodove) i faze trošila potpuno su jednake jer se radi o serijskom spoju. Stoga vrijedi:

$$I_{F1} = I_{L1}$$

$$I_{F2} = I_{L2}$$

$$I_{F3} = I_{L3},$$



Slika 1.4-3

Fazorski dijagram napona i struja trošila

gdje su:

$$I_{F1}, I_{F2}, I_{F3}$$

$$I_{L1}, I_{L2}, I_{L3}$$

fazne struje trošila, A

linijske struje, A.

Fazne i linijske struje u simetričnom trofaznom sustavu spojenom u zvijezdu imaju jednake efektivne vrijednosti:

$$I_F = I_L.$$

Uz jednakе fazne napone i jednakе fazne impedancije trošila sve fazne struje imaju jednaku efektivnu vrijednost  $I_F$  koju računamo prema izrazu:

$$I_{F1} = I_{F2} = I_{F3} = I_F = \frac{U_F}{Z}.$$

Kako su fazni naponi jednak i fazno pomaknuti za  $120^\circ$  el. uz jednakе impedancije i fazne struje bit će jednakе i fazno pomaknute za  $120^\circ$  el., te imaju sinusni valni oblik kao i fazni naponi.

Fazni pomak između napona i struje na pojedinoj fazi trošila jednak je kutu impedancije  $\varphi$ .

Slika 1.4-3 prikazuje fazorski dijagram napona i struja.

Struja kroz nulvodič prema I. Kirchhoffovom zakonu jednak je zbroju faznih struja. Ta je struja jednak nuli jer je zbroj triju jednakih fazora koji su međusobno pomaknuti za  $120^\circ$  el. jednak nuli, što smo dokazali u odjeljku 1.2:

$$I_0 = I_{F1} + I_{F2} + I_{F3} = 0.$$

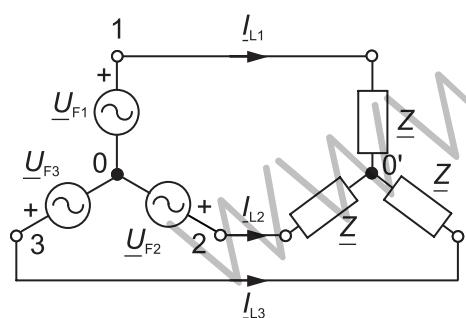
Fazore faznih struja zbrajamo kao vektore.

Struja u nulvodiču pri simetričnom opterećenju jednak je nuli.

Iz toga proizlazi da za simetrično trošilo spojeno u zvijezdu nulvodič nije ni potreban pa se može načiniti spoj u zvijezdu s tri linijska vodiča. U praksi se rijetko susreće potpuno simetrično trošilo, što znači da kroz nulvodič ipak teče struja. S obzirom na to da je struja nulvodiča znatno manja od linijskih struja, on se izrađuje od dvostrukog manjeg presjeka.

### b) Trofazno simetrično trošilo spojeno u zvijezdu bez nulvodiča

Simetrično trofazno trošilo spojeno u zvijezdu možemo priključiti na simetričan trofazni izvor uz pomoć samo tri vodiča jer struja kroz nulvodič ionako ne teče, što znači da je napon između zvjezdista izvora i zvjezdista trošila  $U_{00}$  jednak nuli. Strujno-naponske prilike se neće promijeniti. Uklonimo li nulvodič, pojedina će linijska struja kao povratni vod koristiti preostala dva voda, tako da nulvodič nije potreban (slika 1.4-4). S obzirom na to da je  $U_{00}$  jednak nuli, kao što je bio slučaj kod



Slika 1.4-4

Simetričan trofazni sustav spojen u zvijezdu bez nulvodiča

trofaznog sustava s nulvodičem, i u ovom spoju su fazni naponi trošila jednaki faznim naponima izvora.

