

1Osnovne matematičke operacije

Skup prirodnih brojeva

Skup cijelih brojeva

Skup racionalnih brojeva

U košari ima 2500 trešanja. U drugoj košari nedostaju tri jabuke da bi bila puna, a treća je prazna.

Pozitivni, negativni brojevi i nula proizvod su ljudske potrebe za matematizacijom prirode.

$- = \equiv \mp \pm | 6 7 5 2$

Indijski zapis brojeva, oko 300. pr.Kr.

$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$

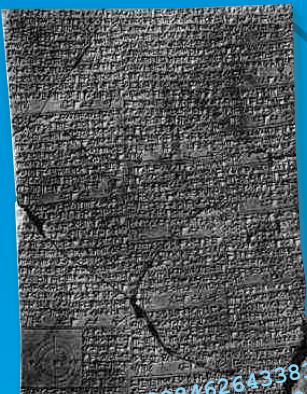
Indijski zapis brojeva, oko 800. pr.Kr.
među kojima se pojavljuje znamenka nula.

$٧ ٢ ٣ ٨ ٤ ٩ ٧ ١ ٥ ٦$

Arapski zapis brojeva iz područja
današnje Španjolske, oko 1000. godine.

1898 1895 1796

Zapis brojeva iz Njemačke, 16. stoljeće
u rukopisu slikara Albrechta Dürera
(1471.-1528.)



Zapis brojeva iz Babilona.

- | | |
|----|-----|
| 1 | ↑ |
| 2 | VV |
| 3 | VVV |
| 4 | VVW |
| 5 | VWV |
| 6 | WVV |
| 7 | WVW |
| 8 | WWV |
| 9 | WWW |
| 10 | AA |

Osnovne matematičke operacije



Babilonska kultura naslijedila je onu sumeransku oko 1900. godine p.K. Koristila je klinasto pismo utisnuto na glinene pločice za zapisivanje brojeva. Zanimljivo je da je korišten seksagezimalni sustav brojeva. Dakle, babilonska djeca morala su naučiti 60 različitih znakova da bi naučila zapisivati brojeve.

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034
8253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811745028410270193852110
5559644629489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603
48610454326648213393607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364367892
59036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179310
51185480744623799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213949463
95224737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827
78577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611
21290219608640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160963185
95024459455346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617
17766914730359825349042875546873115956286388235378759375195771857780217122680661300192
7876611195909216420198938095257201065485863278865936153321827968230301952053028529689957
736225994138912497217752834791315155748572424541506959108295331168617278558705098381754
63746493919255060400927701671139009848824012858361635637076601047101819429515961984676
783744944825537977472684710404753464620804668425906491293313677028989152104751620569660
240580381501935112533824300355876402474964732639149927260426992279678235478163009341721
6412199245863150302861829745557067498385054945885869269956909272107975093029553216534498
7202755960236480665499119881834797753566369807426142527862551818417574672890977727938000
8164706001614524919217321721477235014144197356854161361157352551334757484946838523323
9073941433454577624168625189835694855620992192221427255025425688767179045160165146680498
862723279178608578438382796797668145410095388378660950680064225125205117392984860841284
88626945604241965285022106611863067442786220391949504712371378696095636437191287467764
6575739624138908658326459958133904780275901

$$2r\pi$$

1. Osnovne matematičke operacije

1.1. Skup prirodnih brojeva

Brojevi kojima se služimo za brojenje nazivaju se **prirodni brojevi**. Podsjetimo se, skup svih prirodnih brojeva označavamo s \mathbb{N} ,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}.$$

Tri točkice označuju da se taj niz nastavlja. Bilo koji prirodni broj označujemo s n ,

$$n \in \mathbb{N}.$$

Tako je $6 \in \mathbb{N}$, $103 \in \mathbb{N}$, $1234567890 \in \mathbb{N}$, itd. Ne postoji najveći prirodni broj, ali postoji najmanji i to je broj 1. Uočimo da broj 0 (nula) nije prirodni broj, tj.

$$0 \notin \mathbb{N}.$$

Skup kojemu su članovi svi prirodni brojevi i broj 0 označavamo s \mathbb{N}_0 (čitamo: en nula),

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Svaki prirodni broj ima **sljedbenika**. Primjerice, sljedbenik broja 3 je broj 4, a sljedbenik broja 31 je broj 32. Općenito, sljedbenik prirodnog broja n je broj $n+1$.

