

Titranje

1.1. Periodično gibanje

1.2. Slobodno titranje

1.3. Primjeri titranja

1.4. Prigušeno titranje

1.5. Prisilno titranje

1.6. Rezonancija

1.7. Električni titraji

1.8. Veza titranja i rotacijskog gibanja

Periodično gibanje je gibanje koje se ponavlja nakon nekog vremena.

Titranje je periodično gibanje po dijelu pravca ili kružnice.

Period je vrijeme nakon kojeg se gibanje ponavlja.

Titraj je dio titranja koje traje točno jedan period.

Njihaj je pola titraja.

Elongacija je odklon od ravnotežnog položaja.

Amplituda je najveća elongacija.

Svojstvena frekvencija je frekvencija kojom oscilator slobodno titra.

Slobodno titranje je titranje pri kojem ne postoji vanjska sila ni sila otpora pa se amplituda s vremenom ne mijenja.

Harmonijski oscilator je tijelo koje harmonijski titra.

Period harmonijskog oscilatora

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Harmonijsko titranje je titranje pod utjecajem elastične sile.

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = v_0 \cos(\omega t + \varphi_0), v_0 = A\omega$$

$$a = -a_0 \sin(\omega t + \varphi_0), a_0 = A\omega^2$$

Elastična sila je sila razmjerna pomaku.

$$F = -kx$$

Matematičko njihalo je točkasta masa koja se njiše na nerastezljivoj, bezmasenoj niti.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Prigušeno titranje je titranje pri kojem postoji vanjska sila otpora pa se amplituda s vremenom smanjuje.

$$A = A_0 e^{-\delta t},$$

Omjer prigušenja je kvocijent amplituda dvaju uzastopnih titraja.

Prisilno titranje je titranje pri kojem postoji periodična vanjska sila. Ako pritom nema prigušenja, amplituda s vremenom raste. Ako postoji prigušenje, a periodična vanjska sila daje oscilatoru onoliko energije koliko on predaje okolini onda amplituda ostaje ista.

Rezonancija je pojava pri kojoj je prijenos energije od vanjske sile na oscilator učinkovitiji što je frekvencija vanjske sile bliža svojstvenoj frekvenciji.

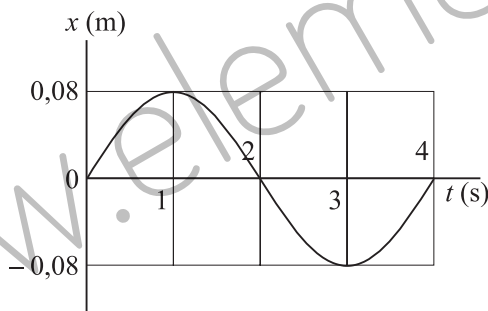
translacija		rotacija	
put	s	kut	φ
brzina	$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	kutna brzina	$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$
akceleracija	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	kutna akceleracija	$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
brzina pri jednolikom ubrzanom gibanju	$v = v_0 + at$	brzina pri jednolikom ubrzanom kruženju	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
put pri jednolikom ubrzanom gibanju	$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$	put pri jednolikom ubrzanom kruženju	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$
količina gibanja	$p = mv$	kutna količina gibanja	$L = I\omega$
kinetička energija translacije	$E = \frac{mv^2}{2}$	kinetička energija rotacije	$E = \frac{1}{2} I\omega^2$
sila	F	moment sile	M
rad pri translaciji	$W = F \cdot s$	rad pri rotaciji	$W = M \cdot \varphi$
snaga pri translaciji	$P = F \cdot v$	snaga pri rotaciji	$P = M \cdot \omega$

objekt	moment tromosti
točkasta masa	$I = mr^2$
prsten (okomita os, kroz središte)	$I = mr^2$
puni valjak	$I = \frac{1}{2} mr^2$
štap (okomita os, kroz središte)	$I = \frac{1}{12} ml^2$
štap (okomita os, kroz jedan kraj)	$I = \frac{1}{3} ml^2$
puna kugla	$I = \frac{2}{5} mr^2$
šuplja kugla	$I = \frac{2}{3} mr^2$

1.2. Slobodno titranje

1. Predmet mase 0,8 kg titra pričvršćen za jedan kraj opruge. Na slici je prikazan pomak x kao funkcija vremena. Iz tih podataka odredite:

- amplitudu A
- kutnu frekvenciju ω
- konstantu opruge k
- brzinu predmeta za $t = 1$ s
- iznos ubrzanja predmeta za $t = 1$ s.



Rješenje: a) 0,08 m; b) 1,6 rads^{-1} ; c) 2 Nm^{-1} ; d) 0 ms^{-1} ; e) 0,2 ms^{-2}

2. Opruga načini 12 titraja u 40 s. Odredite period i frekvenciju opruge.

Rješenje: 3,3 s; 0,3 Hz

3. Čestica koja je u ishodištu točno u trenutku $t = 0$ titra duž osi x frekvencijom od 20 Hz i amplitudom od 3 cm. Napišite jednadžbu gibanja čestice.

Rješenje: $x = 3 \text{ cm} \sin(125,6 \text{ s}^{-1} t)$

4. Čestica titra prema jednadžbi $x = 5 \text{ cm} \cos(23 \text{ s}^{-1} t)$. Odredite frekvenciju titranja i položaj čestice nakon 0,15 s.

Rješenje: 3,7 Hz; -4,8 cm

5. Napišite izraz za elongaciju harmonijskog oscilatora koji titra frekvencijom od 60 Hz. Amplituda titranja je 10 cm, a fazni pomak $\frac{\pi}{4}$. Kolika je elongacija u početnom trenutku ($t = 0$)?

