Skupovi brojeva

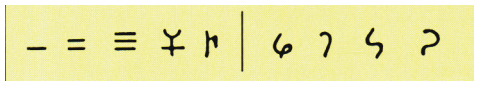
Poglavlje 1.

Ciljevi:

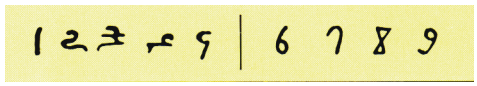
- razlikovati, usporediti, prikazati prirodne, cijele, racionalne i realne brojeve
- prepoznati i pri računanju rabiti osnovna svojstva i međusobne veze računskih operacija
- primijeniti računske operacije s prirodnim, cijelim, racionalnim i realnim brojevima na izračunavanje u struci

Uvod

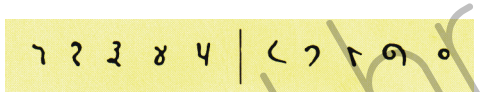
Indijski zapis brojeva, oko 300. pr. Kr.



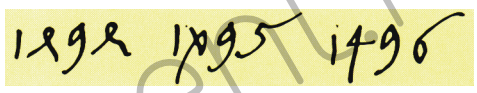
Indijski zapis brojeva, oko 800. pr. Kr. među kojima se pojavljuje znamenka nula.



Arapski zapis brojeva iz područja današnje Španjolske, oko 1000. godine.

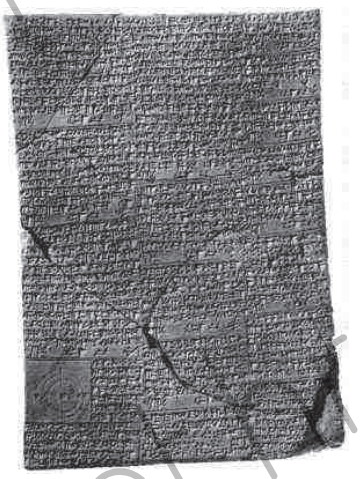


Zapis brojeva iz Njemačke, 16. stoljeće, u rukopisu slikara Albrechta Dürera (1471. – 1528.).

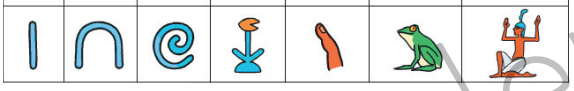


Zapis brojeva iz Babilona.

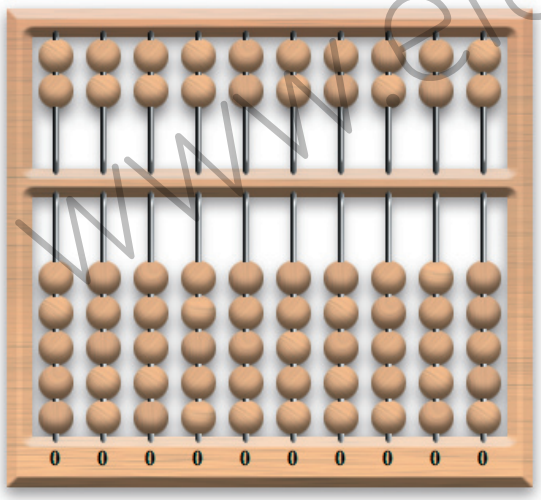
Babilonska kultura naslijedila je sumeransku oko 1900. godine pr. Kr. Za zapisivanje brojeva koristila je klinasto pismo utisnuto na glinene pločice. Zanimljivo je da je korišten seksagezimalni sustav brojeva. Dakle, babilonska djeca morala su naučiti 60 različitih znakova kako bi naučila zapisivati brojeve.



Stari Egipćani imali su razvijen decimalni sustav i svoje oznake za brojeve:

1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
						

Hijeroglifskim znacima pisalo se po kamenu kako s lijeva na desno, tako i obrnuto, a katkad i odozgo prema dolje. Različito pisanje ne stvara probleme kod čitanja brojeva jer egipatski način pisanja brojeva nije pozicijski. Hijeratički su znaci uvedeni za brzo pisanje po papirusu, drvu ili lončariji.



Kineski abakus

Tek će se u 16. stoljeću pojaviti abakus. Abakus je preteča današnjih kalkulatora, a sastojao se od drvenog okvira i niza žica po kojima su se mogli micati kamenčići. On se koristio do usvajanja arapskih brojeva, a zanimljivo je to da se ponegdje u Kini trgovci još uvijek njime služe.