Svi izračuni za simetričan spoj u zvijezdu s nulvodičem vrijede i za simetričan spoj u zvijezdu bez nulvodiča.

### Primjer 1

Na simetričan trofazni izvor spojen u zvijezdu faznog napona 230V/50 Hz priključeno je simetrično trofazno trošilo spojeno u zvijezdu impedancije  $Z = 115 \Omega$ , a kut impedancije je  $\varphi = 30^\circ$ . Izračunajte efektivne vrijednosti faznih struja, linijskih naponi i linijskih struja te njihove vršne vrijednosti.

Zadano:

$$U_F = 230 \text{ V}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$Z = 115 \Omega$$

$$\varphi = 30^\circ$$

$$I_{F1}, I_{F2}, I_{F3} = ?$$

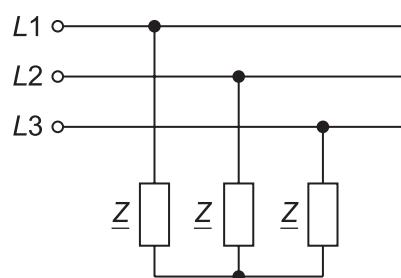
$$U_{L1}, U_{L2}, U_{L3} = ?$$

$$I_{L1}, I_{L2}, I_{L3} = ?$$

$$I_{Fm1}, I_{Fm2}, I_{Fm3} = ?$$

$$I_{Lm1}, I_{Lm2}, I_{Lm3} = ?$$

$$U_{Lm1}, U_{Lm2}, U_{Lm3} = ?$$



Rješenje:

Efektivna vrijednost faznih struja:

$$I_F = \frac{U_F}{Z} = \frac{230}{115} = 2$$

$$I_F = 2 \text{ A}$$

Efektivna vrijednost linijskih struja je jednaka faznim kod spoja u zvijezdu:

$$I_L = I_F = 2 \text{ A}$$

Efektivnu vrijednost linijskih naponi računamo:

$$U_L = \sqrt{3} U_F = \sqrt{3} \cdot 230 = 398,37$$

$$U_L = 398,37 \text{ V}$$

Tjemene vrijednosti napona i struja dobivamo množenjem s  $\sqrt{2}$ :

$$I_{Fm} = I_{Lm} = \sqrt{2} \cdot 2 = 2,83$$

$$I_{Fm} = I_{Lm} = 2,83 \text{ A}$$

$$U_{Fm} = \sqrt{2} U_F = \sqrt{2} \cdot 230 = 325,27$$

$$U_{Fm} = 325,27 \text{ V}$$

$$U_{Lm} = \sqrt{2} U_L = \sqrt{2} \cdot 398,37 = 563,38$$

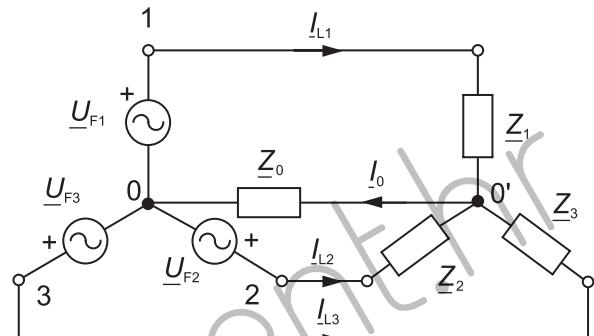
$$U_{Lm} = 563,38 \text{ V}$$

### NESIMETRIČNO OPTEREĆENJE

Kod nesimetričnog opterećenja fazne impedancije trošila  $Z_1, Z_2, Z_3$  međusobno se razlikuju barem u jednoj vrijednosti ili faznom kutu. Strujno-naponske prilike bitno će ovisiti o tome ima li trofazni sustav nulvodič ili ne.