Svaki prirodni broj, osim 1, ima svog **prethodnika**. Prethodnik prirodnog broja $n \neq 1$ je broj $n-1$.

Česta je podjela prirodnih brojeva na **neparne i parne**. Neparni brojevi su $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$, a parni brojevi su $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$.

Općenito, neparni brojevi su oblika $2n-1$, a parni oblika $2n$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Istaknimo da je broj 0 paran broj. Prirodne brojeve zapisujemo pomoću znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9.

n - *naturalis* (lat.) -
- prirodan

Jednoznamenkasti
parni brojevi:

0, 2, 4, 6, 8, ...

neparni brojevi:

1, 3, 5, 7, 9, ...

Bilijuni			Milijarde			Milijuni			Tisuće			Jedinice		
SB	DB	B	SMI	DMI	MI	SM	DM	M	ST	DT	T	S	D	J
2	0	1	3	4	5	5	6	7	7	8	9	0	2	3

Zapisani brojevi su: trideset i jedan, tristo jedan i dvjesto jedan bilijun, tristo četrdeset pet milijardi, petsto šezdeset i sedam milijuna, sedamsto osamdeset devet tisuća i dvadeset tri.

* U SAD-u se milijarda naziva bilijun.

1 Zadaci

Skup prirodnih brojeva

1. Koji je prethodnik, a koji sljedbenik brojeva: a) 23, b) 321.
2. Ispišite sve neparne dvoznamenkaste brojeve kojima je znamenka desetica 2.
3. Ispišite sve parne dvoznamenkaste brojeve kojima je znamenka desetica 3.
4. Pročitajte brojeve: a) 1 025, b) 7 654 321, c) 9 876 543 210.
5. Zapišite brojeve:
 - a) deset tisuća sto dvadeset i tri,
 - b) sto dvadeset pet milijuna, tristo četrdeset pet tisuća i sedamsto osamdeset devet,
 - c) dvije milijarde i dvadeset tri.
6. Pomoću znamenaka zapišite broj:

Hrvatska je prema popisu stanovništva iz 2001. godine imala četiri milijuna petsto trideset pet tisuća i pedeset četiri stanovnika.

1.1.1. Zbrajanje prirodnih brojeva

Već smo u osnovnoj školi naučili pisano zbrajati prirodne brojeve, primjerice:

$$\begin{array}{r}
 564 \\
 +289 \\
 \hline
 853
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 564 + 289 = 853 \\
 \swarrow \quad \nearrow \quad \uparrow \\
 \text{PRIBROJNICI} \quad \text{ZBROJ}
 \end{array}$$

Brojevi koje zbrajamo nazivaju se **pribrojnici**, a rezultat zbrajanja se naziva **zbroj**.

Uočimo: ako a i b pripadaju skupu N_0 , tada i $a+b$ pripada skupu N_0 .

Primjer 1.

Koristeći se pismenim zbrajanjem, provjerimo:

$$\text{a)} 36 + 42 = 42 + 36, \quad \text{b)} 984 + 107 = 107 + 984.$$

Općenito, za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi:

$$a + b = b + a.$$

To svojstvo zbrajanja se naziva zakon **komutativnosti**.

Zbroj se ne mijenja ako pribrojnici zamijene mjesta.

Kada imamo više od dva pribrojnika, zagradama određujemo redoslijed računske radnje.

Primjer 2.

Izračunajmo :
$$\begin{aligned} (23 + 31) + 45 &= 23 + (31 + 45) \\ 54 + 45 &= 23 + 76 \\ 99 &= 99. \end{aligned}$$

1

Općenito, za svaka tri prirodna broja a , b i c vrijedi:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

To svojstvo zbrajanja se naziva zakon **asocijativnosti**.

Zbroj triju brojeva ne ovisi o redoslijedu zbrajanja.

To vrijedi za zbrajanje četiriju ili više brojeva.

Primjer 3.

Izračunajmo : $51 + 49 + 23 + 67 = (51 + 49) + (23 + 67) = 100 + 90 = 190.$

1.1.2. Množenje prirodnih brojeva

$$\begin{array}{r} 325 \cdot 64 \\ \hline 1950 \\ 1300 \\ \hline 20800 \end{array}$$

$$325 \cdot 64 = 20\ 800$$

MNOŽITELJI
(FAKTORI)

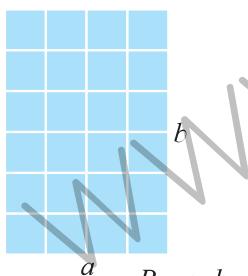
UMNOŽAK
(PRODUKT)

Brojevi koje množimo se nazivaju **množitelji** ili faktori, a rezultat množenja se naziva **umnožak** ili produkt.