Rješenje: $x = 10 \text{ cm} \sin(380 \text{ s}^{-1} t + \frac{\pi}{4})$
7,1 cm

6. Elongacija harmonijskog oscilatora opisana je izrazom $x = 6 \text{ cm} \sin(22,1 \text{ s}^{-1} t - 0,4)$. Koliki je period tog oscilatora?

Rješenje: 0,28 s

7. Odredite brzinu harmonijskog oscilatora ako je njegova elongacija $x = 2 \text{ mm} \sin(7 \text{ s}^{-1} t + \pi)$.

Rješenje: $v = 14 \text{ mms}^{-1} \cos(7 \text{ s}^{-1} t + \pi)$

8. Čestica harmonijski titra tako da joj se elongacija, odnosno otklon od ravnotežnog položaja mijenja ovisno o vremenu prema zakonu: $x = 8 \text{ cm} \sin(4 \text{ s}^{-1} t)$. Kolika je najveća brzina čestice? Kolika je njezina elongacija nakon 2 s?

Rješenje: 32 cms^{-1} ; 7,9 cm

9. Čestica harmonijski titra tako da joj se brzina mijenja ovisno o vremenu prema zakonu: $v = 4 \text{ cms}^{-1} \cdot \cos(\text{s}^{-1} t)$. Kolika je najveća brzina čestice? Kolika je brzina čestice nakon 4 s?

Rješenje: 4 cms^{-1} ; $-2,61 \text{ cms}^{-1}$

10. Čestica harmonijski titra prema zakonu $x = -A \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right)$. Frekvencija titranja je 0,1 Hz, a amplituda 4 cm. Kolika je najveća brzina čestice? Skicirajte ovisnost elongacije o vremenu, $x(t)$.

Rješenje: $2,5 \text{ ms}^{-1}$

11. Čestica harmonijski titra prema zakonu $x = 4 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \text{ s}^{-1} t - \frac{\pi}{2}\right)$. Kolika je njezina najveća brzina? Kolika joj je elongacija nakon 4 s?

Rješenje: $\pi \text{ cms}^{-1}$; 4 cm

12. Nerastegnuta opruga ima duljinu 10 cm. Kad na istoj opruzi mirno visi uteg mase 50 g, njezina je duljina 12,5 cm. Kojom će frekvencijom titrati taj uteg ako ga izvučemo iz položaja ravnoteže?

Rješenje: 3,2 Hz

13. Utteg mase 200 g titra obješen o elastičnu oprugu. Izračunajte konstantu opruge ako je izmjereno da deset titraja traje 27 s.

Rješenje: $1,1 \text{ Nm}^{-1}$

14. Tijelo mase 100 g obješeno je na oprugu koja se zbog toga produlji za 3,3 cm. Koliko će titraja u jednoj minuti napraviti tijelo mase 200 g na istoj opruzi?

Rješenje: 116,4

15. Kada se na oprugu objesi uteg mase 140 g, opruga se rastegne za 12 cm. Koliku je masu potrebno dodati utegu da bi frekvencija titranja na toj opruzi bila 1 Hz?

Rješenje: 150 g

16. Opruga s utegom titra tako da načini 90 titraja u minuti. Koliko je puta potrebno povećati masu utega kako bi sustav titrao s 10 titraja u minuti?

Rješenje: 81 puta

17. Čestica harmonijski titra tako da načini 15 titraja za pola minute. Jednadžba titranja je $x = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$. Skicirajte ovisnost elongacije čestice o vremenu ako je amplituda 4 dm, a fazni kut 90° .

18. Točka harmonijski titra prema zakonu $x = 4 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$. Skicirajte ovisnost elongacije o vremenu $x(t)$. Koliko je ubrzanje točke nakon 3 s?

Rješenje: 7 cm s^{-2}

19. Točka harmonijski titra prema zakonu: $x = 4 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$. Skicirajte ovisnost brzine točke o vremenu $v(t)$. Koliko je ubrzanje točke nakon 3 s?

Rješenje: $1,7 \text{ cm s}^{-2}$

20. Čestica harmonijski titra prema zakonu $x = -A \sin(\pi \text{ s}^{-1} t)$. Kolika je njezina najveća brzina ako je $A = 2 \text{ cm}$? Skicirajte ovisnost elongacije o vremenu $x(t)$.

Rješenje: $6,3 \text{ cm s}^{-1}$

21. Tijelo mase m harmonijski titra na opruzi periodom T_0 . Kada se tijelu doda uteg mase Δm , period naraste na $2T_0$. Na koji faktor naraste T_0 ako se tijelu m doda uteg mase $2\Delta m$?

Rješenje: 2,83

22. Tijelo mase m objesi se na oprugu i zatitra. U jednoj minuti ono napravi 70 titraja. Kad se masa tijela poveća za 10 g, broj titraja u minuti smanji se za jedan. Kolika je konstanta opruge?

Rješenje: $18,4 \text{ Nm}^{-1}$

23. Tijelo mase m objesi se na oprugu i zatitra periodom T_0 . Ako se tijelu m masa smanji za Δm , period se smanji na $T_0/2$. Ako se tijelu mase m doda Δm , koliki je period?

Rješenje: $1,32 T_0$

24. Tijelo mase m objesi se na oprugu i zatitra periodom T_0 . Ako se tijelu m masa poveća za Δm , period se promijeni na $1,25 T_0$. Ako se tijelu mase m oduzme Δm , koliki je period?

Rješenje: $0,66 T_0$

25. Tijelo mase m objesi se na oprugu i zatitra. Ako se tijelu mase m poveća masa za Δm , period titranja jednak je 0,9 s, a kada se tijelu mase m masa smanji za Δm , period je 0,5 s. Koliki je period titranja tijela mase m ?

Rješenje: 0,73 s