1.1. Skup prirodnih brojeva

$n \in \mathbf{N}$ čitamo "n je element **N**" i znači "n je prirodan broj"

Brojevi kojima se služimo za brojanje nazivaju se **prirodni brojevi**. Podsjetimo se, skup svih prirodnih brojeva označavamo sa **N**,

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}.$$

n – naturalis (lat.) – prirodan

Tri točkice označavaju da se taj niz nastavlja.
Bilo koji prirodni broj označavamo sa ***n***,

$$n \in \mathbf{N}.$$

Broj kao takav ne ovisi o prirodi predmeta koje brojimo, ne ovisi o tome koliki su predmeti, već jedino o tome koliko ih ima.

Tako je $6 \in \mathbf{N}$, $103 \in \mathbf{N}$, $1234567890 \in \mathbf{N}$ itd. Ne postoji najveći prirodni broj, ali postoji najmanji i to je broj 1. Uočimo da broj 0 (nula) nije prirodni broj, tj.

$$0 \notin \mathbf{N}.$$

Skup kojemu su članovi svi prirodni brojevi i broj 0 označavamo sa $\mathbf{N}_0$ (čitamo: en nula),

$$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} = \{0\} \cup \mathbf{N}.$$

Na kovanicama koje su u optjecaju u Republici Hrvatskoj nalazi se najveća kopnena životinja iz naših šuma – mrki medvjed i najveća jadranska riba – tuna. Na kovanicama izdanim parne godine natpis je na latinskom jeziku, a na onima izdanim neparne godine natpis je na hrvatskom jeziku.

Svaki prirodni broj ima **sljedbenika**. Primjerice, sljedbenik broja 3 je broj 4, a sljedbenik broja 31 je broj 32. Općenito, sljedbenik prirodnog broja n je broj $n + 1$.

Svaki prirodni broj, osim 1, ima svog **prethodnika**. Prethodnik prirodnog broja n je broj $n - 1$.

Česta je podjela prirodnih brojeva na **neparne** i **parne**. Neparni brojevi su 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., a parni brojevi su 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

Općenito, neparni brojevi su oblika $2n - 1$, a parni oblika $2n$, gdje je $n \in \mathbf{N}$. Istaknimo da je broj 0 paran broj. Prirodne brojeve zapisujemo s pomoću znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9.

Bilijuni			Milijarde			Milijuni			Tisuće			Jedinice		
SB	DB	B	SMI	DMI	MI	SM	DM	M	ST	DT	T	S	D	J
													3	1
												3	0	1
2	0	1	3	4	5	5	6	7	7	8	9	0	2	3

U SAD-u se milijarda naziva bilijun.

Zapisani brojevi su: trideset i jedan, tristo jedan i dvjesto jedan bilijun tristo četrdeset pet milijardi petsto šezdeset i sedam milijuna sedamsto osamdeset devet tisuća i dvadeset tri.

Zadatci za vježbu

1. Koji je prethodnik, a koji sljedbenik brojeva: a) 23, b) 321.

2. Ispišite sve neparne dvoznamenkaste brojeve kojima je znamenka desetica 2.

3. Ispišite sve parne dvoznamenkaste brojeve kojima je znamenka desetica 3.

4. Pročitajte brojeve: a) 1 025, b) 7 654 321, c) 9 876 543 210.

5. Zapišite brojeve:

a) deset tisuća sto dvadeset i tri,

b) sto dvadeset pet milijuna tristo četrdeset pet tisuća i sedamsto osamdeset devet,

c) dvije milijarde i dvadeset tri.

6. S pomoću znamenaka zapišite broj:

Hrvatska je prema popisu stanovništva iz 2001. godine imala četiri milijuna petsto trideset pet tisuća i pedeset četiri stanovnika.

7. Koji je najmanji neparni četveroznamenkasti broj?

8. Koji je najveći parni peteroznamenkasti broj?

9. Napišite najveći deseteroznamenkasti prirodni broj kojemu su sve znamenke međusobno različite.

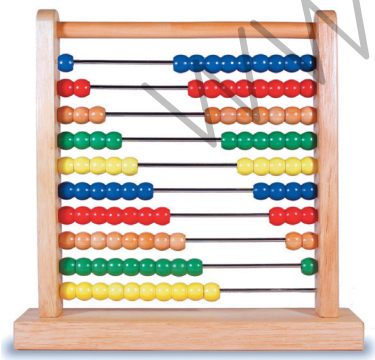
10. Napišite najmanji deseteroznamenkasti prirodni broj kojemu su sve znamenke međusobno različite.

1.1.1. Zbrajanje prirodnih brojeva

Već smo u osnovnoj školi naučili pisano zbrajati prirodne brojeve, primjerice:

$$\begin{array}{r} 564 \\ +289 \\ \hline 853 \end{array}$$

$$\underset{\text{PRIBROJNICI}}{564 + 289} = \underset{\text{ZBROJ}}{853}$$



abakus

Brojevi koje zbrajamo nazivaju se **pribrojnici**, a rezultat zbrajanja naziva se **zbroj**.