Ako a i b pripadaju skupu \mathbb{N} , tada i $a \cdot b$ pripada skupu \mathbb{N} .

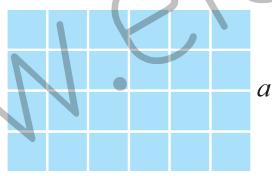
Primjer 1.

Izračunajmo površinu pravokutnika kojemu su duljine stranica: $a = 4$ cm, $b = 6$ cm.



$$P = a \cdot b =$$

$$= 4 \cdot 6 = 24.$$



$$\begin{aligned} P &= b \cdot a = \\ &= 6 \cdot 4 = 24 \\ P &= 24 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Uočimo da je
 $a \cdot b = b \cdot a$.

1

Za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

To svojstvo se naziva zakon **komutativnosti** za množenje.

Umnožak se ne mijenja ako množitelji zamijene svoja mjesta.

Primjer 2.

Zamislimo da 453 učenika škole uplati po 1 kunu za humanitarnu akciju. To bi iznosilo

$$453 \cdot 1 = 453 \text{ kuna.}$$

Ako je a prirodan broj, onda je:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Kad bi svaki učenik donio po 0 kuna, tada ne bi skupili ništa:

$$453 \cdot 0 = 0 \text{ kuna.}$$

Ako je a prirodan broj, onda je:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Primjer 3.

Provjerimo je li

$$(5 \cdot 4) \cdot 6 = 5 \cdot (4 \cdot 6)$$

$$20 \cdot 6 = 5 \cdot 24$$

$$120 = 120.$$

Za svaka tri prirodna broja a , b i c vrijedi:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

To svojstvo se naziva zakon **asocijativnosti** za množenje.

Umnožak triju brojeva ne ovisi o redoslijedu njihovog množenja.

Primjer 4.

Izračunajmo na dva načina:

$$(3 + 4) \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35 \quad (\text{najprije zbrojimo, zatim pomnožimo})$$

$$(3 + 4) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 15 + 20 = 35 \quad (\text{najprije pomnožimo, zatim zbrojimo})$$

Za svaka tri prirodna broja a , b i c vrijedi:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \text{ odnosno}$$

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

To svojstvo se naziva zakon **distributivnosti** množenja prema zbrajanju.

Primjer 5.

Izračunajte na dva načina: $(15 + 13) \cdot 12$.

Inače, ako redoslijed računanja nije određen zagradama, tada se najprije izvodi množenje, potom zbrajanje. Primjerice,

$$4 + 5 \cdot 6 = 4 + 30 = 34.$$

Zadaci

1

Zbrajanje i množenje prirodnih brojeva

1. Koji je najmanji neparni četveroznamenkasti broj?
2. Koji je najveći parni peteroznamenkasti broj?
3. Napišite najveći deseteroznamenkasti prirodni broj kojemu su sve znamenke međusobno različite.
4. Napišite najmanji deseteroznamenkasti prirodni broj kojemu su sve znamenke međusobno različite.
5. Izračunajte zbroj ako su pribrojnici:
a) 87 i 12, b) 236 i 345, c) 532 i 643, d) 4 023 i 789.
6. Izračunajte $a + b$ ako je:

a	356	1 495	27 305
b	453	26 115	46 658

7. Primjenom zakona komutativnosti i asocijativnosti izračunajte ove zbrojeve:
a) $53 + 63 + 47$, b) $23 + 21 + 11 + 179$, c) $23 + 106 + 77 + 94$,
d) $36 + 92 + 64 + 18$, e) $1\ 001 + 321 + 2\ 999 + 80$.
8. Izračunajte opseg trokuta kojemu su duljine stranica $a = 185 \text{ cm}$, $b = 131 \text{ cm}$ i $c = 273 \text{ cm}$.
9. Izračunajte $a \cdot b$ ako je:

a	9	17	530	1	0	25
b	25	344	1	478	1	25

10. Izračunajte:
a) $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 5$, b) $4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 25$, c) $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6$, d) $8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 125$.
11. Izračunajte:
a) $4 + 6 \cdot 8$, b) $(4 + 6) \cdot 8$, c) $4 + 6 \cdot 8 + 5$, d) $4 + 6 \cdot (8 + 5)$.
12. Izračunajte $(a + b) \cdot c$ ako je:

a	45	876	1 055	2 037	1 056
b	23	984	1 055	1 263	1 050
c	5	4	19	407	112

1

13. Izračunajte:

- a) $21 \cdot 37 + 21 \cdot 15 + 21 \cdot 18$,
 b) $57 \cdot (635 + 109) + 57 \cdot (91 + 165)$,
 c) $43 \cdot 34 + 43 \cdot 27 + 45 \cdot 60 + 45$,
 d) $138 \cdot 17 + 138 \cdot 296 + 138 \cdot 487$.

14. U sljedećim primjerima dopišite dva retka i računski provjerite:

a) $1 \cdot 9 + 2 = 11$	b) $9 \cdot 9 + 7 = 88$
$12 \cdot 9 + 3 = 111$	$98 \cdot 9 + 6 = 888$
$123 \cdot 9 + 4 = 1111$	$987 \cdot 9 + 5 = 8888$
$1234 \cdot 9 + 5 = 11111$	$9876 \cdot 9 + 4 = 88888$
$\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$	$\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$
$\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$,	$\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$.

15. Izračunajte opseg trokuta kojemu su duljine stranica $a = 130$ cm, $b = 181$ cm i $c = 210$ cm. Koliki je opseg trokuta koji ima dvostruko dulje stranice?**16.** Predvorje je popločeno pločicama. U svakom redu po širini ima 110 pločica, a u svakom redu po duljini ima 256 pločica. Koliko je pločica u tom predvorju?**17.** Izračunajte opseg pravokutnika kojemu su duljine stranica $a = 130$ cm i $b = 181$ cm.**18.** Koji se broj dobije kada se zbroju najvećeg troznamenkastog broja i najmanjeg četveroznamenkastog broja pribroji najveći peteroznamenkasti broj?

Rješenja

Skup prirodnih brojeva

1. a) 22, 24, b) 320, 322.
 2. 21, 23, 25, 27, 29.
 3. 30, 32, 34, 36, 38.
 5. a) 10 123, b) 125 345 789, c) 2 000 000 023.

Zbrajanje i množenje prirodnih brojeva

1. 1 001.
 2. 99 998.
 3. 9 876 543 210.
 4. 1 023 456 789.
 5. a) 99, b) 581, c) 1 175, d) 4 812.
 6.

$a + b$	809	27 610	73 963
---------	-----	--------	--------

7. a) $(53 + 47) + 63 = 100 + 63 = 163$,
 b) 234, c) 300, d) 210, e) 4 401.

8. 589 cm.

9.

$a \cdot b$	225	5848	530	478	0	625
-------------	-----	------	-----	-----	---	-----

10. a) $(2 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 11) = 10 \cdot 77 = 770$,
 b) 4 200, c) 1 800, d) 12 000.
 11. a) 52, b) 80, c) 59, d) 58.

12.

a	45	876	1 055	2 037	1 056
b	23	984	1 055	1 263	1 050
c	5	4	19	407	112
$(a + b) \cdot c$	340	7 440	40 090	1 343 100	235 872

13. a) 1 470, b) 57 000, c) 5 368, d) 110 400.
 14. a) $12345 \cdot 9 + 6 = 111111$ b) $98765 \cdot 9 + 3 = 888888$
 $123456 \cdot 9 + 7 = 1111111$, $987654 \cdot 9 + 2 = 8888888$.
 15. $o = 521$ cm, $o' = 1 042$ cm.
 16. 28 160 pločica.
 17. $o = 2(a + b)$, $o = 212$ cm.
 18. $999 + 1 000 + 99 999 = 101 998$.

1.2. Skup cijelih brojeva

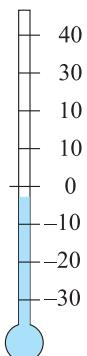
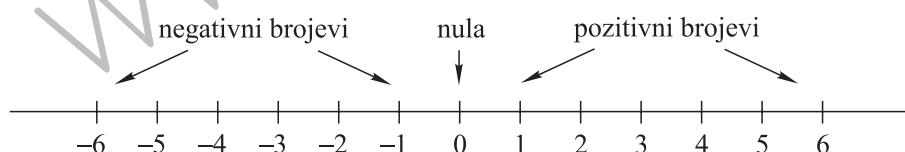
Računske operacije zbrajanja i množenja uvijek su izvedive u skupu prirodnih brojeva. Drugim riječima, zbroj i umnožak prirodnih brojeva uvijek je prirodan broj. To, međutim, ne vrijedi za oduzimanje.