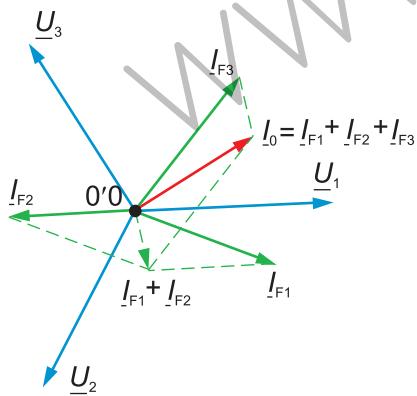
#### a) Trofazni sustav spojen u zvijezdu s nulvodičem

Pretpostavit ćemo da je impedancija nulvodiča  $Z_0 = 0$  (slika 1.4-5). To znači da je napon između zvjezdista izvora i trošila  $U_{0'0}$  jednak nuli.



Slika 1.4-5

Nesimetričan trofazni sustav spojen u zvijezdu s nulvodičem ( $Z_0 = 0$ )



Slika 1.4-6

Fazorski dijagram napona i struja ( $Z_0 = 0$ )

Naponi na impedancijama pojedinih faza su jednake faznim naponima izvora:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{F1}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{F2}$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_{F3}.$$

Fazne struje u ovom slučaju računamo na sljedeći način:

$$I_{F1} = \frac{\underline{U}_{F1}}{Z_1}, \quad I_{F2} = \frac{\underline{U}_{F2}}{Z_2}, \quad I_{F3} = \frac{\underline{U}_{F3}}{Z_3},$$

gdje su:

$I_{F1}, I_{F2}, I_{F3}$  fazne struje, A

$Z_1, Z_2, Z_3$  fazne impedancije trošila,  $\Omega$

$\underline{U}_{F1}, \underline{U}_{F2}, \underline{U}_{F3}$  fazni naponi, V.

Linjske struje  $I_{L1}, I_{L2}, I_{L3}$  su jednake faznim:

$$I_{L1} = I_{F1}$$

$$I_{L2} = I_{F2}$$

$$I_{L3} = I_{F3}.$$

Struja kroz nulvodič  $I_0$  će iznositi:

$$I_0 = I_{F1} + I_{F2} + I_{F3}.$$

Struje imaju efektivnu vrijednost izraženu u A i fazni kut  $\varphi$  te ih predstavljamo kao fazore i vektorski zbrajamo.

**Primjer 1**

Na simetričan trofazni izvor faznog napona 220 V priključeno je trofazno trošilo spojeno u zvijezdu čije su impedancije  $Z_1 = 10 \Omega$ ,  $Z_2 = 20 \Omega$  i  $Z_3 = 20 \Omega$ . Kutovi impedancija su  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $\varphi_2 = 90^\circ$  i  $\varphi_3 = 60^\circ$ . Sustav ima nulvodič. Izračunajte struje u fazama trošila. Nacrtajte fazorske dijagrame faznih napona i struja trošila.

