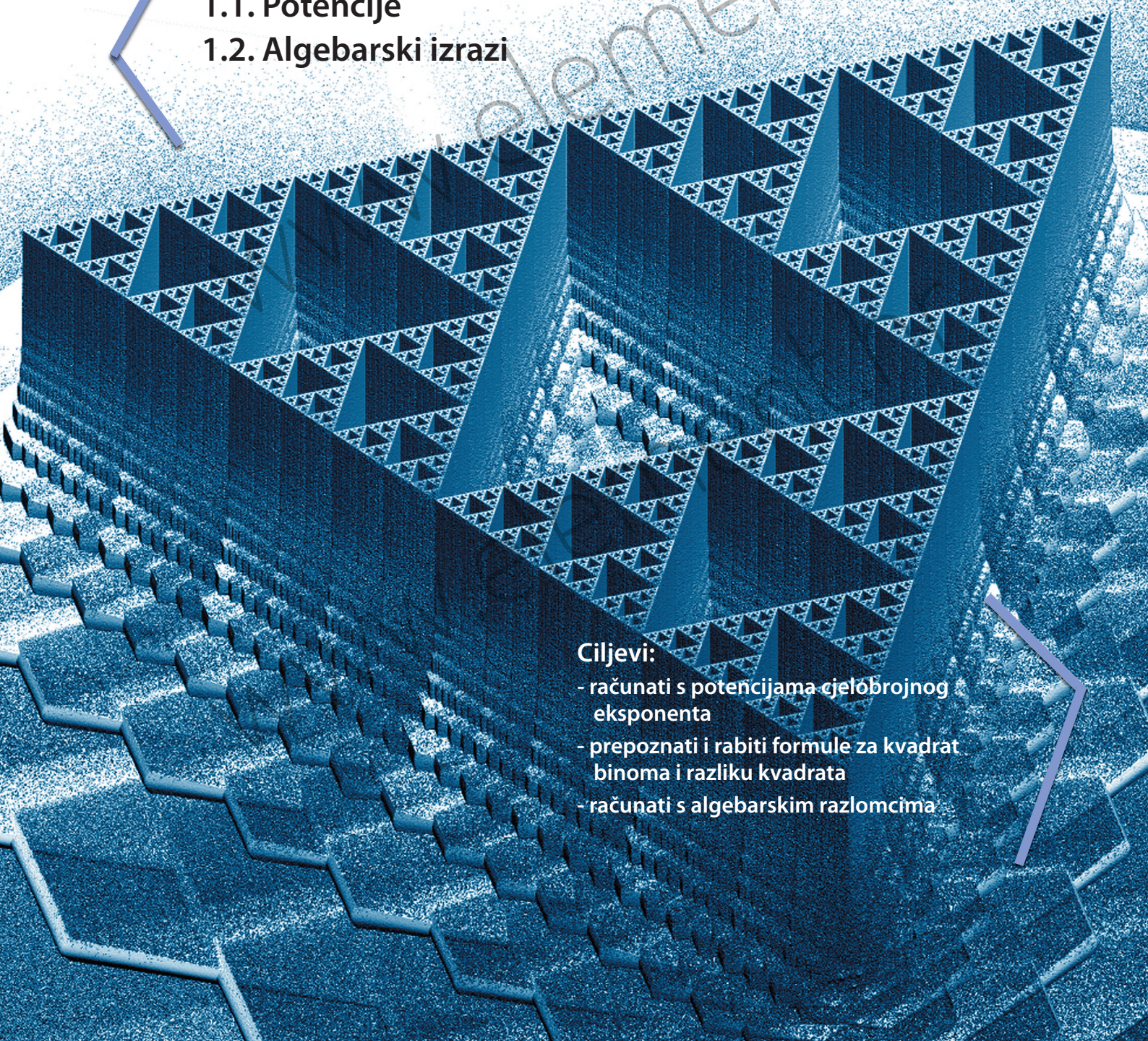
Algebarske operacije

Poglavlje 1.



