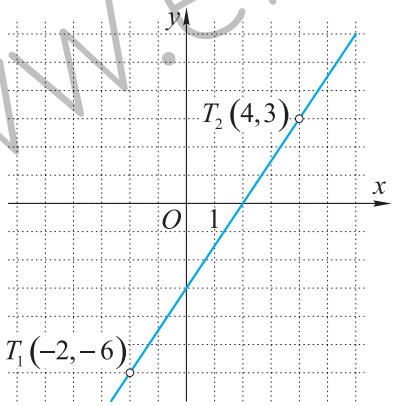
# 1. Analitička geometrija ravnine

## 1.1. Pravac (ponavljanje)

U koordinatnom sustavu $xOy$ nacrtan je (slika 1.1.) pravac određen točkama $T_1(-2,-6)$ i $T_2(4,3)$.




*Slika 1.1.*

Prisjetimo se **jednadžbe pravca određenog dvjema točkama**.

Pravac $p$ koji je u koordinatnom sustavu zadan točkama $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ različitih apscisa i različitih ordinata ima jednadžbu

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ .$$

Naravno da su u toj jednadžbi $x_1, y_1$ i $x_2, y_2$ redom koordinate točaka $T_1$ i $T_2$ koje određuju taj pravac, a da su $x$ i $y$ koordinate bilo koje točke $T$ tog pravca. Prema tome, jednadžba pravca koji je određen točkama $T_1(-2,-6)$ i $T_2(4,3)$ je

1

$$y+6=\frac{3+6}{4+2}(x+2),$$

odakle se lako dobiva

$$3x-2y-6=0,$$

što je opći oblik jednadžbe tog pravca.

Općenito je jednadžba

$$Ax+By+C=0,$$

pri čemu su $A, B$ i $C$ realni brojevi takvi da je ili $A \neq 0$ ili $B \neq 0$, **opći oblik jednadžbe pravca**.

Ako je $A=0$ i $B \neq 0$, jednadžba $Ax+By+C=0$ postaje

$$By+C=0,$$

odnosno

$$y=-\frac{C}{B},$$

što je jednadžba pravca čije sve točke imaju ordinatu jednaku $-\frac{C}{B}$, pa je to **jednadžba pravca paralelnog s** $x$**-osi**. Prema tome **jednadžba** $x$**-osi glasi** $y = 0$.

Ako je $A \neq 0$ i $B=0$, jednadžba $Ax+By+C=0$ postaje

$$Ax+C=0,$$

odnosno

$$x=-\frac{C}{A},$$

što je jednadžba pravca čije sve točke imaju apscisu jednaku $-\frac{C}{A}$, pa je to **jednadžba pravca paralelnog s** $y$**-osi**. Prema tome **jednadžba** $y$**-osi glasi** $x = 0$.

*Primjer 1.1.*

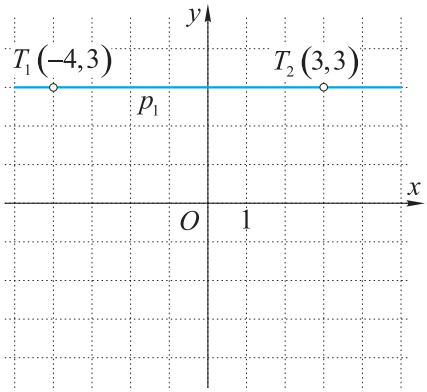
Odredimo jednadžbu pravca zadanog točkama:

a) $T_1(-4,3)$ i $T_2(3,3)$;

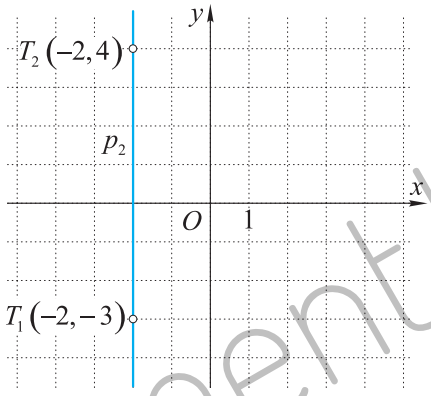
b) $T_1(-2,-3)$ i $T_2(-2,4)$.

▷ Jednake ordinate zadanih točaka u a) zadatku pokazuju da te točke određuju pravac $p_1$ paralelan s $x$-osi (slika 1.2.) pa njegovu jednadžbu određujemo neposredno iz ordinata točaka $T_1$ i $T_2$.

$$p_1 \ldots y=3.$$




Slika 1.2.