Uočimo: ako $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ pripadaju skupu $\mathbf{N}_0$, tada i $a + b$ pripada skupu $\mathbf{N}_0$.

PRIMJER 1

Koristeći se pisanim zbrajanjem, provjerimo:

a) $36 + 42 = 42 + 36$, b) $984 + 107 = 107 + 984$.

Općenito, za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi:

$$\boldsymbol{a + b = b + a}.$$

To svojstvo zbrajanja se naziva zakon **komutativnosti**.

- Zbroj se ne mijenja ako pribrojnici zamijene mjesta.

Kada imamo više od dva pribrojnika, zagradama određujemo redoslijed računske radnje.

PRIMJER 2

Izračunajmo:

$$(23 + 31) + 45 = 23 + (31 + 45)$$
$$54 + 45 = 23 + 76$$
$$99 = 99.$$

Prebrojavanje se može vršiti i bez znanja brojeva, recimo brojanje na prste, pridruživanje kamenčića svakoj prebrojenoj ovci, urezivanje zareza ili

𝍸 𝍸 |||.

Općenito, za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi:

$$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)}.$$

To svojstvo zbrajanja naziva se zakon **asocijativnosti**.

Zbroj triju brojeva ne ovisi o redoslijedu zbrajanja.

To vrijedi za zbrajanje četiriju ili više brojeva.

PRIMJER 3

Izračunajmo : 51 + 49 + 23 + 67 = (51 + 49) + (23 + 67) = 100 + 90 = 190.

Zadatci za vježbu

1. Izračunajte zbroj ako su pribrojnici:
a) 87 i 12, b) 236 i 345, c) 532 i 643, d) 4 023 i 789.

2. Izračunajte $a + b$ ako je:

a	356	1 495	27 305
b	453	26 115	46 658

3. Primjenom zakona komutativnosti i asocijativnosti izračunajte ove zbrojeve:
a) 53 + 63 + 47, b) 23 + 21 + 11 + 179, c) 23 + 106 + 77 + 94,
d) 36 + 92 + 64 + 18, e) 1 001 + 321 + 2 999 + 80.

4. Izračunajte opseg trokuta kojemu su duljine stranica a = 185 cm, b = 131 cm i c = 273 cm.

1.1.2. Množenje prirodnih brojeva

$$\begin{array}{r} 325 \cdot 64 \\ \hline 1950 \\ 1300 \\ \hline 20800 \end{array}$$

$$325 \cdot 64 = 20\,800$$

MNOŽITELJI (FAKTORI) — UMNOŽAK (PRODUKT)

NETOČNO	TOČNO
2 + 3 · 5 = = 5 · 5 = 25	2 + 3 · 5 = = 2 + 15 = 17

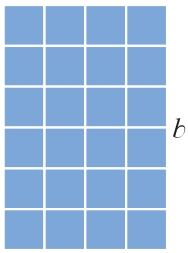
Brojevi koje množimo nazivaju se **množitelji** ili faktori, a rezultat množenja naziva se **umnožak** ili produkt.

Ako ***a*** i ***b*** pripadaju skupu **N**, tada i $a \cdot b$ pripada skupu **N**.

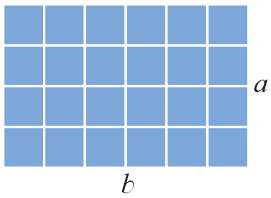
PRIMJER 1

Izračunajmo površinu pravokutnika kojemu su duljine stranica: a = 4 cm, b = 6 cm.

Rješenje



$P = a \cdot b =$
$= 4 \cdot 6 = 24.$



$P = b \cdot a =$
$= 6 \cdot 4 = 24$

$P = 24\ \text{cm}^2.$

Uočimo da je
$a \cdot b = b \cdot a.$

Za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi:

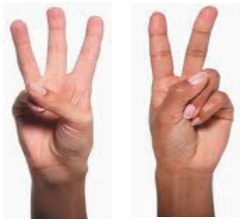
$$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}.$$

To svojstvo se naziva zakon **komutativnosti** za množenje.

Umnožak se ne mijenja ako množitelji zamijene svoja mjesta.

7 · 8 "na prste"

- jedna ruka – presavijemo 2 prsta jer je 5 i 2 jednako 7
- druga ruka – presavijemo 3 prsta jer je 5 i 3 jednako 8



Svi presavijeni prsti na obje ruke (2 + 3 = 5) daju deseticu traženog umnoška.

Umnožak broja nepresavijenih prstiju (2 · 3 = 6) daju jedinicu traženog umnoška.

Znači "sedam puta osam" ima pet desetica i šest jedinica $\Rightarrow$ 7 · 8 = 56.