Primjerice, $3 - 5 = -2$.

Rezultat oduzimanja $a - b$, kada je $a < b$, nije prirodan broj, ali je cijeli broj. Skup **Z** svih cijelih brojeva dobivamo proširivanjem skupa prirodnih brojeva nulom i negativnim brojevima:

$$\mathbf{Z} = \{-\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Cijele brojeve možemo predvići točkama pravca, kao na slici.



1

Pravac na kojem su smješteni brojevi se naziva **brojevni pravac**.

Za pozitivne brojeve kažemo da imaju **pozitivan predznak**, a za negativne brojeve da imaju **negativan predznak**, dok nula nema predznaka.

Brojevi 2 i -2 , 6 i -6 , 23 i -23 se nazivaju **suprotni brojevi**. Na brojevnom su pravcu suprotni brojevi jednako udaljeni od nule. Za brojeve 5 i -5 ta udaljenost uznosi 5 jedinica. Kažemo da je 5 **apsolutna vrijednost** ili **modul** brojeva 5 i -5 . To označujemo ovako:

$$|5| = 5, \quad |-5| = 5.$$

Također je: $|23| = 23$ i $|-23| = 23$.

Apsolutna vrijednost ili modul broja jest njegova udaljenost od nule na brojevnom pravcu.

Nula je sama sebi suprotan broj i $|0| = 0$.

1.2.1. Zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva

$$12 + 13 = 25$$

Pozitivne cijele brojeve zbrajamo kao prirodne brojeve.

$$(-7) + (-8) = -15$$

$$(-12) + (-13) = -25$$

Ako su a i b negativni cijeli brojevi, zbrajamo ih tako da im zbrojimo apsolutne vrijednosti, a zbroju pripada negativan predznak.

$$-13 + 8 = -5$$

$$11 + (-17) = -6$$

Ako cijeli brojevi a i b imaju različite predznačne, zbrajamo ih tako da od veće apsolutne vrijednosti oduzmemo manju, a rezultatu dajemo predznak broja veće apsolutne vrijednosti.

Oduzimanje cijelog broja svodi se na zbrajanje suprotnog broja.

$$\begin{aligned} a - b &= a + (-b) \\ 5 - 8 &= 5 + (-8) = -3. \end{aligned}$$

Ako je $a = 5$, onda je $-a = -5$. Ako je $a = -5$, onda je $-a = 5$, tj. $-(-5) = a$.

Općenito: $-(-a) = a$.

$$(-8) + (+15) = +7$$

$$(+15) + (-8) = +7$$

Za zbrajanje cijelih brojeva vrijedi zakon komutativnosti.

$$\begin{aligned} [(+15) + (-8)] + (-12) &= (+7) + (-12) = -5 \\ (+15) + [(-8) + (-12)] &= (+15) + (-20) = -5 \end{aligned}$$

Za zbrajanje cijelih brojeva vrijedi zakon asocijativnosti.

Oduzimanje cijelih brojeva nije komutativno.

Izostavljanje zagrade

$$22 + (-16 + 9) = 22 - 7 = 15$$

$$22 - 16 + 9 = 6 + 9 = 15.$$

Ako je ispred zagrade znak “+”, zagradu se može izostaviti, a predznaci članova unutar zagrade ostaju isti.

$$22 - (-16 + 9) = 22 - (-7) = 29$$

$$22 + 16 - 9 = 38 - 9 = 29.$$

Ako je ispred zagrade znak “-”, pri izostavljanju zagrade promijene se predznaci članova unutar zagrade.

Primjer 1.

Izostavimo zgrade i izračunajmo:

$$(+28) + (+19) = 28 + 19 = 47,$$

$$(+26) - (+35) = 26 - 35 = -9,$$

$$-(22) + (+31) = -22 + 31 = 9,$$

$$(-43) - (-21) = -43 + 21 = -22,$$

$$(-10) + [(-12) - (-8)] = -10 - [-12 + 8] = -10 + 12 - 8 = -6.$$

1.2.2. Množenje cijelih brojeva

Množenje cijelih brojeva se svodi na množenje njihovih absolutnih vrijednosti.

