# Skupovi brojeva

## Poglavlje 1.





www.element.hr

**Ciljevi:**

- razlikovati, usporediti i prikazati prirodne, cijele, racionalne i realne brojeve
- prepoznati i pri računanju rabiti osnovna svojstva i međusobne veze računskih operacija

# Uvod

## Brailleov sustav

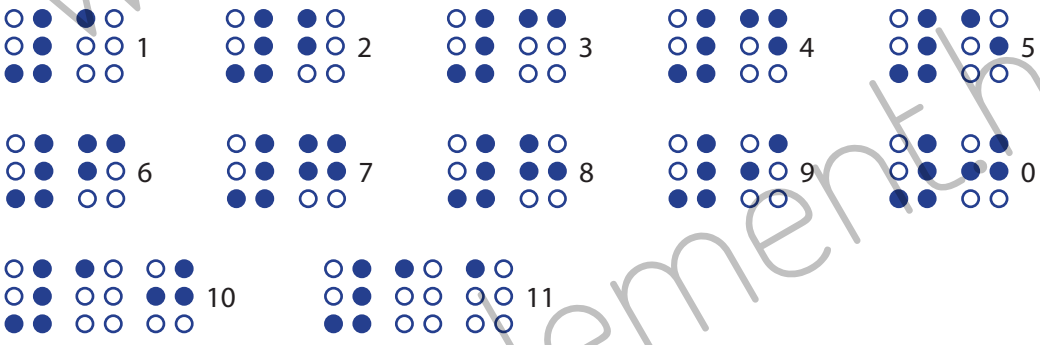
*Braillevo pismo - brajica - pismo za slijepe je reljefno točkasto pismo. Za tvorbu znakova brajice koristi se šest točkica, s pomoću kojih se mogu dobiti 63 znaka. Točkice se označavaju brojevima od jedan do šest.*


*Znak od svih šest točkica zove se šestotočka. On je pravokutnog oblika, visok tri, a širok dvije točkice. Šestotočka se okomito može podijeliti na dvije okomice (vertikale), a vodoravno na tri vodoravnice (horizontale). Lijeva okomica sastoji se od točkica 1, 2 i 3, a desna od točkica 4, 5 i 6; gornja vodoravnica sastoji se od točkica 1 i 4, srednja od točkica 2 i 5, a donja od točkica 3 i 6. Šestotočka se upotrebljava ispred nekih znakova kada stoje samostalno kao znak za orijentaciju. Samostalno su prepoznatljiva trideset i dva znaka, a trideset i jedan znak može se prepoznati samo uz neki drugi znak ili eliminacijom pomoću pravila o upotrebi znakova brajice. Znak koji se sastoji od točkica jedne šestotočke je jednostavan znak. Zbog nedovoljna broja jednostavnih znakova, u brajici se koriste i složeni znakovi koji se dobivaju kombinacijom dvaju ili više jednostavnih znakova.*

*Slova na brajici označavamo ovako:* 

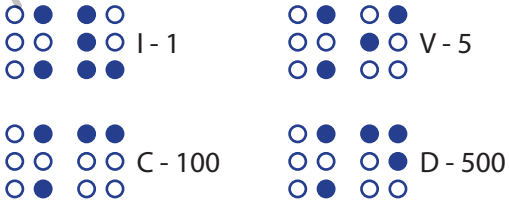

## Arapski brojevi

*Za pisanje arapskih brojeva upotrebljava se* ***predznak*** *(koji nema isto značenje kao u matematici)* ***za arapske brojeve*** *(točkice 3, 4, 5 i 6) te znakovi prve skupine (prvih deset slova latinske abecede) koji služe kao znamenke. Predznak za arapske brojeve piše se samo na početku broja.*




## Rimski brojevi

*Za pisanje rimskih brojeva na brajici koriste se odgovarajuća velika slova.*




## Osnovni matematički znakovi

*Za pisanje matematičkih znakova upotrebljava se predznak (točkica 4).*

## 1.1. Skupovi N, Z, Q

U prvom razredu proučavali smo skupove brojeva i njihova svojstva. Sada ćemo ukratko ponoviti najvažnije.

S **N** smo označili **skup prirodnih brojeva**. Podsjetimo se, to su brojevi kojima se služimo za brojanje:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., n, ...\}.$$

Računske operacije zbrajanja i množenja uvijek su izvedive u skupu **N**. Drugim riječima, zbroj i umnožak prirodnih brojeva uvijek je prirodni broj. To ne vrijedi za oduzimanje i dijeljenje. U skupu **N** jednadžba

$$a + x = b, \qquad a, b \in \mathbf{N}$$

nije uvijek rješiva. Znamo da je rješenje ove jednadžbe

$$x = b - a$$

pa za slučaj $a \geq b$ rješenje jednadžbe nije prirodan broj.

Primjerice, jednadžba

$$5 + x = 2,$$

gdje je

$$x = 2 - 5,$$

nema rješenja u skupu prirodnih brojeva, ali ima u **skupu cijelih brojeva Z**.

Skup **Z** dobili smo proširivanjem skupa prirodnih brojeva nulom i negativnim brojevima:

$$\mathbf{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Jednadžba $5 + x = 2$ u skupu cijelih brojeva **Z** ima rješenje $x = -3$. Svaka jednadžba oblika $a + x = b$, $a \neq 0$ ima rješenje u skupu **Z**. To rješenje je

$$x = b - a.$$

| NETOČNO | TOČNO |
|---|---|
| $\sqrt{64} + \sqrt{36} = = \sqrt{100} = 10$ | $\sqrt{64} + \sqrt{36} = = 8 + 6 = 14$ |
| $4 - 2 \cdot 3 = = 2 \cdot 3 = 6$ | $4 - 2 \cdot 3 = = 4 - 6 = -2$ |
| $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = = \frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 3}{15} = = \frac{22}{15}$ |
| $\frac{2}{5} \cdot 5 = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5} \cdot 5 = 2$ |

Računske operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja uvijek su izvedive u skupu **Z**. Međutim, jednadžba

$$5 \cdot x = 2$$

nema rješenja u skupu **Z** pa je potrebno skup **Z** proširiti. To proširenje je **skup racionalnih brojeva** koji označavamo s **Q** i definiramo:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}.$$

Drugim riječima, to su brojevi koji se mogu napisati u obliku razlomka. Tako u racionalne brojeve spadaju i cijeli brojevi jer se svaki od njih može zapisati kao razlomak. U skupu **Q** je, osim zbrajanja, oduzimanja i množenja, izvedivio i dijeljenje, osim dijeljenja s nulom. Jednadžba $ax = b$, ako su $a$ i $b$ racionalni brojevi i $a \neq 0$, uvijek ima rješenje u skupu **Q**. To rješenje je

$$x = \frac{b}{a}.$$

Napomenimo da racionalni brojevi u potpunosti zadovoljavaju praktične potrebe, njima se mjerni broj svake veličine može izraziti s proizvoljnom točnošću.

*Zadatci za vježbu*

**1.** Ispišite sve elemente (ili interval) skupova:

$A=\{x\in \mathbf{N} \mid x\le 3\}$, $B=\{x\in \mathbf{N} \mid 3\le x<5\}$, $C=\{x\in \mathbf{N} \mid x^2=4\}$,

$D=\{x\in \mathbf{N} \mid x^2=-9\}$, $E=\{x\in \mathbf{Z} \mid -3<x\le 1\}$, $F=\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2=9\}$,

$G=\{x\in \mathbf{R} \mid -2<x\le 3\}$, $H=\{x\in \mathbf{R} \mid x\le 2\}$, $I=\{x\in \mathbf{R} \mid x\ge -3\}$.