PRIMJER 2

Zamislimo da 453 učenika škole uplati po 1 kunu za humanitarnu akciju. To bi iznosilo

$$453 \cdot 1 = 453 \text{ kuna.}$$

Ako je a prirodan broj, onda je:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Kad bi svaki učenik donio po 0 kuna, tada ne bi skupili ništa:

$$453 \cdot 0 = 0 \text{ kuna.}$$

Ako je a prirodan broj, onda je:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

PRIMJER 3

Provjerimo je li

$$(5 \cdot 4) \cdot 6 = 5 \cdot (4 \cdot 6)$$
$$20 \cdot 6 = 5 \cdot 24$$
$$120 = 120.$$

Za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi:

$$\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}.$$

To svojstvo se naziva zakon **asocijativnosti** za množenje.

Umnožak triju brojeva ne ovisi o redosljedu njihova množenja.

PRIMJER 4

NETOČNO	TOČNO
(2 · 3) · 5 = = 10 · 15 = 150	(2 · 3) · 5 = = 6 · 5 = 30
	2 · (3 · 5) = = 2 · 15 = 30
	(2 · 5) · 3 = = 10 · 3 = 30

Izračunajmo na dva načina:

(3 + 4) · 5 = 7 · 5 = 35

(najprije zbrojimo, zatim pomnožimo)

(3 + 4) · 5 = 3 · 5 + 4 · 5 = 15 + 20 = 35

(najprije pomnožimo, zatim zbrojimo)

Za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi:

$$\boldsymbol{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c}, \text{ odnosno}$$
$$\boldsymbol{c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b}.$$

To svojstvo naziva se zakon **distributivnosti** množenja prema zbrajanju.

PRIMJER 5

Izračunajte na dva načina: $(15 + 13) \cdot 12$.

Rješenje

$(15 + 13) \cdot 12 = 28 \cdot 12 = 336$

$(15 + 13) \cdot 12 = 15 \cdot 12 + 13 \cdot 12 = 180 + 156 = 336.$

Inače, ako redoslijed računanja nije određen zagradama, tada se najprije izvodi množenje, potom zbrajanje. Primjerice,

$$4 + 5 \cdot 6 = 4 + 30 = 34.$$

Zadatci za vježbu

1. Izračunajte $a \cdot b$ ako je:

a	9	17	530	1	0	25
b	25	344	1	478	1	25

2. Izračunajte:

a) $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 5$, b) $4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 25$, c) $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6$, d) $8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 125$.

3. Izračunajte:

a) $4 + 6 \cdot 8$, b) $(4 + 6) \cdot 8$, c) $4 + 6 \cdot 8 + 5$, d) $4 + 6 \cdot (8 + 5)$.

4. Izračunajte $(a + b) \cdot c$ ako je:

a	45	876	1 055	2 037	1 056
b	23	984	1 055	1 263	1 050
c	5	4	19	407	112

5. Izračunajte:

a) $21 \cdot 37 + 21 \cdot 15 + 21 \cdot 18$, b) $57 \cdot (635 + 109) + 57 \cdot (91 + 165)$,

c) $43 \cdot 34 + 43 \cdot 27 + 45 \cdot 60 + 45$, d) $138 \cdot 17 + 138 \cdot 296 + 138 \cdot 487$.

6. Izračunajte opseg pravokutnika kojemu su duljine stranica $a = 130$ cm i $b = 181$ cm.

7. Koji se broj dobije kada se zbroju najvećeg troznamenkastog broja i najmanjeg četveroznamenkastog broja pribroji najveći peteroznamenkasti broj?

8. Koristeći svojstva računanja s prirodnim brojevima, izračunaj napamet:

a) $25 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 125 \cdot 8$ b) $547 + 2\,544 + 379 + 1\,453 + 2\,456 + 321$

Odgovorite na pitanja

1. Koja svojstva su korištena pri rješavanju sljedećih zadataka?

a) $3 + 2 = 2 + 3$, b) $7 \cdot (11 \cdot 8) = (11 \cdot 8) \cdot 7$,

c) $2\,(8 + 6) = 16 + 12$, d) $3 + (2 + 7) = (3 + 2) + 7$.

Procijenite

1. Koje bi brojeve trebalo dopisati u sljedeća dva retka, kako bi se pravilo potvrdilo?

a)
$1 \cdot 9 + 2 = 11$
$12 \cdot 9 + 3 = 111$
$123 \cdot 9 + 4 = 1111$
$1234 \cdot 9 + 5 = 11111$
_____ · _ + _ = _____
_____ · _ + _ = _____,

b)
$9 \cdot 9 + 7 = 88$
$98 \cdot 9 + 6 = 888$
$987 \cdot 9 + 5 = 8888$
$9876 \cdot 9 + 4 = 88888$
_____ · _ + _ = _____
_____ · _ + _ = _____.