*Zadano:*

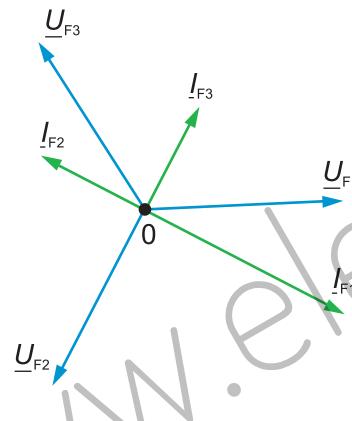
$$U_F = 220 \text{ V}$$

$$Z_1 = 10 \Omega, \varphi_1 = 30^\circ$$

$$Z_2 = 20 \Omega, \varphi_2 = 90^\circ$$

$$Z_3 = 20 \Omega, \varphi_3 = 60^\circ$$

$$I_{F1}, I_{F2}, I_{F3} = ?$$



*Rješenje:*

$$I_{F1} = \frac{U_F}{Z_1} = \frac{220}{10} = 22$$

$$I_{F1} = 22 \text{ A}$$

$$I_{F2} = \frac{U_F}{Z_2} = \frac{220}{20} = 11$$

$$I_{F2} = 11 \text{ A}$$

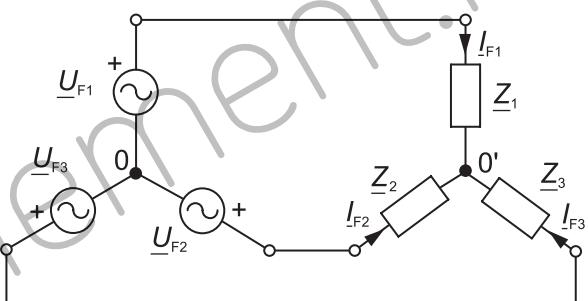
$$I_{F3} = \frac{U_F}{Z_3} = \frac{220}{20} = 11$$

$$I_{F3} = 11 \text{ A}$$

**b) Trofazni sustav spojen u zvijezdu bez nulvodiča**

Nesimetrično će trošilo u ovom slučaju dovesti do razlike potencijala između zvjezdista izvora i trošila (slika 1.4-7 i 1.4-8):

$$U_{0'0} \neq 0.$$



**Slika 1.4-7**

Trofazni sustav sa nesimetričnim trošilom spojenim u zvijezdu bez nulvodiča

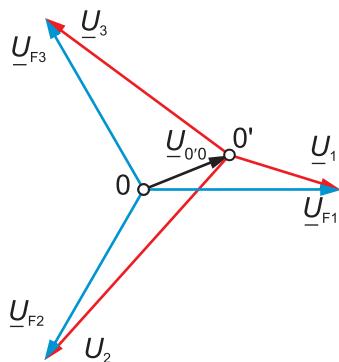
Naponi na pojedinim faznim impedancijama će biti jednaki razlici faznih napona  $U_{F1}$ ,  $U_{F2}$  i  $U_{F3}$  izvora i napona između zvjezdista  $U_{0'0}$ :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{F1} - \underline{U}_{0'0}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{F2} - \underline{U}_{0'0}$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_{F3} - \underline{U}_{0'0}.$$

Napone moramo oduzimati kao vektore jer se radi o fazorima koji osim efektivne vrijednosti imaju i pripadni fazni kut.



Slika 1.4-8

Fazorski dijagram napona

Zbog činjenice da postoji razlika potencijala između zvjezdišta izvora i zvjezdišta trošila, fazne struje, koje su jednake linijskim, računamo prema izrazima:

$$I_{F1} = I_{L1} = \frac{U_{F1} - U_{00}}{Z_1} = \frac{U_1}{Z_1}$$

$$I_{F2} = I_{L2} = \frac{U_{F2} - U_{00}}{Z_2} = \frac{U_2}{Z_2}$$

$$I_{F3} = I_{L3} = \frac{U_{F3} - U_{00}}{Z_3} = \frac{U_3}{Z_3}.$$

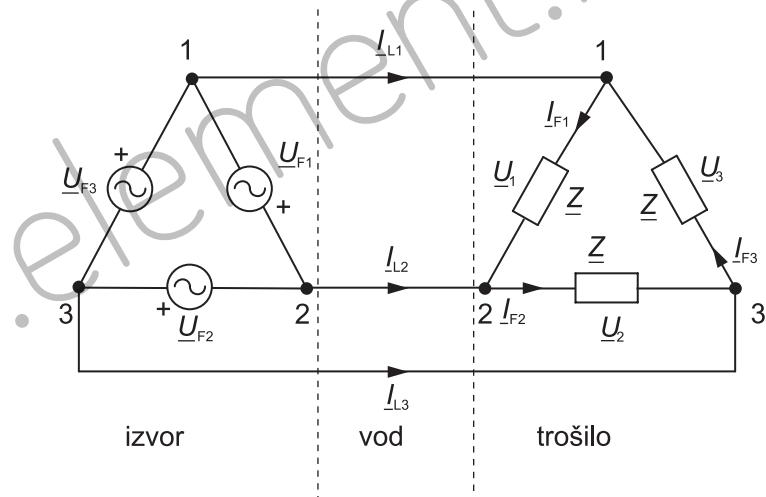
S obzirom na to da nema nulvodiča, zbroj fazi struja treba biti jednak nuli. U slučajevima izrazite nesimetrije može u pojedinim fazama trošila doći do ozbiljnog strujnog preopterećenja.