**2.** Riješite jednadžbe i odredite kojem skupu brojeva pripada rješenje:

a) $\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{4}x$, b) $0.01x=0.1$, c) $\frac{x}{2}:3=1$,

d) $2:x=3:5$, e) $2\frac{1}{2}:3\frac{4}{3}=x:4\frac{1}{6}$, f) $2x-\sqrt{3}=0$.

**3.** Riješite sustav nejednadžbi $2x-3\le 1$, $5x<9$ u skupu: a) **N**, b) **Z**, c) **R**.

**4.** Izračunajte:

a) $0.7(7-6.25)-(8-9.75):100$, b) $\frac{4}{3}\left[\frac{1}{6}-\left(-\frac{5}{4}+\frac{5}{2}\right)\right]+2\frac{5}{12}$,

c) $0.01:\frac{1}{100}-\frac{3}{10}\cdot 0.6+\frac{1}{10}:0.1$, d) $\left(\frac{5}{6}:10-\frac{1}{2}:\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}$,

e) $3\cdot 4^2-5\cdot(6-7)^2$, f) $4\left(\frac{1}{2}-1\right)^2-4\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$.

**5.** Izračunajte:

a) $(-2)-(-2)^1-(-2)^2-(-2)^3$, b) $4\cdot(-3)^2-3\cdot(-1)^2\cdot(-2)+5\cdot(-3)^2\cdot(-1)-1$,

c) $|-5|+3|-2|-4\left|\frac{1}{2}\right|-6\left|-\frac{1}{2}\right|$, d) $3\left|\frac{1}{2}-2\right|-5\left|1-2\cdot 3^2\right|-\left||-1|-\left|-4\frac{1}{2}\right|\right|$.

**6.** Racionalne brojeve napišite u decimalnom obliku: a) $\frac{3}{100}$, b) $\frac{305}{10\,000}$.

**7.** Decimalne brojeve napišite u obliku razlomka: a) 0.033, c) 3.125.

## 1.2. Skup realnih brojeva

Upoznali smo i brojeve koji se ne mogu napisati u obliku razlomka. Takav je, primjerice, broj $\sqrt{2}$.

To znači da jednadžba $x^2 = 2$ nema rješenja u skupu racionalnih brojeva. Brojevi koji se ne mogu napisati u obliku razlomka nazivaju se **iracionalni brojevi**. Primjeri iracionalnih brojeva su i beskonačni neperiodični decimalni brojevi, kao što su:

0.1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1...

0.1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13...

1.7 3 2 0 5 0 8 0 7...

π.

**Imaginarna jedinica**

Skup koji je proširenje skupa realnih brojeva i u kojem jednadžba $x^2 = -1$ ima rješenje nazvamo skupom **kompleksnih brojeva** (**C**). Da bismo proširili skup realnih brojeva, potrebno je uvesti broj čiji je kvadrat jednak –1, koji označavamo s $i$, $i^2 = -1$.

Broj označen s

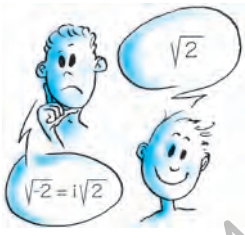
$$i = \sqrt{-1}$$

naziva se **imaginarna jedinica**.

Primjerice,

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i\,.$$

Općenito, kompleksni brojevi (**C**) su oblika $a + bi$.




Racionalni i iracionalni brojevi čine **skup realnih brojeva** koji označavamo s **R**.

Poznato nam je da vrijedi:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}\,.$$


Podsjetimo se da za sve $a, b, c \in \mathbf{R}$ vrijede zakoni navedeni u tablici.

| zakoni | zbrajanje | množenje |
|---|---|---|
| komutativnost (zamjena) | $a+b=b+a$ | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| asocijativnost (udruživanje) | $(a+b)+c=a+(b+c)$ | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ |
| svojstvo neutralnog elementa | $a+0=0+a=a$ | $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ |
| svojstvo suprotnog elementa | $a+(-a)=0$ | $a \cdot \frac{1}{a} = 1,\ (a \neq 0)$ |
| distributivnost | $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ | |

## Potreba proširenja skupa realnih brojeva

Jednadžba $x^2 = 1$ u skupu **R** ima rješenje $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$ jer je $1^2 = 1$ i $(-1)^2 = 1$.

Primjećujemo da jednadžba $x^2 = -1$ nema rješenja u skupu **R**. Naime, ne postoji realni broj $x$ sa svojstvom da je njegov kvadrat jednak –1. Za svaki realni broj $x$ vrijedi da je $x^2 \geq 0$. Nameće se potreba da skup R proširimo tako da jednadžba i njoj slične, kao što su $x^2 = -5$, $x^2 = -\frac{1}{4}$ itd., u proširenom skupu brojeva imaju rješenja.

*Zadatci za vježbu*

**1.** Izračunajte na tri decimale:

a) $2 \cdot 1.3\pi$, b) $0.7^2\pi$, c) $4\sqrt{2} - 1$, d) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 4$, e) $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$, f) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

**2.** S pomoću džepnog računala izračunajte: 30 150.107 : 178.403.

**3.** S pomoću džepnog računala izračunajte: 41.23 + 2.05 · 1.2 + 7.23 : 3.

**4.** S pomoću džepnog računala izračunajte: (6712.46 – 1243.31) : 12.5.

**5.** Izračunajte: a) $\left[2\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot (0.64 : 0.08) : 0.8\right] \cdot 0.3$, b) $1.2 - \left[2 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] - \left(0.3 - \frac{1}{5}\right)$.

**6.** Izračunajte $\frac{4 : (0.3 - 0.2)}{0.16 \cdot (1.6 + 0.9)}$.

**7.** Izračunajte s pomoću razlomaka: a) $3.\dot{7} + 2.\dot{3}$, b) $0.\dot{2} \cdot 0.\dot{8}$.

**8.** Neka je $A = \frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$. Tablicu prepišite u bilježnicu i popunite je:

| $x$ | 1.02 | –0.3 | 2 | $\sqrt{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.4 | –0.45 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | $-\frac{4}{3}$ |
| $A$ | 0.437 | | | | |

## *Odgovorite na pitanja*

**1.** Koji je broj, zapisan u decimalnom obliku, suprotan broju $\frac{4}{11}$?

**2.** Kako zovemo sljedeće svojstvo $3 + 4 = 4 + 3$ za zbrajanje?

**3.** Ako je $a - b < 0$, koji je od ova dva broja veći?

**4.** Koji su od sljedećih brojeva iracionalni? a) $-\frac{2}{3}$, b) 5, c) $-0.\dot{3}\dot{6}$, d) $-\sqrt{2}$.

**5.** Koji broj ne smije biti u nazivniku razlomka? Zašto?

**6.** Što je $i$?

## *Procijenite*

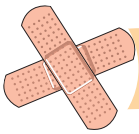
**1.** Koji je od sljedećih brojeva između 1.414 i 1.415?

a) $\frac{2831}{2000}$, b) $\frac{2829}{2000}$, c) $\frac{2827}{2000}$, d) $\frac{7}{5}$.