Slika 1.3.

Jednake apscise zadanih točaka u b) zadatku pokazuju da te točke određuju pravac $p_2$ paralelan s $y$-osi (slika 1.3.) pa njegovu jednadžbu određujemo neposredno iz apscisa točaka $T_1$ i $T_2$.

$$p_2 \ldots x = -2 . \triangleleft$$

Ako je $B \neq 0$ opći oblik jednadžbe pravca $Ax + By + C = 0$ možemo transformirati ovako:

$$By = -Ax - C / : B$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} .$$

Označimo li realni broj $-\frac{A}{B}$ s $k$, a realni broj $-\frac{C}{B}$ s $l$, tj. ako je $-\frac{A}{B} = k$ i $-\frac{C}{B} = l$, dobivamo jednadžbu

$$y = kx + l ,$$

što je **eksplicitni oblik jednadžbe pravca**. I u toj su jednadžbi $x$ i $y$ koordinate bilo koje točke tog pravca, realni broj $k$ naziva se **koeficijent smjera pravca**, a realni broj $l$ naziva se **odsječak pravca na $y$-osi**.

Prisjetimo se što je koeficijent smjera pravca. U tu svrhu jednadžbu pravca zadanog točkama različitih apscisa i različitih ordinata, dakle jednadžbu

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

napišimo drukčije, kako slijedi,

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

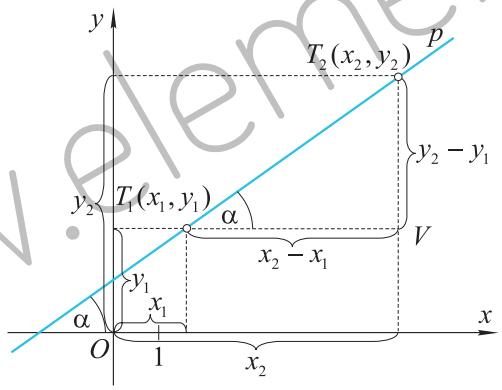
1

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + y_1 \ .$$

Ako u dobivenoj jednadžbi uzmemo da je $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ i $-\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + y_1 = l$, dobivamo jednadžbu

$$y = k\,x + l\,,$$

što je eksplicitni oblik jednadžbe pravca. Na geometrijsko značenje realnih brojeva $k$ i $l$ podsjeća nas slika 1.4., na kojoj je pravac $p$ zadan točkama $T_1\,(x_1\,,\,y_1)$ i $T_2\,(x_2\,,\,y_2)$.




*Slika 1.4.*

Iz pravokutnog trokuta $T_1 V T_2$ je

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha\,,$$

a kako je

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

**koeficijent smjera pravca jednak je tangensu priklonog kuta** $\alpha$ **pravca** $p$.

Odredimo li pomoću jednadžbe

$$y = k\,x + l$$

ordinatu one točke pravca kojoj je apscisa jednaka 0, dobivamo da je

$$y = k \cdot 0 + l$$

$$y = l\,,$$

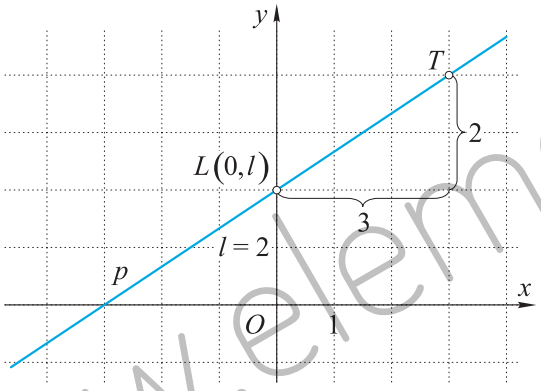
pa je $l$ **odsječak pravca** $y = k\,x + l$ **na** $y$**-osi**.

Naravno, ako je $k \neq 0$ i $l = 0$, jednadžba pravca $y = k\,x + l$ postaje $y = k\,x$, što je **jednadžba svakog pravca koji sadrži ishodište koordinatnog sustava** $xOy$.

*Primjer 1.2.*

Nacrtajmo u koordinatnom sustavu $xOy$ pravac $p \ldots y = \frac{2}{3}x + 2$.

▷ Budući da je $l = 2$, dakle $l > 0$ nanosimo $l = 2$ na pozitivni dio $y$-osi od točke $O$ do točke $L(0, l)$. Budući da je $k = \frac{2}{3}$, dakle $k > 0$, prikloni kut toga pravca je šiljast.