Na slici 1.4-8 vidimo da je vrijednost faznog napona trošila  $U_2$  znatno veća od faznog napona izvora  $U_{F2}$ .

## 1.5 Trofazni sustav spojen u trokut

### SIMETRIČNO OPTEREĆENJE

Simetrično trofazno trošilo spojeno u trokut i priključeno na trofazni izvor ima na svakoj svojoj fazi napon jednak linijskom naponu (slika 1.5-1).

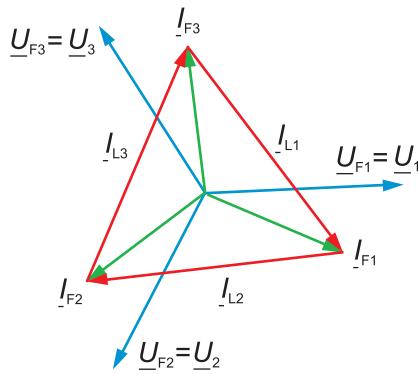


Slika 1.5-1

Trophazni sustav spojen u trokut (simetrično opterećenje)

Fazni i linijski naponi su u simetričnom trofaznom sustavu spojenom u trokut jednak, dakle imaju jednake efektivne vrijednosti:

$$U_F = U_L.$$



Slika 1.5-2

Fazorski dijagram trofaznog sustava spojenog u trokut (simetrično opterećenje)

Pojedine fazne impedancije trošila izravno su spojene na fazne napone izvora koji su jednaki linijskim naponima:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{L1} = \underline{U}_{F1} = \underline{U}_F \angle 0^\circ$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{L2} = \underline{U}_{F2} = \underline{U}_F \angle -120^\circ$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_{L3} = \underline{U}_{F3} = \underline{U}_F \angle 120^\circ,$$

gdje su:

$\underline{U}_L$ ,  $\underline{U}_F$  efektivne vrijednosti linijskog i faznog napona, V

$\underline{U}_{F1}$ ,  $\underline{U}_{F2}$ ,  $\underline{U}_{F3}$  fazni naponi izvora, V

$\underline{U}_{L1}$ ,  $\underline{U}_{L2}$ ,  $\underline{U}_{L3}$  linijski naponi, V

$\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{U}_3$  fazni naponi trošila, V.

Ako je fazna impedancija trošila  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$  sa pripadnim kutovima  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$ , tada će efektivne vrijednosti faznih struja  $I_{F1}$ ,  $I_{F2}$ ,  $I_{F3}$  biti međusobno jednake:

$$I_{F1} = I_{F2} = I_{F3} = I_F = \frac{\underline{U}_L}{Z} = \frac{\underline{U}_F}{Z}$$

i jedna prema drugoj fazno pomaknute za  $120^\circ$  el.

Fazne će struje biti fazno pomaknute u odnosu na napone za kut impedancije  $\varphi$  (slika 1.5-2).

Svaka linijska struja  $\underline{I}_{L1}$ ,  $\underline{I}_{L2}$ ,  $\underline{I}_{L3}$  predstavlja razliku dviju faznih struja i međusobno su jednake, fazno pomaknute za  $120^\circ$  el. Za njih vrijedi:

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{F1} - \underline{I}_{F3}$$

$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_{F2} - \underline{I}_{F1}$$

$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_{F3} - \underline{I}_{F2}.$$

Fazne struje su određene efektivnom vrijednošću i faznim kutom  $\varphi$  te ih oduzimamo kao vektore.