**2.** Je li $2 - |-4|$ pozitivan broj?

**3.** $200 : 300 = 1 : \square$? a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{2}{3}$, d) $\frac{3}{2}$.

**4.** Koliko ima prirodnih brojeva $n$ za koje vrijedi $-7 < n < 2$? Koji su to brojevi?



## *Modeliranje i rješavanje problema*

**1.** U prvom razredu bio je određeni broj učenika. Godinu je palo 5 učenika i troje ih se ispisalo iz škole. Na početku drugog razreda u taj razred došlo je 4 ponavljača, a u listopadu je došlo još 4 učenika iz nekih drugih škola. Ima li sada u razredu više ili manje učenika nego što ih je bilo u prvom razredu?

**2.** Ako je udaljenost od Zagreba do Slavonskog Broda 175 km, a od Slavonskog Broda do Kutine 103 km, kolika je udaljenost od Kutine do Zagreba?

**3.** Fiziološka otopina zapravo je najjednostavnija moguća tekućina za primjenu u medicini. Budući da je direktna primjena čiste vode u medicinske svrhe isključena, za ispiranje se koristi fiziološka otopina. To je izotonična 0.9-postotna otopina natrijevog klorida u posebno pročišćenoj, sterilnoj vodi. Znamo da je natrijev klorid zapravo sol. Kolika se količina soli nalazi u 7 litara fiziološke otopine?

**4.** Dario čita knjigu i prvi je dan pročitao polovicu cijele knjige. Drugi je dan pročitao polovicu ostatka, treći dan polovicu ostatka i četvrti dan polovicu ostatka. Ako mu je preostalo 8 stranica, koliko knjiga ima stranica?

**5.** Donjim je grafom prikazano odstupanje temperature zraka u razdoblju od 1995. do 2004. u Rijeci po mjesecima u godini. Vidimo da su zabilježena pozitivna temperaturna odstupanja, na godišnjoj razini temperatura je porasla za 0.77 °C.

a) U kojem je mjesecu zabilježeno najveće odstupanje pri porastu temperature?

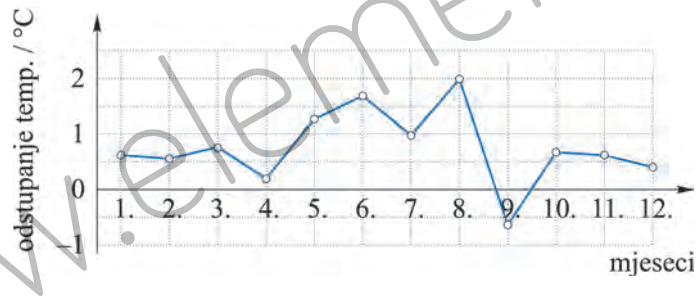
b) U kojim je mjesecima odstupanje iznosilo između 0.5 °C i 1.5 °C?

c) U kojim je mjesecima odstupanje veće od 1.5 °C?

d) U kojim je mjesecima zabilježeno odstupanje pri padu temperature?

e) Možemo li iz ovoga grafa zaključiti u koje je doba godine u Rijeci najhladnije ili najtoplije?

f) U kojem je godišnjem dobu došlo do najvećih odstupanja temperatura?




**6.** Grafom je prikazano odstupanje količine oborina u razdoblju od 1995. do 2004. u Rijeci po mjesecima u godini. Zabilježen je manjak oborina od –0.2 %.

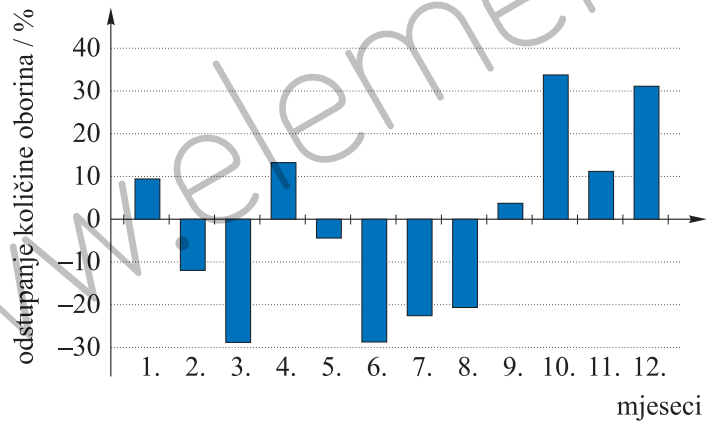
a) U kojim je mjesecima zabilježeno najveće odstupanje nedostatka oborina?

b) U kojim je mjesecima zabilježeno najveće odstupanje viška oborina?

c) U kojim je mjesecima nedostajalo kiše između 10 % i 30 %?

d) U kojim su mjesecima najmanja odstupanja?

e) U kojem je godišnjem dobu došlo do najvećeg odstupanja u količini oborina (povećanje)?



# Rješenja

## 1.1. Skupovi N, Z, Q

**1.** $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4\}$, $C=\{2\}$, $D=\varnothing$, $E=\{-2,-1,0,1\}$,
$F=\{-3,3\}$, $G: x\in\langle -2, 3]$, $H: x\in\langle -\infty, 2]$, $I: [-3, \infty\rangle$.

**2.** a) $12\in\mathbf{N}$, b) $10\in\mathbf{N}$, c) $6\in\mathbf{N}$, d) $\frac{10}{3}\in\mathbf{Q}$, e) $\frac{125}{52}\in\mathbf{Q}$, f) $\frac{\sqrt{3}}{2}\in\mathbf{R}$.

**3.** Iz prve jednadžbe dobivamo $x\le 2$, iz druge $x>-4$. Rješenje sustava je presjek rješenja pojedinih nejednadžbi. Dobivamo:
a) $\{1, 2\}$, b) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, c) $\langle -4, 2]$.

**4.** a) 0, 00925, b) $\frac{35}{36}$, c)1.28, d) $-\frac{17}{16}$, e) 43, f) 0.

**5.** a) 4, b) $-4$, c) 6, d) $-86$.

**6.** a) 0.03, b) 0.0305.

**7.** a) $\frac{33}{1000}$, b) $\frac{3125}{1000}$.

## 1.2. Skup realnih brojeva

**1.** a) 8.186, b) 1.539, c) 4.567, d) $-3.134$, e) 7.464, f) 0.101.

**2.** 169 **3.** 46.1 **4.** 439.692 **5.** a) $-\frac{4}{5}$, b) $-\frac{13}{20}$.

**6.** 100 **7.** a) $\frac{55}{9}$, b) $\frac{5}{7}$.

**8.** U treći redak tablice dolaze brojevi: $-0.2$, 0.172, 0.101, $-3$.

**1.** $-0.3\dot{6}$ **2.** Komutativnost.

**3.** b **4.** d

**5.** Nula, jer s njom ne znamo dijeliti.

**6.** Imaginarna jedinica, $i=\sqrt{-1}$.

**1.** b **2.** Ne. **3.** $\frac{3}{2}$ **4.** Jedan, 1.

**1.** Isti broj učenika.

**2.** 72 km **3.** 0.063 g

**4.** Knjiga ima 128 stranica.

**5.** a) 8. mjesec; b) 1., 3., 5., 7., 10. i 11. mjesec; c) 6. i 8. mjesec; d) 9. mjesec; e) ne; f) ljeto.

**6.** a) 3. i 6. mjesec; b) 10. i 12. mjesec; c) 2., 3., 6. i 7. mjesec; d) 5. i 9. mjesec; e) 10. i 12. mjesec.

# Kvadratna jednadžba i kvadratna funkcija

## Poglavlje 2.



**Ciljevi:**

- računski i približno grafički riješiti kvadratnu jednadžbu u skupu realnih brojeva
- tablično, formulom i grafički prikazati kvadratnu funkciju i prijeći iz jednog načina zadavanja u drugi
- prepoznati kvadratnu funkciju zadanu formulom i grafom te interpretirati značenje vodećeg koeficijenta i diskriminante kvadratne funkcije zadane formulom, odrediti funkcijske vrijednosti kvadratne funkcije
- odrediti nultočke kvadratne funkcije te minimum i maksimum kvadratne funkcije (tjeme parabole)
- primijeniti kvadratne funkcije i kvadratne jednadžbe u modeliranju jednostavnih problema iz matematike, svakodnevnog života, drugih nastavnih predmeta i zdravstvene struke