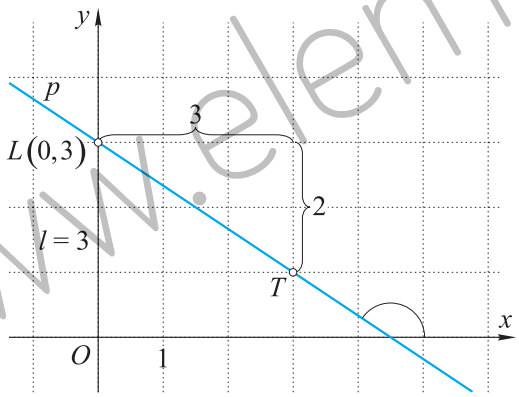

*Slika 1.5.*

Prema definiciji tangensa kuta u pravokutnom trokutu nanosimo 3 jedinice od točke $L$ paralelno s $x$-osi prema njezinom pozitivnom dijelu i 2 jedinice paralelno s $y$-osi prema njezinom pozitivnom dijelu. Dobivamo tako točku $T$. Točke $L$ i $T$ određuju zadani pravac $p$.
◁

Dobro znamo da tangens nekog kuta može biti i negativan broj. Prisjetimo se crtanja pravca koji je zadan jednadžbom u eksplicitnom obliku i kojemu je koeficijent smjera $k$ negativan broj.

*Primjer 1.3.*

Nacrtajmo u koordinatnom sustavu $xOy$ pravac $p \ldots y = -\frac{2}{3}x + 3$.




*Slika 1.6.*

1

Usporedba slike 1.6. sa slikom 1.5. pokazuje kako se crta u koordinatnom sustavu pravac koji je zadan jednadžbom u eksplicitnom obliku i kojemu je koeficijent smjera negativan.

Ako u jednadžbi pravca

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

zamijenimo $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ s $k$, dobivamo

$$y - y_1 = k\,(x - x_1),$$

što je **jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera** $k$ **i točkom** $T_1(x_1, y_1)$.

*Primjer 1.4.*

Napišimo u eksplicitnom obliku jednadžbu pravca zadanog točkom $T_1(2, -3)$ i koeficijentom smjera $k = \frac{1}{2}$.

▷ Iz jednadžbe $y - y_1 = k\,(x - x_1)$ dobivamo da je

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2),$$

pa je

$$y = \frac{1}{2}x - 4$$

tražena jednadžba pravca. ◁

Prisjetimo se još jednog oblika jednadžbe pravca iz kojeg se neposredno može pročitati koliki su odsječci pravca i na $x$-osi i na $y$-osi.

Ako je u jednadžbi $Ax + By + C = 0$ i $A \neq 0$ i $B \neq 0$ i $C \neq 0$, onda je to jednadžba pravca koji nije paralelan ni s $x$-osi ni s $y$-osi, niti taj pravac sadrži ishodište $O$ koordinatnog sustava $xOy$.

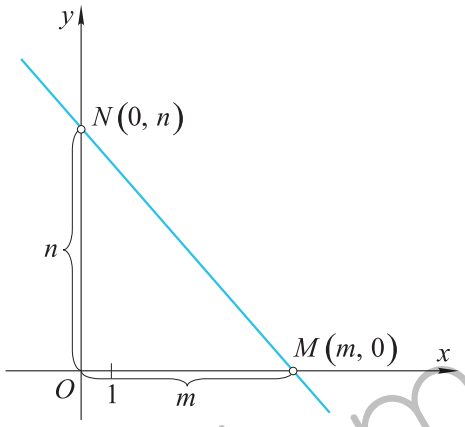
Označimo li s $m$ odsječak (segment) tog pravca na $x$-osi, a s $n$ odsječak (segment) tog pravca na $y$-osi (slika 1.7.), onda je $M(m, 0)$ i $N(0, n)$, pa uvrštavanjem u jednadžbu

$$Ax + By + C = 0$$

za $x$ i $y$ koordinate točke $M$, a zatim koordinate točke $N$, dobivamo

$$Am + B \cdot 0 + C = 0$$

$$A \cdot 0 + Bn + C = 0,$$




*Slika 1.7.*

odakle je

$$m = -\frac{C}{A}$$

$$n = -\frac{C}{B}.$$

Kako jednadžbu $Ax + By + C = 0$ za $C \neq 0$ možemo napisati ovako

$$Ax + By = -C \,/ : (-C)$$

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1,$$

odnosno, zbog $A \neq 0$ i $B \neq 0$, i ovako

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1,$$

dobivamo jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

što je **segmentni oblik jednadžbe pravca**. I u toj su jednadžbi $x$ i $y$ koordinate bilo koje točke koja pripada tome pravcu, a realni brojevi $m$ i $n$ predstavljaju redom odsječke tog pravca na $x$-osi i na $y$-osi.