Efektivne vrijednosti linijskih struja su:

$$I_{L1} = I_{L2} = I_{L3} = I_L.$$

Matematički odnosi između vršnih i efektivnih vrijednosti faznih i linijskih struja u simetričnom trofaznom sustavu spojenom u trokut isti su kao kod faznih i linijskih napona u simetričnom trofaznom sustavu spojenom u zvijezdu, što smo pokazali u odjeljku 1.3 a) (slika 1.3-3):

$$I_L^2 = (I_F + I_F \cos 60^\circ)^2 + (I_F \sin 60^\circ)^2$$

$$I_L^2 = I_F^2 (1 + 0,5)^2 + I_F^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$I_L = 3 I_F$$

$$I_L = \sqrt{3} I_F.$$

Efektivne vrijednosti linijskih struja su  $\sqrt{3}$  puta veće od faznih kod simetričnog trofaznog trošila spojenog u trokut:

$$I_L = \sqrt{3} I_F.$$

### Primjer 1

Trofazno simetrično trošilo fazne impedancije  $Z$  priključeno je na trofazni izvor linijskog napona  $U_L = 400$  V. Faznu impedanciju čini otpornik otpora  $R = 30 \Omega$  i zavojnica induktivnog otpora  $X_L = 40 \Omega$ . Izračunajte efektivne vrijednosti faznih i linijskih struja i nacrtajte njihove fazorske dijagrame. Prepostavite da je fazor  $\underline{U}_{L1}$  pod kutom od  $0^\circ$ .

Zadano:

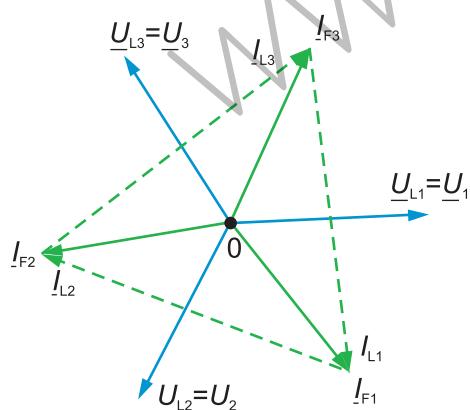
$$U_L = 400 \text{ V}$$

$$R = 30 \Omega$$

$$X_L = 40 \Omega$$

$$\underline{I}_{F1}, \underline{I}_{F2}, \underline{I}_{F3} = ?$$

$$\underline{I}_{L1}, \underline{I}_{L2}, \underline{I}_{L3} = ?$$



Rješenje:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$$

$$Z = 50 \Omega$$

Kut impedancije:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{40}{30} = 1,33$$

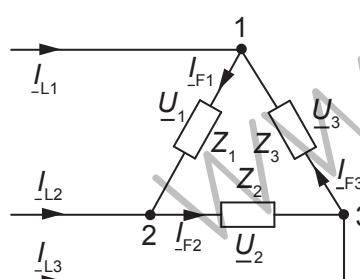
$$\varphi = 53^\circ$$

$$I_F = I_{F1} = I_{F2} = I_{F3} = \frac{U_L}{Z} = \frac{400}{50} = 8$$

$$I_F = 8 \text{ A}$$

$$I_L = I_{L1} = I_{L2} = I_{L3} = \sqrt{3} I_F = \sqrt{3} \cdot 8 = 13,86$$

$$I_L = 13,86 \text{ A}$$



Slika 1.5-3

Nesimetrično trofazno trošilo spojeno u trokut

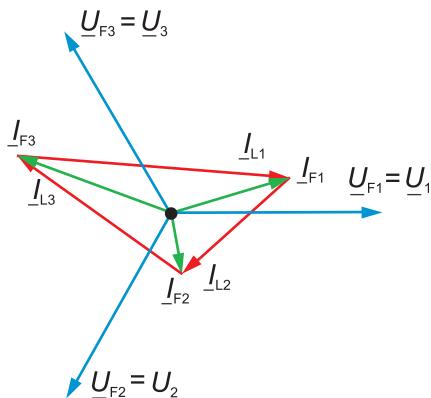
### NESIMETRIČNO OPTEREĆENJE

Ukoliko fazne impedancije trofaznog trošila spojenog u trokut nisu međusobno jednake po iznosu ili po faznom kutu, govorimo o nesimetričnom opterećenju (slika 1.5-3).