# Uvod

*Zlatni rez se u povijesti cijenio zbog svojih estetskih proporcija i uvelike je utjecao na arhitekturu antičke Grčke, ali i umjetnost uopće.*

*Brojni su se matematičari kroz povijest bavili zlatnim rezom, pokušavajući naći odgovor na pitanje predstavlja li zlatni rez univerzalni prirodni fenomen.*

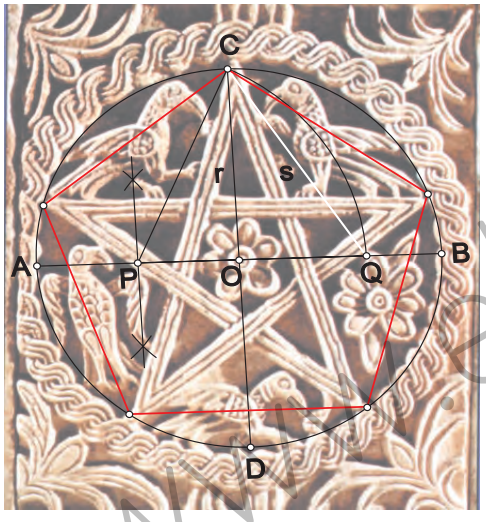
*Francois Viéte, (1540. - 1603.), francuski matematičar, 1560. završio je školovanje, s diplomom pravnika. Profesionalno se počinje baviti matematikom relativno kasno. Svoj je rad zasnivao na dostignućima antičkih i talijanskih matematičara (Cardan). Tvrdio je da Kopernikova teorija o heliocentričnom sustavu nije geometrijski točna. Utjecao je na brojne kasnije matematičare.*

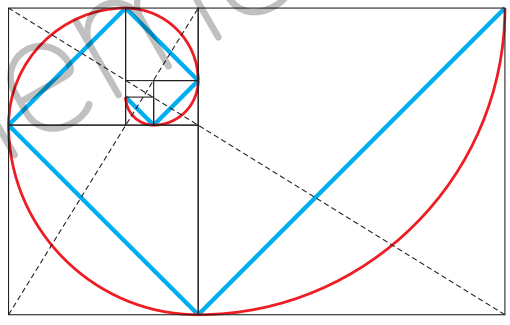
*Zlatni rez*

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x},\quad x^2+x-1=0,\quad x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad \frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

*Omjer zlatnog reza je:*

*1.618033988749894848204586834365 6*

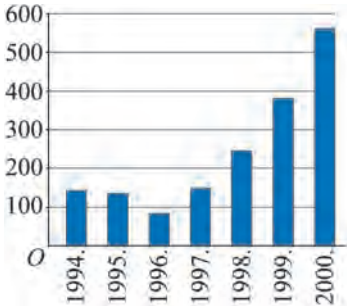


## 2.1. Kvadratna jednadžba

Je li policijska korupcija u porastu?

Graf pokazuje broj osuđenih policijskih službenika u SAD-u u sedam godina.




Podatke možemo modelirati formulom
$N = 23.4\,x^2 - 259.1\,x + 815.8$,
gdje je $N$ broj policijskih službenika osuđenih za kaznena djela $x$ godina nakon 1990. godine. Ako se takav trend nastavi, koje će godine 1000 policajaca biti osuđeno? Kako bismo odgovorili na ovo pitanje, umjesto $N$ bismo uvrstili 1000 i dobili jednadžbu
$23.4\,x^2 - 259.1\,x + 815.8 = 1000$.

Vidite li razliku ove i linearne jednadžbe?


Općenito, jednadžba oblika

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdje su $a$, $b$ i $c$ realni brojevi i $a \neq 0$, naziva se **kvadratna jednadžba**. Zahtjev da je $a \neq 0$ prirodan je, jer kad bi $a$ bio jednak nuli, jednadžba bi bila linearna, a ne kvadratna. Brojevi $a$, $b$ i $c$ nazivaju se **koeficijenti** kvadratne jednadžbe. Ako je u kvadratnoj jednadžbi $b$ ili $c$ jednak nuli, jednadžba se naziva **nepotpuna**.

Evo nekoliko primjera kvadratnih jednadžbi i njihovih koeficijenata:

| jednadžba | koeficijenti |
|---|---|
| $3x^2 - 5x + 6 = 0$ | $a = 3,\quad b = -5,\quad c = 6$ |
| $\frac{1}{2}x^2 - x - 2 = 0$ | $a = \frac{1}{2},\quad b = -1,\quad c = -2$ |
| $x^2 - 4 = 0$ | $a = 1,\quad b = 0,\quad c = -4$ |
| $7x^2 + 3x = 0$ | $a = 7,\quad b = 3,\quad c = 0$ |

Sad ćemo se upoznati s načinima rješavanja kvadratne jednadžbe.

### 2.1.1. Rješavanje nepotpune kvadratne jednadžbe

a) Prvo promotrimo slučaj kad je $c = 0$. Tad imamo jednadžbu

$$ax^2 + bx = 0.$$

PRIMJER 1

Riješimo jednadžbu $2x^2 - 3x = 0$.

*Rješenje*

Izlučimo nepoznanicu $x$ na lijevoj strani jednadžbe. Dobivamo

$$x(2x - 3) = 0.$$

Ako je umnožak dvaju faktora jednak nuli, tad je barem jedan faktor jednak nuli, tj.

iz $A \cdot B = 0$ slijedi da je $A = 0$ ili $B = 0$.

Dakle, mora biti $\quad x = 0$ ili $2x - 3 = 0$.

Odavde dobivamo da su $\quad x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{3}{2}$

rješenja jednadžbe $\quad 2x^2 - 3x = 0$.

Provjerimo zadovoljavaju li dobivena rješenja $x_1$ i $x_2$ jednadžbu

$$2x^2 - 3x = 0.$$

Za $x_1 = 0$ dobivamo $\quad 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 = 0 - 0 = 0,$

a za $x_2 = \frac{3}{2}$ imamo $\quad 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0,$

čime smo potvrdili ispravnost rješenja.