*Primjer 1.5.*

Napišimo u segmentnom obliku jednadžbu pravca $3x + 4y - 12 = 0$ i izračunajmo površinu trokuta određenog tim pravcem i koordinatnim osima.

1 ▷ Prvo ćemo zadanu jednadžbu napisati ovako

$$3x+4y=12\,.$$

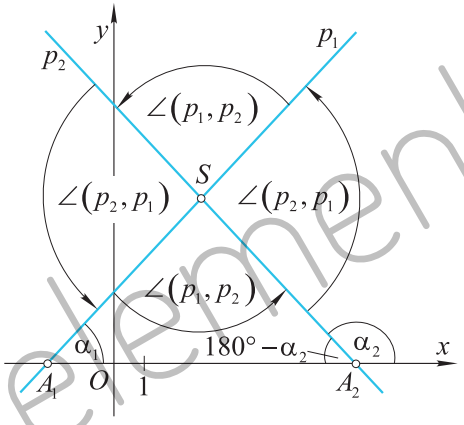
Ako jednadžbu podijelimo s 12, dobivamo

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1\,,$$

što je segmentni oblik jednadžbe tog pravca. Iz tog se oblika jednadžbe pravca vidi da taj pravac siječe $x$-os u točki $M\,(4\,,0)$, a $y$-os u točki $N\,(0\,,3)$. Trokut $MON$ je pravokutan, a duljine kateta su mu $m=4$ i $n=3$, pa mu je površina $P=\dfrac{m\cdot n}{2}=6\,.$ ◁

## Kut između dvaju pravaca

Ako pravci $p_1\ldots y=k_1\,x+l_1$ i $p_2\ldots y=k_2\,x+l_2$ nisu paralelni, oni se sijeku u jednoj točki i određuju dva para vršnih kutova. Orijentirani kut od pravca $p_1$ do pravca $p_2$ (oznaka $\angle\,(p_1\,,p_2)$) najmanji je kut za koji treba zarotirati u pozitivnom smjeru (tj. obrnuto od smjera kretanja kazaljki sata) pravac $p_1$ oko sjecišta pravaca $p_1$ i $p_2$ tako da dođe u položaj pravca $p_2$. Trokut $A_1A_2S$ (slika 1.8.) pomaže nam da mjeru kuta $\angle(p_1\,,p_2)$ izrazimo pomoću kutova $\alpha_1$ i $\alpha_2$. Mjera se kuta $\angle\,(p_1\,,p_2)$ obično označava s $|\angle(p_1\,,p_2)|$ i čita se: "mjera kuta pe jedan pe dva".




*Slika 1.8.*

Na osnovi zbroja kutova u trokutu je

$$\alpha_1+(180°-\alpha_2)+|\angle(p_1\,,p_2)|=180°\,,$$

odakle je

$$|\angle(p_1\,,p_2)|=\alpha_2-\alpha_1\,.$$

Iz jednakosti dvaju kutova slijedi i jednakost njihovih tangensa, pa je

$$\operatorname{tg}\left|\angle(p_1, p_2)\right| = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1),$$

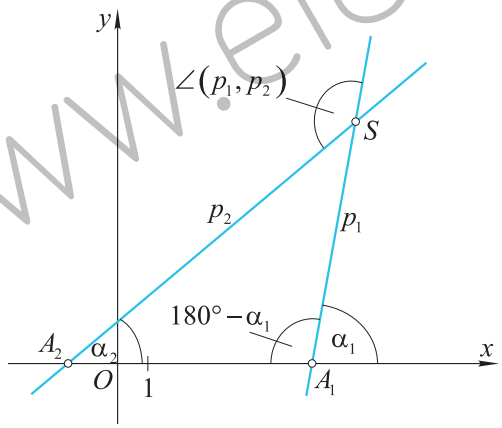
odakle dobivamo da je

$$\operatorname{tg}\left|\angle(p_1, p_2)\right| = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Budući da je $\operatorname{tg}\alpha_2$ koeficijent smjera pravca $p_2$, a $\operatorname{tg}\alpha_1$ koeficijent smjera pravca $p_1$, prethodna jednakost postaje jednakost

$$\operatorname{tg}\left|\angle(p_1, p_2)\right| = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

pomoću koje se određuje mjera kuta što ga čine pravci $p_1 \ldots y = k_1 x + l_1$ i $p_2 \ldots y = k_2 x + l_2$ na slici 1.8. Na toj smo slici uzeli da je $\alpha_1 < \alpha_2$, pa se postavlja pitanje vrijedi li ista jednakost i kada je $\alpha_1 > \alpha_2$.