Takvo će trofazno trošilo priključeno na mrežu imati fazni napon jednak linijskom te ćemo fazne struje računati prema izrazima:

$$\underline{I}_{F1} = \frac{\underline{U}_{L1}}{Z_1}$$

$$\underline{I}_{F2} = \frac{\underline{U}_{L2}}{Z_2}$$



Slika 1.5-4

Fazni dijagram napona i struja trofaznog sustava spojenog u trokut (nesimetrično opterećenje)

gdje su:

$$\underline{I}_{F1}, \underline{I}_{F2}, \underline{I}_{F3}$$

fazne struje, A

$$\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$$

fazne impedancije trošila,  $\Omega$

$$\underline{U}_{L1}, \underline{U}_{L2}, \underline{U}_{L3}$$

linijski naponi, V.

Linijске ćemo struje  $\underline{I}_{L1}$ ,  $\underline{I}_{L2}$ ,  $\underline{I}_{L3}$  računati na isti način kao što smo to činili kod simetričnog opterećenja (slika 1.5-4):

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{F1} - \underline{I}_{F3}$$

$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_{F2} - \underline{I}_{F1}$$

$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_{F3} - \underline{I}_{F2}$$

Fazore faznih struja zbrajamo i oduzimamo kao vektore.

Zbrojimo li ove tri jednakosti, dobivamo sljedeću jednakost:

$$\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} = \underline{I}_{F1} - \underline{I}_{F3} + \underline{I}_{F2} - \underline{I}_{F1} + \underline{I}_{F3} - \underline{I}_{F2}$$

$$\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} = 0.$$

Općenito možemo zaključiti kako je zbroj linijskih struja kod trofaznog sustava bez povratnog voda uvijek jednak nuli, bez obzira u kakvom je spoju trofazno trošilo i radi li se o simetričnom ili nesimetričnom opterećenju.

### Primjer 2

Na trofaznu mrežu linijskog napona  $U_L = 400$  V spojeno je trofazno trošilo faznih impedancija  $\underline{Z}_1 = 20 \Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = 40 \Omega$  i  $\underline{Z}_3 = 10 \Omega$ . Izračunajte fazne i linijske struje te nacrtajte fazorski dijagram napona i struja. Kutovi impedancija su  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\varphi_2 = 30^\circ$ ,  $\varphi_3 = 60^\circ$ . Pretpostavimo da je fazor linijskog napona  $\underline{U}_{L1}$  pod kutom od  $0^\circ$ .

Zadano:

$$U_L = 400 \text{ V}$$

$$Z_1 = 20 \Omega, \varphi_1 = 45^\circ$$

$$Z_2 = 40 \Omega, \varphi_2 = 30^\circ$$

$$Z_3 = 10 \Omega, \varphi_3 = 60^\circ$$

$$I_{F1}, I_{F2}, I_{F3} = ?$$

Rješenje:

$$I_{F1} = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{U_L}{Z_1} = \frac{400}{20} = 20$$

$$I_{F1} = 20 \text{ A}$$

$$I_{F2} = \frac{U_2}{Z_2} = \frac{U_L}{Z_2} = \frac{400}{40} = 10$$

$$I_{F2} = 10 \text{ A}$$

$$I_{F3} = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{U_L}{Z_3} = \frac{400}{10} = 40$$

$$I_{F3} = 40 \text{ A}$$