## PRIMJER 2

Riješimo jednadžbu $(x+3)(2x-1)+3=0.$

*Rješenje*

Nakon množenja dobivamo:

$$2x^2 - x + 6x - 3 + 3 = 0$$
$$2x^2 + 5x = 0$$
$$x(2x+5) = 0$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{5}{2}.$$

Općenito, iz jednadžbe oblika $ax^2 + bx = 0$

izlučivanjem dobivamo $x(ax+b) = 0,$

iz čega slijedi da je $x = 0$ ili $ax + b = 0,$

odnosno $x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$

Primijetimo da su u ovom slučaju oba rješenja jednadžbe realna i da je jedno rješenje

$$x = 0.$$

b) Ako je $b = 0$, tad jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ prelazi u jednadžbu

$$ax^2 + c = 0.$$

Marin Getaldić (1568.-1626.), prvi hrvatski matematičar europskog formata. Tijekom života mnogo je vremena proveo na univerzitetima diljem Europe (Italija, Njemačka, Francuska, Velika Britanija, Belgija), gdje je upoznao mnoga tadašnja matematička imena, Cristofora Clavija, Galilea Galileija, Briggsa, Napiera i Françoisa Viétea, koji mu je dao na studiranje mnoga svoja neobjavljenja djela, iskazavši tako divljenje prema Getalićevu talentu. Ubrzo Viéte dopušta Dubrovčaninu da neka njegova djela pripremi za tisak. Prvo je objavljena Viéteova rasprava *O rješenju brojnih jednadžbi*, kojoj prethodi pismo Marina Getaldića.

## PRIMJER 3

Riješimo kvadratnu jednadžbu $4x^2 - 25 = 0.$

*Rješenje*

Prenesimo slobodni član na desnu stranu i podijelimo jednadžbu s koeficijentom uz $x^2$.

$$4x^2 - 25 = 0$$
$$4x^2 = 25$$
$$x^2 = \frac{25}{4}.$$

Odavde dobivamo $x_1 = \frac{5}{2}$ i $x_2 = -\frac{5}{2}.$

Provjerom lako možemo dokazati da oba rješenja zadovoljavaju zadanu jednadžbu.

Istim postupkom rješavamo zadanu jednadžbu i u općem slučaju:

$$ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 = -c$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Ako je $-\frac{c}{a} \geq 0,$ oba su rješenja realni brojevi, a ako je $-\frac{c}{a} < 0,$ rješenja su imaginarni brojevi (malo više o njima na str. 11).


## PRIMJER 4

Riješimo jednadžbu $9x^2 + 4 = 0$.

*Rješenje*

$$9x^2 + 4 = 0$$
$$9x^2 = -4$$
$$x^2 = -\frac{4}{9}$$

$$x_1 = \sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}\cdot(-1)} = \frac{2}{3}i$$
$$x_2 = -\sqrt{-\frac{4}{9}} = -\sqrt{\frac{4}{9}\cdot(-1)} = -\frac{2}{3}i$$

## PRIMJER 5

Riješimo jednadžbu $\frac{x}{x-1} + \frac{x-6}{x^2-1} = \frac{2}{x+1}$, $x \neq \pm 1$.

*Rješenje*

Množenjem s $(x^2 - 1)$ dobivamo $x(x+1) + x - 6 = 2(x-1)$

$$x^2 + x + x - 6 = 2x - 2$$
$$x^2 = 4$$
$$x_{1,2} = \pm 2.$$

*Zadatci za vježbu*

Riješite jednadžbe:

**1.** a) $x^2 - 7x = 0$, b) $x^2 + 3x = 0$, c) $3x^2 - 5x = 0$, d) $7x^2 + 10x = 0$,
e) $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$, f) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{9}x = 0$, g) $x^2 = -\frac{1}{2}x$, h) $x^2 = x$.

**2.** a) $(x-3)(x+4) + 12 = 0$, b) $(x+1)(x+5) - 5 = 0$, c) $(2x-1)(3x+3) + 3 = 0$.

**3.** a) $x^2 - 81 = 0$, b) $\frac{1}{7}x^2 - 7 = 0$, c) $2x^2 - 72 = 0$,
d) $45x^2 = 180$, e) $0.1x^2 = 14.4$, f) $\frac{1}{2}x^2 = 8$.

**4.** a) $(4x-6)(4x+6) = 13$, b) $(x-4)(x-5) = 9(4-x)$, c) $x(x+3) = 3(x+12)$.

**5.** a) $(x+1)(x-4) + 3x = 0$, b) $2(3x^2 - 1) - 22 = 0$, c) $(3x+1)(x+1) - (x+5)(x-1) = 0$.

## 2.1.2. Kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$

Prije nego što prijeđemo na rješavanje kvadratne jednadžbe u općem obliku, riješimo ove jednadžbe.

PRIMJER 1

Riješimo jednadžbu $x^2 - 6x + 9 = 0$.

*Rješenje*

Lijeva strana jednadžbe $x^2 - 6x + 9 = 0$ je potpuni kvadrat, tj.

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ pa jednadžbu možemo napisati u obliku

$$(x - 3)^2 = 0.$$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Odavde je $x - 3 = 0$, odnosno $x = 3$

PRIMJER 2

Riješimo jednadžbu $(x + 3)(2x - 1) = 0$.

*Rješenje*

Na osnovi primjera 1, dobivamo $x + 3 = 0$ ili $2x - 1 = 0$ pa su rješenja jednadžbe:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Stari stanovnici Mezopotamije također su rješavali kvadratnu jednadžbu. Jedan zadatak s glinene pločice zapisan klinastim pismom glasi: "Sedmi dio širine pravokutnika, sedmi dio visine i sedmi dio ploštine zbrojeni daju dva. Širina i visina zbrojene daju 5.5. Kolika je širina i kolika je visina?" Tekst daje i rješenje: "Širina je 3.3, a visina 2.2." Jesu li i vaša rješenja takva?

PRIMJER 3

Riješimo jednadžbu $x^2 - 10x + 21 = 0$.

*Rješenje*

Prenesimo slobodni član na desnu stranu. Dobivamo jednadžbu

$$x^2 - 10x = -21.$$

Sada na lijevoj strani dodajmo i oduzmimo kvadrat polovine koeficijenta uz $x$, kako bismo dobili kvadrat binoma.

Dobili smo $x^2 - 10x + 5^2 - 5^2 = -21$,

odnosno $x^2 - 10x + 5^2 = 5^2 - 21$.

Uočimo da je lijeva strana potpuni kvadrat pa možemo pisati:

$$(x - 5)^2 = 4$$
$$x - 5 = \pm\sqrt{4}$$
$$x - 5 = \pm 2$$
$$x = 5 \pm 2.$$

Dobivamo dva rješenja zadane jednadžbe.

$$x_1 = 5 - 2 = 3$$
$$x_2 = 5 + 2 = 7$$

Provjerimo:

$$x_1^2 - 10x_1 + 21 = 9 - 10 \cdot 3 + 21 = 9 - 30 + 21 = 30 - 30 = 0,$$

$$x_2^2 - 10x_2 + 21 = 49 - 10 \cdot 7 + 21 = 49 - 70 + 21 = 70 - 70 = 0.$$

Dakle, oba rješenja zadovoljavaju zadanu jednadžbu.

Istim postupkom rješavamo kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$. Podijelimo danu jednadžbu s $a$ ( $a \neq 0$ ). Dobivamo jednadžbu

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Slobodni član prebacimo na desnu stranu pa je

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Kvadrat polovine koeficijenta uz $x$ je $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

Dodavanjem i oduzimanjem tog broja jednadžba se ne mijenja:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Matematičke zadatke stari indijci često su zaodjevali u "pjesničko ruho.