Umnožak cijelih brojeva različitih predznaka je negativan broj.

$$(+)\cdot(-)=-$$

$$(-)\cdot(+)= -$$

Umnožak cijelih brojeva istih predznaka je pozitivan broj.

$$(+)\cdot(+) = +$$

$$(-)\cdot(-) = +$$

Primjerice:

$$\text{a)} 4 \cdot (-6) = -(4 \cdot 6) = -24,$$

$$\text{c)} (-4) \cdot (-6) = 4 \cdot 6 = 24,$$

$$\text{b)} (-6) \cdot 4 = -(6 \cdot 4) = -24,$$

$$\text{d)} (+4) \cdot (+6) = 4 \cdot 6 = 24.$$

Primjer 1.

Izračunajmo:

$$\text{a)} (-22) \cdot 5 = -22 \cdot 5 = -110,$$

$$\text{b)} 6 \cdot (-25) = -6 \cdot 25 = -150,$$

$$\text{c)} (-8) \cdot (-12) = 8 \cdot 12 = 96.$$

Za množenje cijelih brojeva vrijede zakoni komutativnost i asocijativnost.

1

Primjer 2.

$$\begin{aligned} [4 \cdot (-6)] \cdot (-7) &= (-24) \cdot (-7) = 24 \cdot 7 = 168 \\ 4 \cdot [(-6) \cdot (-7)] &= 4 \cdot [6 \cdot 7] = 4 \cdot 42 = 168. \end{aligned}$$

Množenjem s 1 broj se ne mijenja:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a;$$

množenjem s -1 se dobije suprotni broj.Za svaki cijeli broj a vrijedi:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Primjer 3.

Izračunajmo:

$$\text{a)} 4 \cdot (-16) \cdot 0 \cdot 15 = 0, \quad \text{b)} (-3) \cdot (-8) \cdot 4 \cdot (-10) = 3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot (-10) = -960.$$

Za cijele brojeve vrijedi zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju (oduzimanju).

$$(-8 + 5) \cdot (-4) = (-3) \cdot (-4) = 12$$

$$(-8 + 5) \cdot (-4) = (-8) \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) = 32 - 20 = 12.$$

Općenito vrijedi:

$$(a + b) c = a \cdot c + b \cdot c, \text{ odnosno } a(b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Primjer 4.

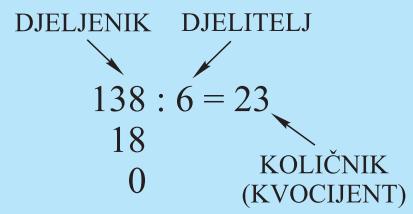
Izračunajmo:

$$14 \cdot (-9) + 6 \cdot (-9) = (14 + 6) \cdot (-9) = 20 \cdot (-9) = -180.$$

1.2.3. Dijeljenje cijelih brojeva

Dijeljenje cijelih brojeva povezano je s množenjem cijelih brojeva:

$$a : b = c \text{ ako je } a = b \cdot c.$$

*Primjer 1.*

- a) $12 : 3 = 4$ jer je $12 = 3 \cdot 4$,
- b) $(-12) : 3 = -4$ jer je $-12 = 3 \cdot (-4)$,
- c) $12 : (-3) = -4$ jer je $-12 = (-3) \cdot 4$,
- d) $(-12) : (-3) = 4$ jer je $12 = (-3) \cdot (-4)$.

Količnik cijelih brojeva istog predznaka je pozitivan, a različitih predznaka negativan broj.



$$\begin{aligned}(+):(+)&=+\\(-):(-)&=+\\(+):(-)&=-\\(-):(+)&=-\end{aligned}$$

Primjer 2.

Izračunajmo: $(24 - 63 : 9) \cdot [-3 + 24 : (-8)]$.

$$\diamond (24 - 63 : 9) \cdot [-3 + 24 : (-8)] = (24 - 7) \cdot [-3 + (-3)] = 17 \cdot (-6) = -102.$$

Računske operacije zbrajanje, oduzimanje i množenje uvijek su izvedive u skupu cijelih brojeva, tj. rezultati tih operacija uvijek su cijeli brojevi.