Ciljevi:

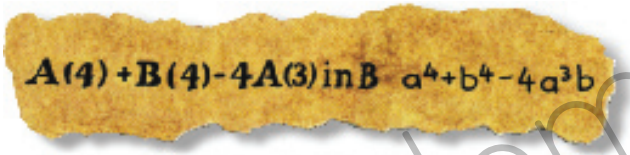
- računati s potencijama cjelobrojnog eksponenta
- prepoznati i rabiti formule za kvadrat binoma i razliku kvadrata
- računati s algebarskim razlomcima

Uvod

Potencije su u prošlosti pisane različito

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Michael Stifel (15. st.)



A(4) +B(4)-4A(3) in B $a^4+b^4-4a^3b$

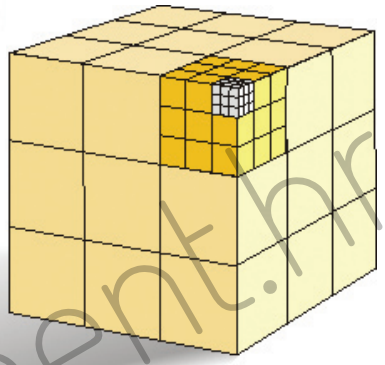
Raffaelle Bombelli (1526. – 1572.)

$\frac{3}{1}$ eguale à $\frac{1}{15}$ p $\frac{0}{4}$. $x^3=15x+4$

Adriaen van Roomen (1561. – 1615.)

Staroegipatski znak za milijun

$= 10^6$



Sve dijelove kocke podijelite kako je to već učinjeno.
Koliko ćete malih kockica ukupno dobiti nakon toga?
Je li umnožak dvaju brojeva koji su kubovi ponovno kub?
Provjerite to na primjerima.

Diofant je prvi počeo označavati potencije na svoj način, a današnje oznake koje koristimo potječu od Descartesa.

U čast i na spomen velikog matematičara, postavljen je na njegovu grobu nadgrobni spomenik, na kojem je uklesan sljedeći natpis:

Putniče, ovdje počivaju zemaljski ostaci Diofantovi.
Brojevi će ti kazati, čuda li, koliko je trajao njegov vijek životni.
Života šestina protekla mu je u djetinjstvu bezbrižnu.
Nakon još jedne dvanaestine, lice mu se pokri bradom muževnom.
A života sedminu poživi u braku bez djece.
Kad još pet prođe ljeta, usreći ga rođenje divnog mu sina prvorođenoga.
Kojemu kolo udjeli samo polovicu slavnog života očeva.
I u velikoj tuzi, četiri godine žaleći za sinom, starac dočeka kraj života zemaljskoga.

(Koliko li je živio Diofant?)

1.1. Potencije

1.1.1. Potencije s cjelobrojnim eksponentom

Već smo naučili da je:

$$5\cdot 5=5^2,\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^2,\ (-4)\cdot(-4)=(-4)^2 \text{ ili, općenito, } a\cdot a=a^2.$$

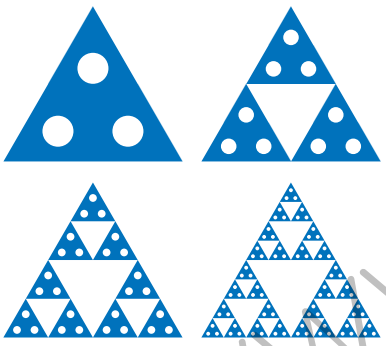
Tako za uzastopno množenje nekog broja samim sobom uvodimo kraći način zapisivanja, primjerice:

$$2\cdot 2\cdot 2=2^3=8,\qquad 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^4=16,$$

$$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^4=81,\qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64},$$

$$(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=(-1)^5=-1,$$

$$0.1\cdot 0.1\cdot 0.1\cdot 0.1=0.1^4=0.0001.$$



Svaki trokut sadrži po tri kružića, tako je broj kružića u trokutima dan s potencijama broja 3.