"Drugi korijen iz polovice broja pčela nekog roja – toliko ih je odletjelo na grm jasmina, a s osam devetina roja je zaostalo, jedna ženka pčele leti naokolo mužjaka što zuji unutar cvijeta lopoča kamo je noću bio namamljen njegovim slatkim mirisom, a sada je u njemu zasužnjen. Reci mi, dražesna ženo, broj pčela." (Rješenje: broj pčela u roju je 72.)

Dobili smo dva rješenja, odnosno formulu za rješavanje kvadratne jednadžbe izražene pomoću njezinih koeficijenata $a$, $b$ i $c$. Kratko pišemo:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

## PRIMJER 4

Riješimo jednadžbu $x^2 - 8x + 7 = 0$.

*Rješenje*

Iz $a = 1$, $b = -8$ i $c = 7$ primjenom formule dobivamo:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{8 - 6}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{8 + 6}{2} = 7. \quad \text{Provjerite!}$$

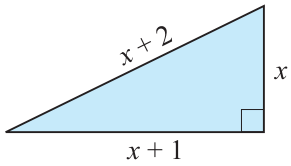
Kroz povijest su, osim dvoboja oružjem, organizirani i matematički dvoboji. Niccolo Tartaglia (1499.-1557.) bio je samouki matematičar iz Brescie. Tartaglia znači mucavac, a taj je nadimak dobio zbog govorne mane koja je bila posljedica ozljede u djetinjstvu. Kako je bio iz vrlo siromašne obitelji, školovao se potpuno sam. Već dosta rano razvio je velike matematičke sposobnosti i zarađivao za život predajući matematiku u Veroni i Veneciji. 1530-ih godina otkriva metodu za rješenje jednadžbe tipa $x^3 + px^2 = q$ i ne taji svoje otkriće. Budući da je Fior bio uvjeren da samo on zna riješiti tip $x^3 + px = q$, izaziva Tartagliu na natjecanje (1535.) na kojem svaki treba zadati drugome po 30 zadataka s rokom rješavanja od 50 dana. Tartaglia je očekivao da će mu Fior zadati jednadžbe tipa $x^3 + px = q$ te na brzinu smišlja metodu njihova rješavanja. Kad je došao dan natjecanja, njegovo očekivanje pokazalo se točnim: Fior je njemu zadao zadatke isključivo tog tipa te ih je Tartaglia sve riješio za dva sata. Nasuprot tome, Tartaglia je Fioru zadao razne zadatke, od kojih neke i "svojeg" tipa, koje Fior nije uspio riješiti.

## PRIMJER 5

Odredimo duljine stranica pravokutnog trokuta ako su one $x$, $x + 1$ i $x + 2$.

*Rješenje*

Iz Pitagorina poučka dobivamo: $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$




$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$$
$$x^2 + 2x - 4x + 1 - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$$

Duljina stranice ne može biti negativna pa je $x = 3$. Tražene duljine stranica iznose 3, 4 i 5.

## PRIMJER 6

Odredimo $b$ u jednadžbi $3x^2 + bx - 25 = 0$ ako je jedno njezino rješenje $x_1 = 5$.

*Rješenje*

Uvrstimo poznato rješenje u jednadžbu.

$$3x_1^2 + bx_1 - 25 = 0$$
$$3 \cdot 5^2 + b \cdot 5 - 25 = 0$$
$$3 \cdot 25 + 5b - 25 = 0$$
$$75 + 5b - 25 = 0$$
$$50 + 5b = 0$$
$$5b = -50$$
$$b = -10$$

## PRIMJER 7

Riješimo jednadžbu $\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 = 0.$

*Rješenje*

Nakon množenja jednadžbe sa 6 dobit ćemo:

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{2}$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = 6.$$

## PRIMJER 8

Riješimo jednadžbu $\frac{2-4x}{x^2-4} + \frac{2x-1}{x+2} + \frac{22-7x}{x-2} = 0, \quad x \neq \pm 2.$

*Rješenje*

$$\frac{2-4x}{x^2-4} + \frac{2x-1}{x+2} + \frac{22-7x}{x-2} = 0 \,/ \cdot (x^2-4), \quad x \neq \pm 2$$
$$2 - 4x + (2x-1)(x-2) + (22-7x)(x+2) = 0$$

Nakon sređivanja, dobit ćemo jednadžbu $5x^2 + x - 48 = 0,$

a njezina su rješenja $x_1 = -\frac{16}{5}$ i $x_2 = 3.$

## PRIMJER 9

Napišimo kvadratnu jednadžbu kojoj su rješenja $x_1 = 3$ i $x_2 = -2$.

*Rješenje*

Jednadžba $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ima rješenja $x_1$ i $x_2$ pa uvrštavanjem $x_1 = 3$ i $x_2 = -2$ dobivamo:

$$(x-3)(x-(-2))=0$$
$$(x-3)(x+2)=0$$
$$x^2+2x-3x-6=0$$
$$x^2-x-6=0.$$

*Zadatci za vježbu*

Riješite kvadratne jednadžbe:

**1.** a) $x^2 = 169$, b) $x^2 = 3$, c) $x^2 = 6.25$, d) $x^2 = \frac{9}{4}$, e) $x^2 = \frac{1}{9}$,
f) $x^2 - 5 = 20$, g) $x^2 + 6 = 42$, h) $6x^2 = 24$, i) $2 : x = x : 8$.

**2.** a) $(3x+1)^2 = 100$, b) $(x-2)^2 = 9$, c) $(2x-7)^2 = 1$,
d) $12x^2 + 8x = 0$, e) $4x^2 - 2x = 0$, f) $6x^2 - 12x = 0$.

**3.** a) $(2x+3)(x-1) = 0$, b) $(x-2)(7x-3) = 0$, c) $(5x+1)(4x-5) = 0$, d) $3x(x+5) = 0$.

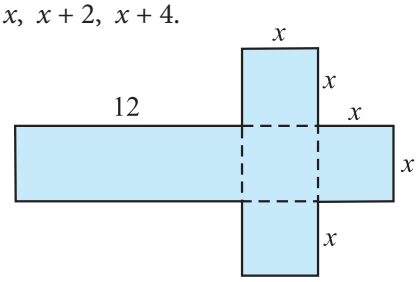
**4.** a) $x^2 + 4x + 4 = 0$, b) $x^2 - 10x + 25 = 0$, c) $9x^2 + 30x + 25 = 0$.

**5.** a) $x^2 - 2x + 3 = 0$, b) $3x^2 - 14x - 5 = 0$, c) $2x^2 + 5x - 18 = 0$, d) $9x^2 - 12x + 4 = 0$,
e) $x^2 + 2x + 5 = 0$, f) $x^2 + 2x + 10 = 0$, g) $x^2 - 8x + 12 = 0$, h) $x^2 + 5x + 6 = 0$,
i) $x^2 - x - 12 = 0$, j) $6x^2 + 11x - 10 = 0$, k) $x^2 - 4x + 5 = 0$, l) $3x^2 - 8x - 11 = 0$.