2. Kako dobiti broj 1000 koristeći znamenku 8 točno 8 puta i samo računsku operaciju zbrajanja?

3. Koji bi brojevi trebali pisati u kvadratićima?

a) $1010 + 10100 = 10 \cdot \square$, b) $54 : 3 = 3 \cdot \square$,

c) $500 + 500 + 500 + 500 + 500 = 10 \cdot \square$.

Modeliranje i rješavanje problema

1. Keramičar je od 8 do 9 sati postavio 19 pločica, a od 9 do 10 sati tri pločice manje, a od 10 do 11 sati 2 pločice više nego od 9 do 10 sati. Koliko je ukupno pločica postavio od 8 do 11 sati?

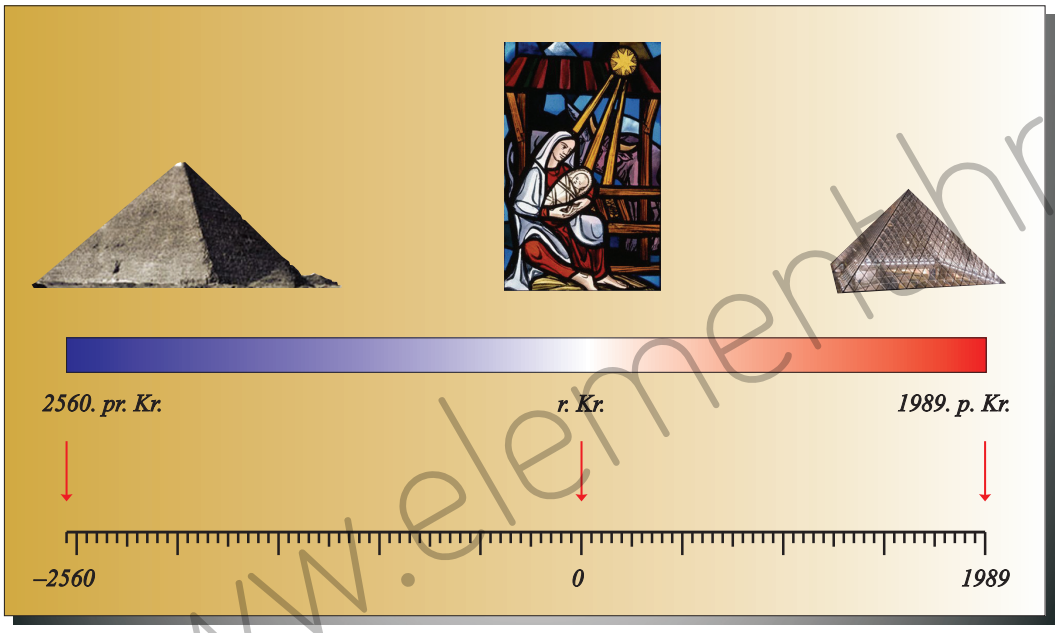
2. U jednoj brigadi je 18 radnika, a u drugoj 12. Koliko radnika treba prijeći iz prve brigade u drugu da bi u njima bilo jednako mnogo radnika? Koliko će tada biti radnika u svakoj brigadi?

3. Pita Darko Marinu:"Koliko imaš godina?", a ona mu odgovori: "Kada budem imala još toliko i još dvije, imat ću 10 godina." Koliko godina ima Marina?

4. Na svaki rođendan moga života u kasicu su mi stavili onoliko kuna koliko mi je za taj rođendan bilo godina. Sada imam 120 kuna. Koliko mi je godina?

5. Predvorje je popločeno pločicama. U svakom redu po širini ima 110 pločica, a u svakom redu po duljini ima 256 pločica. Koliko je pločica u tom predvorju?

Uvod



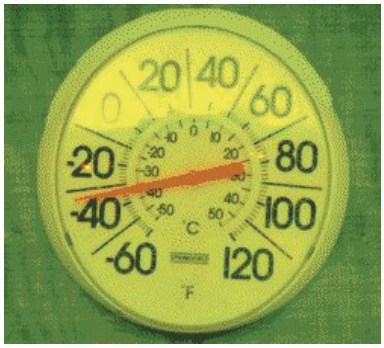
Na slici s lijeve strane prikazana je Keopsova piramida u Gizi, izgrađena 2560. g. prije Kristova rođenja. S desne strane vidi se slika staklene piramide koja se nalazi ispred zgrade muzeja Louvre u Parizu, izgrađena 1989. godine poslije Krista. Između te dvije slike prikazana je ikona s motivom Bogorodice na onome mjestu koje predstavlja trenutak Kristova rođenja.

Ispod slika nalazi se vremenska lenta. Na njoj su na uobičajeni način obilježeni događaji s oznakama 2560 g. pr. Kr. i 1989 g. p. Kr., a trenutak rođenja Krista sa r. Kr.