3, 3^2, 3^3 i 3^4

Općenito, umnožak $a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ u kojemu se a kao množitelj pojavljuje n puta označavamo a^n, odnosno:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ puta}}=a^n \quad\text{ili}\quad a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ puta}}.$$

Izraz a^n, gdje je a racionalan broj, naziva se **potencija**, broj a naziva se **osnova (baza)**, a broj n **eksponent** potencije. Kad je $n = 2$, kažemo da je to druga potencija ili kvadrat, a za $n = 3$ da je treća potencija ili kub. Druga se potencija obično naziva kvadratom, a treća kubom.

Napomenimo još da je

$$a^1=a.$$

PRIMJER 1

Umnoške napišimo u obliku potencije: a) $5\cdot 5\cdot 5$,

b) $(-8)\cdot(-8)\cdot(-8)\cdot(-8)$, c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$, d) $a\cdot a\cdot a$, e) $x\cdot x\cdot x\cdot x$.

Rješenje

a) $5\cdot 5\cdot 5=5^3$, b) $(-8)\cdot(-8)\cdot(-8)\cdot(-8)=(-8)^4$,

c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^5$, d) $a\cdot a\cdot a=a^3$, e) $x\cdot x\cdot x\cdot x=x^4$.

PRIMJER 2

Izračunajmo: a) 2^5, b) $(-5)^3$, c) 4^4, d) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$.

Rješenje

a) $2^5=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=32$, b) $(-5)^3=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)=-125$,

c) $4^4=4\cdot 4\cdot 4\cdot 4=256$, d) $\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{64}$.

PRIMJER 3

Izračunajmo: $3\cdot 4^3-4\cdot 2^5+5\cdot 6^2$.

Rješenje

$3\cdot 4^3-4\cdot 2^5+5\cdot 6^2=3\cdot 64-4\cdot 32+5\cdot 36=192-128+180=244$.

PRIMJER 4

Izračunajmo vrijednost izraza: $2a^3+3b^2-4a^2b$ za $a=2$ i $b=3$.

Rješenje

$2\cdot 2^3+3\cdot 3^2-4\cdot 2^2\cdot 3=2\cdot 8+3\cdot 9-4\cdot 4\cdot 3=-5$.

Zadatci za vježbu

1. Napišite u obliku potencije:

a) $7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7$, b) $(-11)\cdot(-11)\cdot(-11)\cdot(-11)$,

c) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$, d) $\frac{-3}{7}\cdot\frac{-3}{7}\cdot\frac{-3}{7}\cdot\frac{-3}{7}\cdot\frac{-3}{7}\cdot\frac{-3}{7}\cdot\frac{-3}{7}$,

e) $2\cdot(-2)\cdot 2\cdot 2\cdot(-2)\cdot 2$, f) $\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-3}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{3}$.

2. Izračunajte:

a) 3^5, b) 2^8, c) $(-1)^{14}$, d) $(-1)^{11}$, e) $(-4)^3$, f) $(-6)^2$.

3. Izračunajte:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, b) $(-3)^4$, c) 0.1^3, d) $\left(-\frac{1}{4}\right)^4$, e) $-\left(\frac{2}{5}\right)^4$, f) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$.

4. Izračunajte:

a) 2.3^3, b) $(-0.35)^2$, c) $(-1.7)^3$, d) $(-0.023)^2$,

e) 0.007^4, f) $(-0.101)^3$, g) $\left(-7^2\right)^3$, h) $\left((-0.3)^3\right)^2$.

5. Izračunajte:

a) 2^6-3^4, b) $2^5-4\cdot 3^4+5\cdot 4^3-6\cdot 50^0$,

c) $4\cdot(-3)^2-2\cdot(-2)^3+3\cdot(-1)^5+(-1)^0$, d) $(-4)^3\cdot\left(\frac{5}{16}-\frac{7}{16}\right)+3\cdot(-2)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$.