Međutim, količnik dvaju cijelih brojeva ne mora biti cijeli broj.

Za cijeli broj a kažemo da je **djeljiv** s cijelim brojem b ($b \neq 0$) ako postoji cijeli broj k takav da je

$$a = k \cdot b.$$

Primjerice, broj -23 nije djeljiv brojem 7 jer ne postoji cijeli broj k takav da je

$$-23 = k \cdot (-7).$$

Ako je cijeli broj a djeljiv s cijelim brojem b , onda je a **višekratnik** broja b .

Primjer 3.

Broj 28 djeljiv je brojem 7 jer je $28 = 4 \cdot 7$. Brojevi $7, 14, 21, 28, 35, \dots$ višekratnici su broja 7 . Umnožak svakog cijelog broja a i broja 7 , tj. $7a$ višekratnik je broja 7 . Svaka dva cijela broja imaju više zajedničkih višekratnika. Među zajedničkim višekratnicima brojeva a i b postoji **najmanji zajednički višekratnik** koji označavamo s $v(a, b)$.

Primjer 4.

Odredimo najmanji zajednički višekratnik brojeva 8 i 12 .

\diamond Višekratnici broja 8 su $8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, \dots$,

a višekratnici broja 12 su $12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, \dots$

Zajednički višekratnici brojeva 8 i 12 su $24, 48, 72, \dots$,

a najmanji među njima je 24 , tj.

$$v(8, 12) = 24.$$

Za prirodni broj n , $n \neq 1$ kažemo da je **prost** ili **prim broj** ako je djeljiv samo s **1** i s n .

Primjerice, prosti brojevi manji od 20 su $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ i 19 .

Brojeve koji dijele neki cijeli broj nazivamo **djeliteljima** ili **mjerama** tog broja.

1

Primjer 5.

Odredimo mjere broja 30.

- ◆ Prikažimo broj 30 kao umnožak prostih brojeva: $30 = 2 \cdot 15$
 $= 2 \cdot 3 \cdot 5$

30	2	
	15	3
	5	5
	1	

Mjere broja 30 su brojevi 2, 3 i 5 te svi mogući umnošci tih brojeva, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, $2 \cdot 3 \cdot 5$ i broj 1.

Dakle, mjere broja 30 su 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 i 30.

Najveća zajednička mjera M dvaju cijelih brojeva je najveći cijeli broj koji dijeli svakog od njih.

Primjer 6.

Odredimo najveću zajedničku mjeru brojeva 8 i 12.

- ◆ Mjere broja 8 su 1, 2, 4 i 8, a mjere broja 12 su 1, 2, 3, 4, 6 i 12.

Dakle,

$$M(8, 12) = 4.$$

Ako je $M(a, b) = 1$, kažemo da su a i b **relativno prosti**. Za najveću zajedničku mjeru i najmanji zajednički višekratnik dvaju cijelih brojeva vrijedi:

$$M(a, b) \cdot v(a, b) = a \cdot b.$$

Stoga je za promatrane primjere

$$M(8, 12) \cdot v(8, 12) = 4 \cdot 24 = 8 \cdot 12.$$

Primjer 7.

Odredimo najveću zajedničku mjeru i najmanji zajednički višekratnik brojeva 360 i 420.

$$\begin{aligned} \text{◆ } 360 &= 2 \cdot 180 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 90 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 45 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 420 &= 2 \cdot 210 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 105 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 35 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

$$M(360, 420) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Najveća zajednička mjera dvaju brojeva jest umnožak svih zajedničkih prostih djelitelja zadanih brojeva.

$$v(360, 420) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Najmanji zajednički višekratnik dvaju brojeva jest umnožak zajedničkih prostih djelitelja i preostalih djelitelja zadanih brojeva.

Najveću zajedničku mjeru i najmanji zajednički višekratnik možemo odrediti i na sljedeći način:

360	420	2	
	180	2	
	90	3	
	30	5	
	6	7	

$M(360, 420) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$v(360, 420) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2\ 520$

Provjerite je li: $360 \cdot 420 = 60 \cdot 2\ 520$.

Zadaci

1. Izračunajte:

- a) $52 + (-69) - (+15)$,
 c) $98 - (+56) + (-48) - (-31)$,
- b) $-43 - (-72) - (+36) + 55$,
 d) $-843 - (-56 + 17) + 44$.