Ispod vremenske lente nalazi se brojevni pravac. Točka 2560 g. pr. Kr. je s vremenske lente na njega preslikana u -2560, negativan cijeli broj. Trenutak rođenja Krista, r. Kr. u 0, a 1989. g. p. Kr. u pozitivan cijeli broj 1989. Zanimljivo je da broj nula u doba rođenja Krista nije bio poznat, a, sukladno tome, stari Rimljani za nju u svom načinu zapisivanja brojeva nisu imali znak.

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s računskim operacijama u skupu cijelih brojeva proširenog s nulom. Naučit ćemo izračunati koliko je godina prošlo od izgradnje Keopsove piramide, do izgradnje piramide ispred Louvrea.

1.2. Skup cijelih brojeva



Računske operacije zbrajanja i množenja uvijek su izvedive u skupu prirodnih brojeva. Drugim riječima, zbroj i umnožak prirodnih brojeva uvijek je prirodan broj. To, međutim, ne vrijedi za oduzimanje.

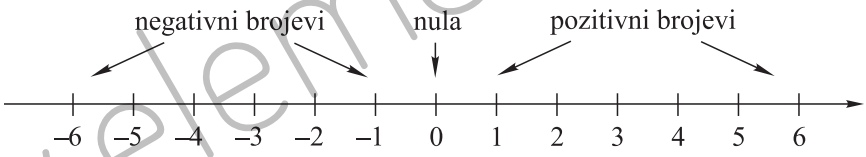
Primjerice, $3 - 5 = -2$.

Rezultat oduzimanja $a - b$, kada je $a < b$, nije prirodan broj, ali je **cijeli broj**.

Skup **Z** svih cijelih brojeva dobivamo proširivanjem skupa prirodnih brojeva nulom i negativnim brojevima:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Cijele brojeve možemo predočiti točkama pravca, kao na slici.



Pravac na kojem su smješteni brojevi naziva se **brojevni pravac**.

Za pozitivne brojeve kažemo da imaju **pozitivan predznak**, a za negativne brojeve da imaju **negativan predznak**, dok nula nema predznaka.

Brojevi 2 i –2, 6 i –6, 23 i –23 nazivaju se **suprotni brojevi**. Na brojevnom su pravcu suprotni brojevi jednako udaljeni od nule. Za brojeve 5 i –5 ta udaljenost iznosi 5 jedinica. Kažemo da je 5 **apsolutna vrijednost** ili **modul** brojeva 5 i –5. To označavamo ovako:

$$|5| = 5, \quad |-5| = 5.$$

Također je: $|23| = 23$ i $|-23| = 23$.

Apsolutna vrijednost ili modul broja jest njegova udaljenost od nule na brojevnom pravcu.

Nula je sama sebi suprotan broj i $|0| = 0$.

1.2.1. Zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva

$12 + 13 = 25$

Pozitivne cijele brojeve zbrajamo kao prirodne brojeve.

$(-7) + (-8) = -15$
$(-12) + (-13) = -25$

Ako su a i b negativni cijeli brojevi, zbrajamo ih tako da im zbrojimo apsolutne vrijednosti, a zbroju dodajemo negativan predznak.

$-13 + 8 = -5$
$11 + (-17) = -6$

Ako cijeli brojevi a i b imaju različite predznake, zbrajamo ih tako da od veće apsolutne vrijednosti oduzmemo manju, a rezultatu dajemo predznak broja veće apsolutne vrijednosti.

Oduzimanje cijelog broja svodi se na zbrajanje suprotnog broja.

$$a - b = a + (-b)$$
$$5 - 8 = 5 + (-8) = -3.$$

Ako je $a = 5$, onda je $-a = -5$. Ako je $a = -5$, onda je $-a = 5$, tj. $-(-5) = a$.

Općenito: $-(-a) = a$.

$(-8) + (+15) = +7$ Za zbrajanje cijelih brojeva vrijedi
$(+15) + (-8) = +7$ zakon komutativnosti.

$[(+15)+(-8)]+(-12)=(+7)+(-12)=-5$ Za zbrajanje cijelih brojeva
$(+15)+[(-8)+(-12)]=(+15)+(-20)=-5$ vrijedi zakon asocijativnosti.

Oduzimanje cijelih brojeva nije komutativno.

Računanje s cijelim brojevima najbolje razumijemo u "novčanom" poslovanju.

Ako imate 2 kune, a paketić žvakaćih guma stoji 5 kuna, koliko vam nedostaje za kupnju?

Ako imate 5 kuna, a olovka stoji 3 kune, koliko će kuna ostati nakon kupnje?

Izostavljanje zagrada

$22 + (-16 + 9) = 22 - 7 = 15$

$22 - 16 + 9 = 6 + 9 = 15.$

Ako je ispred zagrade znak "+", zagrada se može izostaviti, a predznaci članova unutar zagrade ostaju isti.