6. Izračunajte vrijednosti izraza:

a) $2x^3-x^4+3x^2+x$, za $x=3$, b) $x^3-2x^4+3x^2-5x+6x^0$, za $x=-2$,

c) $-x^5-x^4-x^3-x^2-x$, za $x=-1$, d) $4a^5-3a^4+2a^3-a^2$, za $a=-\frac{1}{2}$.

1.1.2. Potencije jednakih baza

Množenje potencija jednakih baza

Možemo li izračunati čemu je jednako $a^2 \cdot a^3$?

Na osnovi značenja, potencije možemo pisati:

$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 .$$

U naznačenom se množenju broj a kao faktor javlja 5 puta pa zaključujemo:

$$a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5 .$$

Općenito vrijedi:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} .$$

Navedeno pravilo izričemo ovako:

Potencije jednakih baza množe se tako da se ta baza potencira zbrojem njihovih eksponenata.

Rhindov (Ahmesov) papirus koji se čuva u Londonu iz 1650. g. pr. Kr. sadrži ovakav problem: "Neko imanje sadrži 7 zgrada. U svakoj od njih je 7 mačaka. Svaka od njih uhvati 7 miševa, od kojih je svaki pojeo 7 zrna pšenice, a svako bi zrno moglo dati 7 mjerica žita. Koliko bi na imanju bilo ukupno zgrada, mačaka, miševa, zrna pšenice i mjerica žita?

Rješenje:

zgrada	7	7
mačaka	7^2	49
miševa	7^3	343
zrna	7^4	2401
mjerica	7^5	16807

PRIMJER 1

Izračunajmo: a) $4^2 \cdot 4^3$, b) $x^3 \cdot x^4$, c) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4$, d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

Rješenje

a) $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1\,024$, b) $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$,

c) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = a^{2+3+4} = a^9$, d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3+3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

Dijeljenje potencija jednakih baza

Postupajući slično kao pri množenju potencija, odredimo količnik $a^5 : a^2$:

$$a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^{5-2} = a^3 .$$

Općenito vrijedi:

$$a^m : a^n = a^{m-n} .$$

Riječima:

Potencije jednakih baza dijele se tako da se ta baza potencira razlikom eksponenata djeljenika i djelitelja.

PRIMJER 1

Izračunajmo: a) $2^7 : 2^3$, b) $a^7 : a^4$, c) $x^9 : x^3$, d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10} : \left(\frac{1}{3}\right)^6$.

Rješenje

a) $2^7 : 2^3 = 2^4 = 16$, b) $a^7 : a^4 = a^{7-4} = a^3$,

c) $x^9 : x^3 = x^{9-3} = x^6$, d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10} : \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.

Istaknimo da je za $a \neq 0$:

$$a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n} = 1,$$

odnosno

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 = 1.$$

Dakle:

Potencija svakog broja različitog od nule s eksponentom nula jednaka je jedan.

NETOČNO	TOČNO
$2^3 = 6$	$2^3 = 8$
$2^{-1} = -2$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$

Tako je

$$2^0 = 1,\ 123^0 = 1,\ (-7)^0 = 1,\ (ab)^0 = 1,\ (x+y)^0 = 1.$$

Odredimo sada količnik $a^2 : a^5$ koristeći se formulom $a^m : a^n = a^{m-n}$:

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}.$$

Također je

$$a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}.$$

Vidimo da je

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

Općenito:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\quad a \neq 0.$$

Primjerice:

$2^{-1} = \frac{1}{2}$, $\quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $\quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$,

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$, $\quad a^{-1} = \frac{1}{a}$, $\quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000}$.

Zadatci za vježbu

1. Zapišite jednostavnije:

a) $2^4 \cdot 2^6$, b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$, c) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$, d) $10^3 \cdot 10^3$,

e) $0.1^2 \cdot 0.1^4$, f) $(-1)^3 \cdot (-1)^5$.