2. Izračunajte:

- a) $-20 - [(-12) + (-28)]$,
 c) $-65 - [-35 - (74 + 49)]$,
- b) $48 - [85 + (29 - 53)]$,
 d) $[-(38 + 17) - (81 + 43)] - (62 - 79)$.

3. Izračunajte napamet:

- a) $(+12) \cdot (-4)$, b) $(-6) \cdot (+15)$, c) $(-12) \cdot (+5)$,
 $(-8) \cdot (+11)$, $(+16) \cdot (-5)$, $(-11) \cdot (-6)$,
 $(-4) \cdot (+13)$, $(-13) \cdot (-3)$, $(+14) \cdot (-5)$.

4. Izračunajte:

- a) $-786 \cdot 19$, b) $479 \cdot (-45)$, c) $(-845) \cdot (-26)$, d) $-324 \cdot 57$.

5. Izračunajte:

- a) $-759 : 33$, b) $1\ 127 : (-23)$, c) $(-1\ 170) : 39$, d) $(-2\ 162) : (-47)$.

6. Izračunajte:

- a) $58 \cdot 67 - 58 \cdot 56 + 11 \cdot 42 - 1\ 001$, b) $(4\ 826 : 38 + 62 \cdot 11 - 7\ 194 : 66) : 7$,
 c) $(27\ 962 : 31 - 901) \cdot (1\ 099 - 99 \cdot 11)$.

7. Izračunajte:

- a) $20 - 3 \cdot 5 \cdot (7 - 8)$, b) $[-8 - (-3)] \cdot [5 - 5 \cdot (5 - 7)]$.

1

8. Izračunajte:

- a) $(-10) \cdot [11 + (-24) - (-27)]$, b) $(-2) \cdot [3 \cdot (4 - 2) + 6] + 5 \cdot [-2 \cdot (-3 + 8) + 10]$,
 c) $-45 - \{144 : [(-48) + 30] \cdot (-7)\}$, d) $-6 \cdot [3 \cdot (7 + 6) - 4 \cdot (3 - 8)] - 5 \cdot (409 - 16)$.

9. Napišite kao umnožak prostih djelitelja brojeve:

- a) 28, b) 63, c) 300, d) 605, e) 1 640, f) 2 646.

10. Odredite najveću zajedničku mjeru brojeva:

- a) 30 i 45, b) 84 i 240, c) 1 764 i 630, d) 64 i 256.

11. Odredite najmanji zajednički višekratnik brojeva:

- a) 150 i 420, b) 162 i 2 187, c) 30 i 45, d) 2 541 i 525.

12. Provjerite ispravnost jednakosti $M(a, b) \cdot v(a, b) = a \cdot b$ za brojeve:

- a) 32 i 48, b) 338 i 52, c) 220 i 2 200.

13. Dvojica biciklista zajedno su počela voziti kružnom stazom. Prvom treba 18 sekundi da obide krug, a drugome 21 sekunda. Nakon koliko će se vremena oni opet naći na polaznom mjestu?**14.** U prodavaonici u kojoj se prodaju konopci kupcu je potrebno razrezati dva klupka konopca na dijelove koji će svi biti jednake duljine. Jedno klupko konopca dugačko je 336 m, a drugo klupko 210 m. Kolika će biti duljina svakog dijela konopca? Koliko će ukupno biti dijelova razrezanog konopca?**15.** Kvadratnim pločicama je potrebno popločiti pod kuhinje dimenzije 216×320 . Koja je najveća dimenzija pločica koju možemo uzeti ako ih ne želimo rezati?

Rješenja

- 1.** a) -32, b) 48, c) 25, d) 100.
2. a) 20, b) -13, c) 91, d) 34.
4. a) -14 934, b) -21 555, c) 21 970, d) -18 468.
5. a) -23, b) -49, c) -30, d) 46.
6. a) 99, b) 100, c) 10.
7. a) 35, b) -75.
8. a) -140, b) -24, c) -101, d) -214.
9. a) $2^2 \cdot 7$, b) $3^2 \cdot 7$, c) $2^2 \cdot 5^2 \cdot 3$, d) $11^2 \cdot 5$, e) $2^2 \cdot 5 \cdot 41$, f) $2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$.
10. a) 15, b) 28, c) 126, d) 64.
11. a) 210, b) 4 374, c) 90, d) 63 525.
13. 126 s.
14. 42 m, 13 dijelova. **15.** 8.