$22 - (-16 + 9) = 22 - (-7) = 29$

$22 + 16 - 9 = 38 - 9 = 29.$

Ako je ispred zagrade znak "–", pri izostavljanju zagrade promijene se predznaci članova unutar zagrade.

PRIMJER 1

Izostavimo zagrade i izračunajmo:

$(+28) + (+19) = 28 + 19 = 47,$

$(+26) - (+35) = 26 - 35 = -9,$

$-(22) + (+31) = -22 + 31 = 9,$

$(-43) - (-21) = -43 + 21 = -22,$

$(-10)+[(-12)-(-8)]=-10+[-12+8]=-10-12+8=-14.$

Zadatci za vježbu

1. Izračunajte:

a) $52 + (-69) - (+15),$ b) $-43 - (-72) - (+36) + 55,$

c) $98 - (+56) + (-48) - (-31),$ d) $-843 - (-56 + 17) + 44.$

2. Izračunajte:

a) $-20-[(-12)+(-28)],$ b) $48-[85+(29-53)],$

c) $-65-[-35-(74+49)],$ d) $[-(38+17)-(81+43)]-(62-79).$

1.2.2. Množenje cijelih brojeva

Množenje cijelih brojeva svodi se na množenje njihovih apsolutnih vrijednosti, primjerice:

a) $4 \cdot (-6) = -(4 \cdot 6) = -24$, b) $(-6) \cdot 4 = -(6 \cdot 4) = -24$,

c) $(-4) \cdot (-6) = 4 \cdot 6 = 24$, d) $(+4) \cdot (+6) = 4 \cdot 6 = 24$.

$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$
$+ \cdot + = +$
$- \cdot - = +$

Umnožak cijelih brojeva različitih predznaka je negativan broj.

Umnožak cijelih brojeva istih predznaka je pozitivan broj.

PRIMJER 1

Izračunajmo:

a) $(-22) \cdot 5 = -22 \cdot 5 = -110$, b) $6 \cdot (-25) = -6 \cdot 25 = -150$,

c) $(-8) \cdot (-12) = 8 \cdot 12 = 96$.

Za množenje cijelih brojeva vrijede zakoni komutativnost i asocijativnost.

PRIMJER 2

$$[4 \cdot (-6)] \cdot (-7) = (-24) \cdot (-7) = 24 \cdot 7 = 168$$

$$4 \cdot [(-6) \cdot (-7)] = 4 \cdot [6 \cdot 7] = 4 \cdot 42 = 168.$$

Pravilo množenja pozitivnih i negativnih brojeva lakše možemo zapamtiti ako znak (+) zamjenimo riječju prijatelj, a znak (–) riječju neprijatelj i čitamo redom:

Prijatelj mog neprijatelja je i moj neprijatelj.

Neprijatelj mog prijatelja je i moj neprijatelj.

Prijatelj mog prijatelja je i moj prijatelj.

Neprijatelj mog neprijatelja je moj prijatelj.

Množenjem s 1 broj se ne mijenja: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$; množenjem s –1 dobije se suprotni broj.

Za svaki cijeli broj a vrijedi: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

PRIMJER 3

Izračunajmo:

a) $4 \cdot (-16) \cdot 0 \cdot 15 = 0$,

b) $(-3) \cdot (-8) \cdot 4 \cdot (-10) = 3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot (-10) = -960$.

Za cijele brojeve vrijedi zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju (oduzimanju).

$$(-8 + 5) \cdot (-4) = (-3) \cdot (-4) = 12$$

$$(-8 + 5) \cdot (-4) = (-8) \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) = 32 - 20 = 12.$$

Općenito vrijedi:

$(a + b)\, c = a \cdot c + b \cdot c$, odnosno $a\,(b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

PRIMJER 4

Izračunajmo:

$14 \cdot (-9) + 6 \cdot (-9) = (14 + 6) \cdot (-9) = 20 \cdot (-9) = -180$.

Zadatci za vježbu

1. Izračunajte napamet:

a) $(+12)\cdot(-4)$, $(-8)\cdot(+11)$, $(-4)\cdot(+13)$,

b) $(-6)\cdot(+15)$, $(+16)\cdot(-5)$, $(-13)\cdot(-3)$,

c) $(-12)\cdot(+5)$, $(-11)\cdot(-6)$, $(+14)\cdot(-5)$.

2. Izračunajte:

a) $-786\cdot 19$, b) $479\cdot(-45)$, c) $(-845)\cdot(-26)$, d) $-324\cdot 57$.

3. Izračunajte:

a) $58\cdot 67-58\cdot 56+11\cdot 42-1\,001$, b) $(4\,826:38+62\cdot 11-7\,194:66):7$,

c) $(27\,962:31-901)\cdot(1\,099-99\cdot 11)$.