*Slika 1.9.*

Ako je $\alpha_1 > \alpha_2$ (slika 1.9.), iz trokuta $A_1SA_2$ dobivamo da je

$$\alpha_2 + (180° - \alpha_1) + \left(180° - \left|\angle(p_1, p_2)\right|\right) = 180°,$$

pa je

$$\left|\angle(p_1, p_2)\right| = (\alpha_2 - \alpha_1) + 180°.$$

Kako je funkcija tangens periodična s periodom 180°, to je

$$\operatorname{tg}\left((\alpha_2 - \alpha_1) + 180°\right) = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1),$$

pa za kut od pravca $p_1$ do pravca $p_2$ i opet dobivamo da je

$$\operatorname{tg}\left|\angle(p_1, p_2)\right| = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

što znači da po toj formuli uvijek možemo odrediti mjeru kuta od pravca $p_1 \ldots y = k_1 x + l_1$ do pravca $p_2 \ldots y = k_2 x + l_2$, tj. $\left|\angle(p_1, p_2)\right|$.

1

Budući da je kut $\angle(p_2, p_1)$ suplementaran kutu $\angle(p_1, p_2)$, to je

$$\operatorname{tg}|\angle(p_2, p_1)| = -\operatorname{tg}|\angle(p_1, p_2)|,$$

pa dobivamo da je

$$\operatorname{tg}|\angle(p_2, p_1)| = -\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

odnosno da je

$$\operatorname{tg}|\angle(p_2, p_1)| = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Po upravo dobivenoj formuli možemo odrediti mjeru kuta od pravca $p_2 \ldots y = k_2 x + l_2$ do pravca $p_1 \ldots y = k_1 x + l_1$, tj. $|\angle(p_2, p_1)|$.

Za onaj od kutova $\angle(p_1, p_2)$ i $\angle(p_2, p_1)$ koji ima manju mjeru kažemo da je **kut između pravaca** $p_1$ i $p_2$.

*Primjer 1.6.*

Odredimo kut između pravaca $p \ldots 3x - 5y + 5 = 0$ i $q \ldots 4x - y + 2 = 0$.

▷ Koeficijenti su smjera tih pravaca redom $k_p = \frac{3}{5}$ i $k_q = 4$. Po formuli za $\operatorname{tg}|\angle(p, q)|$ je

$$\operatorname{tg}|\angle(p, q)| = \frac{\frac{3}{5} - 4}{1 + \frac{3}{5} \cdot 4} = \frac{\frac{3 - 20}{5}}{\frac{5 + 12}{5}} = \frac{-\frac{17}{5}}{\frac{17}{5}} = -1,$$

pa je $|\angle(p, q)| = 135°$. Tada je $|\angle(q, p)| = 180° - 135° = 45°$.

Kako je kut $\angle(q, p)$ po mjeri manji od kuta $\angle(p, q)$, to je kut $\angle(q, p)$ kojemu je mjera 45° kut između pravaca $p$ i $q$. ◁

Već otprije znamo da su paralelnim pravcima koeficijenti smjera jednaki. Taj se uvjet paralelnosti dvaju pravaca dobiva i iz formule $\operatorname{tg}|\angle(p_1, p_2)| = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. Naime, ako su pravci $p_1$ i $p_2$ paralelni, onda je $|\angle(p_1, p_2)| = 0°$, pa iz $\operatorname{tg} 0° = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, zbog $\operatorname{tg} 0° = 0$, slijedi da uz $1 + k_1 k_2 \neq 0$ mora biti $k_2 - k_1 = 0$, odnosno $k_1 = k_2$. I obratno, iz $k_1 = k_2$ slijedi da je $\operatorname{tg}|\angle(p_1, p_2)| = 0$, tj. $|\angle(p_1, p_2)| = 0°$, pa su pravci $p_1$ i $p_2$ paralelni. Prema tome **pravci su paralelni onda i samo onda kad su im koeficijenti smjera jednaki**.