**6.** Odredite nepoznati koficijent u jednadžbi ako je poznato jedno rješenje:
a) $x^2 - 8x + c = 0$, $x_1 = 7$, b) $ax^2 - 25x + 5 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, c) $4x^2 + bx + 9 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

**7.** Odredite duljine stranica pravokutnog trokuta ako su one: $x$, $x + 2$, $x + 4$.

**8.** Odredite duljinu stranice označene s $x$ tako da površina lika na slici bude jednaka 40.




**9.** Razlika dviju stranica pravokutnika je 3 cm, a površina pravokutnika je 130 cm². Kolike su duljine stranica pravokutnika?

**10.** Kad jednu stranicu kvadrata skratimo za 1 cm, a drugu produžimo za isti iznos, dobit ćemo pravokutnik površine 8 cm². Kolika je duljina stranice kvadrata?

**11.** Razlika duljina stranica pavokutnika je 5 cm, a površina pravokutnika je 150 cm². Kolike su duljine stranica?

**12.** Pravokutnom je trokutu jedna kateta za 7 cm kraća od druge, a hipotenuza ja za 1 cm dulja od dulje katete. Kolike su duljine stranica trokuta?

**13.** Riješite jednadžbe:

a) $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0,$ b) $x^2 + \frac{11}{15}x - \frac{4}{5} = 0,$ c) $5x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{15} = 0,$ d) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{1}{3}x^2 + x.$

**14.** Riješite jednadžbe:

a) $(x-2)^2 + (2x+3)^2 = 13 - 4x,$ b) $(x+3)^2 + (2x+1)^2 = (x+4)^2,$

c) $(2x-3)^2 + (2x-5)^2 = 4(x-3)^2 + 30,$ d) $(x-3)^2 + (x-4)^2 = (x-5)^2 + 5.$

**15.** Napišite kvadratnu jednadžbu kojoj su rješenja:

a) $x_1 = -1,\ x_2 = 2;$ b) $x_1 = -6,\ x_2 = 4;$ c) $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{3}{2};$ d) $x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{5}{4}.$

## 2.1.3. Diskriminanta kvadratne jednadžbe

Na osnovi primjera koje smo dosad rješavali, znamo da rješenja kvadratne jednadžbe mogu biti realni ili kompleksni brojevi. Znamo da su rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su $a$, $b$ i $c$ realni brojevi i $a \neq 0$, izražena formulom:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Naziv diskriminanta (prema lat. *diskriminare* - razlučivati) uveden je u 19. st (engleski matematičar James Joseph Sylvester).

Očito je da o kvadratnom korijenu ovisi kakva će biti rješenja kvadratne jednadžbe. Izraz pod korijenom naziva se **diskriminanta** kvadratne jednadžbe i označava se s $D$, tj.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Pomoću diskriminante, rješenja kvadratne jednadžbe možemo pisati ovako:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Promotrimo vrijednosti diskriminante u tri slučaja: $D > 0$, $D = 0$ i $D < 0$.

**a)** Ako je $D > 0$, onda je $\sqrt{D}$ realan broj pa kvadratna jednadžba ima dva različita realna rješenja.

PRIMJER 1

Odredimo diskriminantu i izračunajmo rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2 + 5x - 18 = 0$.

*Rješenje*

$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-18) = 25 + 144$

$D = 169 > 0,$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{-5 \pm 13}{4},\quad x_1 = -\frac{9}{2},\quad x_2 = 2$

Dakle, za slučaj $D > 0$ dobili smo dva različita i realna rješenja.

**b)** Ako je $D = 0$, onda kvadratna jednadžba ima dvostruko realno rješenje.

PRIMJER 2

Riješimo jednadžbu $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Pri računanju diskriminante treba biti oprezan i voditi računa o predznacima koeficijenata. Ako je $a = 2$, $b = -5$, $c = -18$, tada bi ovakvo računanje

$$D = -5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 =$$
$$= -25 - 144 = -169$$

sadržavalo dvostruku pogrešku i dovelo do krivog zaključka da je $D < 0$.

*Rješenje*

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = x_2 = 3$$

Za slučaj $D = 0$ dobili smo dvostruko realno rješenje.

**c)** Ako je $D < 0$, $\sqrt{D}$ je imaginaran broj, a rješenja kvadratne jednadžbe su kompleksni brojevi.

## PRIMJER 3

Izračunajmo diskriminantu i rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 4x + 13 = 0$.

*Rješenje*

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6i$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

$$x_1 = 2 - 3i, \quad x_2 = 2 + 3i.$$

Vidimo da za $D < 0$ rješenja kvadratne jednadžbe nisu realni brojevi.


## PRIMJER 4

Odredimo $m \in \mathbf{R}$ tako da jednadžba $3x^2 - 4x + 2m = 0$ ima dvostruko rješenje.

*Rješenje*

$$D = 16 - 24m$$

Iz $D = 0$ dobivamo $16 - 24m = 0$,

$24m = 16$, $m = \frac{2}{3}$. Provjerite!

## *Zadatci za vježbu*

**1.** Odredite tip rješenja, a zatim riješite kvadratne jednadžbe:

a) $x^2 - x - 2 = 0$, b) $x^2 + 10x + 12 = 0$, c) $x^2 - 8x + 16 = 0$, d) $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

**2.** Odredite diskriminantu, a zatim riješite jednadžbe:

a) $\frac{x}{2x+3} = \frac{1}{x}$, b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} = 1$.

**3.** Napišite diskriminante kvadratnih jednadžbi:

a) $x^2 + 3ax - b = 0$, b) $cx^2 + ax + b = 0$, c) $3x^2 - 4x + m = 0$, d) $2x^2 + 2x + 1 = 0$.

**4.** Za koju vrijednost $m \in \mathbf{R}$ jednadžba ima dvostruko rješenje?

a) $x^2 + mx + 9 = 0$, b) $mx^2 + 10x + 1 = 0$, c) $x^2 + 4x + m = 0$.

**5.** Za koju vrijednost $m \in \mathbf{R}$ jednadžba:

a) $x^2 + 2x + m = 0$, b) $mx^2 + 2x - 4 = 0$ ima realna rješenja?

**6.** Za koju vrijednost $m \in \mathbf{R}$ jednadžba:

a) $x^2 + 2x + m - 2 = 0$, b) $mx^2 + 2x - 3 = 0$ nema realnih rješenja?

## 2.2. Kvadratna funkcija

Pogledajte neobičnu sliku riječi "mirror" (engl. *mirror* - ogledalo). Umjetnik Scott Kim kreirao je sliku tako da su dvije polovice cijele slike "ogledalo" jedna druge. Parabola ima slično svojstvo simetrije, gdje pravac u tjemenu dijeli "cijelu" sliku parabole na pola. Parabola je simetrična s obzirom na taj pravac koji nazivamo os simetrije. Ako parabolu presavijemo duž osi simetrije, dvije se polovice poklapaju.

Funkcija $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana s $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su

$$a, b \text{ i } c \in \mathbf{R} \text{ i } a \neq 0,$$

naziva se **kvadratna funkcija** ili **polinom drugog stupnja**.

Primjerice, funkcije

$$f(x) = 3x^2 - x + 2, \quad f(x) = 2x^2 \quad \text{i} \quad f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1$$

su kvadratne funkcije.