4. Izračunajte:

a) $20-3\cdot 5\cdot(7-8)$, b) $\left[-8-(-3)\right]\cdot\left[5-5\cdot(5-7)\right]$.

5. Koliko je godina prošlo od izgradnje Keopsove piramide do izgradnje piramide ispred Louvre-a? (uputa u uvodu)

1.2.3. Dijeljenje cijelih brojeva

Dijeljenje cijelih brojeva povezano je s množenjem cijelih brojeva:

$a:b=c$ ako je $a=b\cdot c$.

DJELJENIK DJELITELJ

$$138:6=23$$
$$18$$
$$0$$

KOLIČNIK (KVOCIJENT)

NETOČNO	TOČNO
$20-10:5=$ $=10:5=2$	$20-10:5=$ $=20-2=18$

PRIMJER 1

a) $12:3=4$ jer je $12=3\cdot 4$,

b) $(-12):3=-4$ jer je $-12=3\cdot(-4)$,

c) $12:(-3)=-4$ jer je $-12=(-3)\cdot 4$,

d) $(-12):(-3)=4$ jer je $12=(-3)\cdot(-4)$.

$+:+=+$
$-:-=+$
$+:-=-$
$-:+=-$

Količnik cijelih brojeva istog predznaka je pozitivan, a različitih predznaka negativan broj.

PRIMJER 2

Izračunajmo: $(24-63:9)\cdot\left[-3+24:(-8)\right]$.

Rješenje

$$(24-63:9)\cdot\left[-3+24:(-8)\right]=(24-7)\cdot\left[-3+(-3)\right]=17\cdot(-6)=-102.$$

Zadatci za vježbu

1. Izračunajte:

a) –759 : 33, b) 1 127 : (– 23), c) (–1 170) : 39), d) (–2 162) : (– 47).

2. Izračunajte:

a) $(-10)\cdot[11+(-24)-(-27)]$, b) $(-2)\cdot[3\cdot(4-2)+6]+5\cdot[-2\cdot(-3+8)+10]$,

c) $-45-\{144:[(-48)+30]\cdot(-7)\}$, d) $-6\cdot[3\cdot(7+6)-4\cdot(3-8)]-5\cdot(409-16)$.

3. Koristeći svojstva računanja s cijelim brojevima, izračunajte:

a) $(51-3\cdot 7)\cdot[3(198-64\cdot 2)-2(509-17\cdot 27)]$,

b) $1+2\{5[8(21\cdot 23-43\cdot 11)-79]\}$, c) $-4-4\{4-4[-4\cdot(-4)-4]\}$.

Odgovorite na pitanja

1. Kojim slovom označavamo skup cijelih brojeva?

a) **N**, b) **Z**, c) **Q**, d) **R**

2. Je li oduzimanje cijelih brojeva komutativno?

3. Koliko je cijelih brojeva jednako svojim kvadratima? Koji su to brojevi?

Procijenite

1. Ako je zbroj dva cijela broja 24 više od njihove razlike, koji su to brojevi?

2. Koji bi broj trebao pisati u kvadratiću? 1 110 – 1020 = 110 – $\square$

3. Koliko ima jednoznamenkastih brojeva koji su veći od razlike brojeva 57 i 48 ?

4. Kako dobiti broj 1000 koristeći znamenku 8 točno 8 puta koristeći sve četiri računske operacije?

5. Koristeći znamenke 1, 7, 7, 7, 7 i četiri osnovne računske operacije, „stvorite“ broj 100.

Modeliranje i rješavanje problema

1. Goranu je mama dala 12 novčića po 1 kunu, 4 novčića od 5 kuna i 7 novčića od 2 kune. Kupio je CD za 27 kuna i sladoled za 8 kn. Koliko mu je kuna ostalo?

2. Mirna je zamislila neki broj. Dodala mu je 7 pa oduzela 5 i dobila broj 13. Koji je broj Mirna zamislila?

3. Tri prijateljice našle su se na kavi i provele ugodno vrijeme. Prije odlaska zatražile su račun koji je iznosio 25 kuna. Svaka od njih dala je 10 kuna konobaru. Konobar nije imao 5 kuna za vratiti pa je svakoj djevojci dao po 1 kunu, a 2 kune je zadržao sebi. Djevojke su dale po 10 kuna i on im je vratio po jednu kunu, znači svaka je dala 9 kuna, a zajedno su platile 3 · 9 = 27 kuna. Ako su platile 27 kuna, a konobar je zadržao dvije kune, kamo je nestala jedna kuna?

4. Temperatura je od 7 do 10 sati ujutro porasla za 5 °C, a do 13 sati za još 7 °C, kada je bila 13 °C. Kolika je temperatura bila u 7 sati?