2. Izračunajte:

a) $y^5 \cdot y^6$, b) $x^3 \cdot x^4 \cdot x^5$, c) $\frac{2}{3}a^2b \cdot \frac{3}{2}ab^2$,

d) $16a^3b^2 \cdot \frac{1}{4}a^2b^3$, e) $0.1x^2 \cdot 0.1x^3$, f) $\frac{3}{4}x^3y^4 \cdot \left(-\frac{2}{3}x^2y^2\right)$.

3. Izračunajte:

a) $2^8 : 2^5$, b) $3^{23} : 3^{19}$, c) $4^{22} : 4^{17}$, d) $\left(\frac{4}{5}\right)^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^4$.

4. Izračunajte:

a) $x^8 : x^5$, b) $x^{17} : x^{13}$, c) $\left(\frac{8}{9}a^6\right) : \left(\frac{4}{3}a^4\right)$,

d) $a^4b^6 : a^2b^3$, e) $\frac{2}{3}x^5y^6 : \left(\frac{4}{3}xy^2\right)$, f) $-0.4a^6b : \left(0.2a^3b^2\right)$.

5. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^{98} + (-1)^{99} = ?$

a) 1, b) 0, c) –1, d) –99.

1.1.3. Potencije jednakih eksponenata

Potencije jednakih eksponenata množimo tako da umnožak baza potenciramo zajedničkim eksponentom:

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m.$$

$144 \cdot 9 =$ (često je lakše izračunati) $=$
$12^2 \cdot 3^2 = (12 \cdot 3)^2 =$
$= 36^2 = 1\,296$

Uvjerimo se u istinitost navedene formule:

$$a^m \cdot b^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ faktora}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{m \text{ faktora}} =$$

$$= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{m \text{ faktora}} = (a \cdot b)^m$$

PRIMJER 1

a) $5^8 \cdot 2^8 = (5 \cdot 2)^8 = 10^8$,

b) $20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^3 = 8\,000$,

c) $(1.25)^6 \cdot (-4)^6 = (1.25 \cdot 4)^6 = 5^6$,

d) $(-0.2)^7 \cdot 5^7 = (-0.2 \cdot 5)^7 = (-1)^7 = -1$.

Očito je da potencije jednakih eksponenata dijelimo tako da količnik baza potenciramo zajedničkim eksponentom:

$$a^m : b^m = (a : b)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

PRIMJER 2

$10^4 : 5^4 = (10 : 5)^4 = 2^4 = 16$,

$(-12)^5 : 3^5 = (-12 : 3)^5 = (-4)^5 = -4^5$,

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 : \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3}\right)^3 = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 = -\frac{64}{27}.$$

Zadatci za vježbu

1. a) $2^3 \cdot 5^3$, b) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4$, c) $4^5 \cdot 5^5 : 10^5$, d) $4^5 \cdot 3^5$, e) $8^6 : 2^6$, f) $\left(\frac{4}{3}\right)^7 : \left(\frac{9}{2}\right)^7$,

g) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^4 : \left(\frac{5}{4}\right)^4$, h) $3^4 \cdot 2^3$, i) $5^4 \cdot 3^5$, j) $5^2 \cdot 3^6$, k) $4^4 \cdot 3^2$, l) $2^6 \cdot 4^5$.

2. Izračunajte na najjednostavniji način, ne koristeći kalkulator:

$(21.45)^3 : (7.15)^3 - (37.52)^3 : (18.76)^3$.

1.1.4. Računanje s potencijama cjelobrojnih eksponenata

Zbrajanje i oduzimanje potencija

Potencije koje imaju jednake baze i jednake eksponente mogu se zbrajati ovako:

$$a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2,$$
$$x^3 + x^3 = 2x^3,$$
$$a^4 + 2a^4 + 3a^4 = 6a^4,$$
$$3x^2 + 4x^3 - 2x^2 + 2x^3 = x^2 + 6x^3.$$

NETOČNO	TOČNO
$-5^6 = (-5)^6$	$(-5)^6 = 5^6$
$4^2 \cdot 4^3 = 16^6$	$4^2 \cdot 4^3 = 4^5$
$(2a)^4 = 2a^4$	$(2a)^4 = 16a^4$
$\left(\frac{1}{2+3}\right)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{2+3}\right)^{-1} = 2+3$

Potenciranje potencija

Odredimo sada čemu je jednako $(a^2)^3$. Taj izraz možemo shvatiti kao potenciju s bazom a^2 i eksponentom 3, pa vrijedi:

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{3\cdot 2} = a^6.$$

Općenito vrijedi:

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}.$$

Riječima:

Potencija se potencira tako da se baza potencira umnoškom eksponenata.