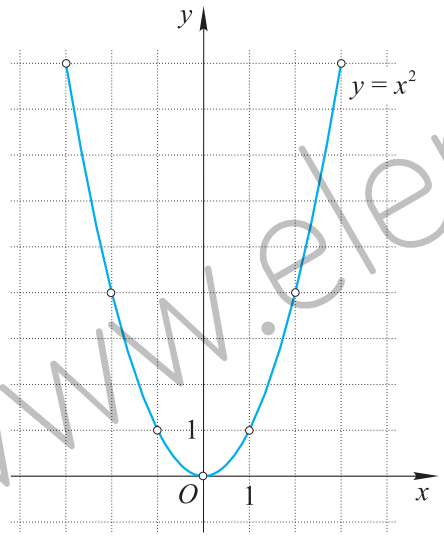
### 2.2.1. Graf funkcije $f(x) = ax^2$

Upoznavanje kvadratnih funkcija započet ćemo crtanjem grafova najjednostavnijih slučajeva, tj. slučajeva za koje su koeficijenti $b = 0$ i $c = 0$. Tada kvadratna funkcija ima oblik

$$f(x) = ax^2.$$

Za $a = 1$ dobivamo polinom $f(x) = x^2$. Kako bismo nacrtali njegov graf, sastavimo tablicu

| $x$ | $f(x) = x^2$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| −1 | 1 |
| $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| −2 | 4 |
| −3 | 9 |



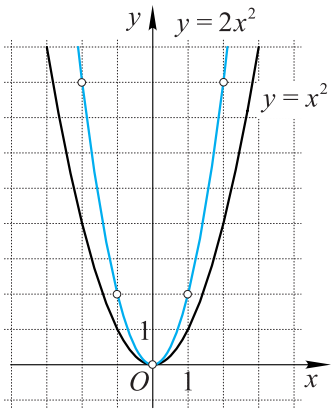

Spajanjem točaka (0, 0), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, (1, 1), (1, −1)... skiciran je graf funkcije $f(x) = x^2$. Graf te funkcije se naziva **parabola** i označava se s $y = x^2$.

Točke (−1, 1) i (1, 1) te (−2, 4) i (2, 4) simetrične su u odnosu na os $y$. Budući da su točke $(-x, x^2)$ i $(x, x^2)$ simetrične u odnosu na os $y$, i graf funkcije $f(x) = x^2$ simetričan je u odnosu na os $y$. Za $x = 0$ funkcija

$$f(x) = x^2$$

ima najmanju vrijednost, tj. $f(0) = 0$. Lijevo od te točke funkcija pada, a desno od te točke funkcija raste. Točka (0, 0) naziva se **tjeme parabole** $y = x^2$.

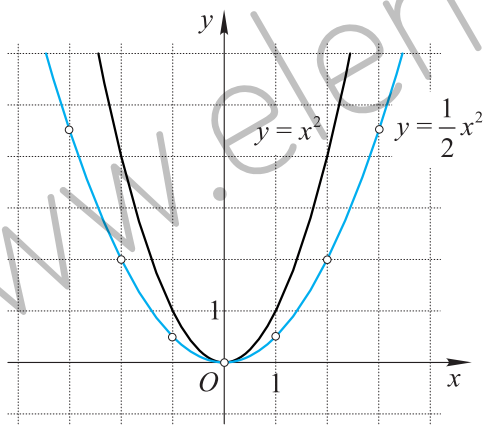
| $x$ | $f(x)=2x^2$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 2 |
| −1 | 2 |
| 2 | 8 |
| −2 | 8 |




Sad za $a$ uzimamo još neke vrijednosti. Primjerice, za $a = 2$ dobivamo polinom $f(x) = 2x^2$. Sastavimo tablicu i nacrtajmo graf.

Vidimo da je parabola $y = 2x^2$, također otvorom okrenuta prema gore, simetrična u odnosu na os $y$, ali je uža od parabole $y = x^2$.

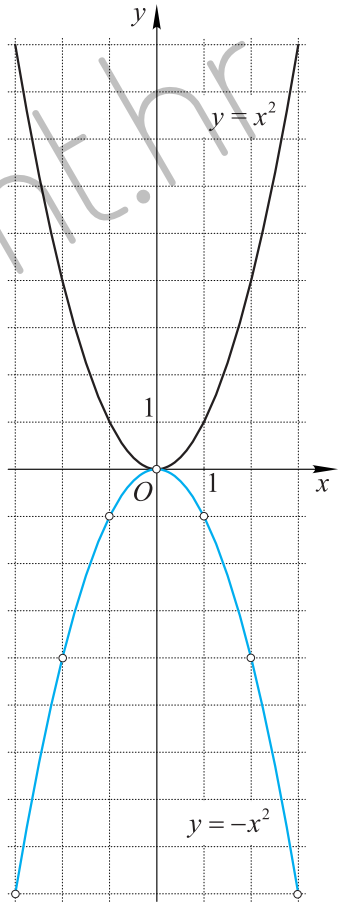
| $x$ | $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | $\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ |
| –1 | $\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{2}\cdot 4=2$ |
| –2 | $\frac{1}{2}\cdot 4=2$ |
| 3 | $\frac{1}{2}\cdot 9=\frac{9}{2}$ |
| –3 | $\frac{1}{2}\cdot 9=\frac{9}{2}$ |




Za $a=\frac{1}{2}$ funkcija je $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

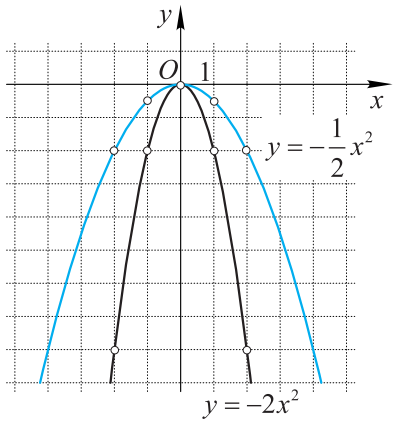
Promotrimo funkcije $f(x) = x^2$ kad je $a < 0$.
Primjerice, za $a = -1$ to je funkcija $f(x) = -x^2$.
Parabola $f(x) = -x^2$ simetrična je paraboli $f(x) = x^2$ s obzirom na os $x$.

| $x$ | $f(x)=-x^2$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ |
| 1 | –1 |
| –1 | –1 |
| 2 | –4 |
| –2 | –4 |
| 3 | –9 |
| –3 | –9 |



Nacrtajmo grafove funkcija $f(x) = -2x^2$ i $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

| $x$ | $-2x^2$ | $-\frac{1}{2}x^2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | –2 | $-\frac{1}{2}$ |
| –1 | –2 | $-\frac{1}{2}$ |
| 2 | –8 | –2 |
| –2 | –8 | –2 |




Na osnovi ovih primjera vidimo da je za $a < 0$ graf funkcije $f(x) = ax^2$ otvorom okrenut prema dolje i simetričan s obzirom na os $y$.

Za $x = 0$, funkcija $f(x) = ax^2$, $a < 0$ ima najveću vrijednost $f(0) = 0$. Lijevo od te točke funkcija raste, a desno od te točke funkcija pada. Točka (0, 0) je **tjeme parabole**.

*Zadatci za vježbu*

**1.** Nacrtajte graf funkcije $f(x) = ax^2$ ako je: a) $a = \frac{1}{3}$, b) $a = 3$, c) $a = \frac{3}{2}$.

**2.** Nacrtajte graf funkcije $f(x) = ax^2$ ako je: a) $a = -\frac{1}{3}$, b) $a = -3$, c) $a = -\frac{5}{2}$.