PRIMJER 1

$(-5)^0 = 1 \qquad -5^0 = -1$

Izračunajmo: a) $(2^3)^4$, b) $(3^2)^3$,

c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5$, d) $3^4 - 4\cdot 2^5 + 6\cdot 10^0$, e) $5\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left(\frac{1}{4}\right)^3$.

Rješenje

a) $(2^3)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12} = 4\,096$, b) $(3^2)^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6 = 729$,

c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1\,024}$,

d) $81 - 4\cdot 32 + 6\cdot 1 = 81 - 128 + 6 = -41$,

e) $5\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 5\cdot\frac{1}{64} - \frac{1}{64} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$.

Računanje potencija s pomoću džepnog računala

Džepna računala imaju dvije funkcije x^2 i y^x.

x^2 – kvadrat broja, primjerice:

5 x^2 = 25, 2 5 x^2 = 625.

y^x – računa potencije.

PRIMJER 1

Izračunajmo: a) 4^6, b) $(-2)^4$, c) $(-2)^5$ i d) 2.1^5.

Rješenje

a) 4^6 , 4 y^x 6 = 4096 .

b) $(-2)^4$, 2 +/- y^x 4 = 16 .

c) $(-2)^5$, 2 +/- y^x 5 = −32 .

Uočimo da se predznak unosi nakon broja.

d) 2.1^5 , 2 . 1 y^x 5 = 40.84101 .

Zadatci za vježbu

1. Izračunajte:

a) $\left(2^3\right)^4$, b) $\left(a^2\right)^5$, c) $\left(3x^3y^2\right)^4$,

d) $\left(-2a^3b^2\right)^3$, e) $\left(\dfrac{2x^3}{3y^2}\right)^4$, f) $\left(-0.2a^2\right)^5$.

2. Izračunajte:

a) $\dfrac{4a^5b^6}{a^3b^9c^4}$, b) $\dfrac{x(x+y)^6}{x^4(x+y)^3}$, c) $\dfrac{x^5y^5z^5}{4x^4y^5z^{12}}$, d) $\dfrac{(ab)^6}{\left(a^3b^4\right)^2}$, e) $\dfrac{3x^6y^6}{(xy)^5}$.

3. Napišite broj kao potenciju sa zadanom bazom:

a) broj 16^{13}, baza 2, b) broj 8^{14}, baza 3, c) broj 64^6, baza 4, d) broj 25^2, baza 5.

4. Koliko je:

a) 10^{-1}, b) 10^{-2}, c) 2^{-3}, d) 3^{-4},

e) 5^{-5}, f) 0.1^{-2}, g) 0.25^{-4}, h) $(-0.2)^3$?

5. Napišite brojeve:

a) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ i $\frac{1}{32}$ kao potencije s bazom 2,

b) 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 i 0.00001 kao potencije s bazom 10.

c) 1, 225, 625, i $\frac{1}{25}$ kao potencije s eksponentom 2,

d) 8, 64, i $\frac{1}{729}$ kao potencije s eksponentom 3.

6. Izračunajte:

a) $\dfrac{9^3}{\left(3^4-3^2\right)^2}$, b) $(-1.4)^3\cdot 3\left(\dfrac{4}{7}\right)^3$, c) $\dfrac{63^4\cdot 35^3}{21^7\cdot 5^5}$, d) $\dfrac{(-2)\cdot(-3)^{17}-(-3)^{16}}{9^7\cdot 15}$, e) $\dfrac{5^6-10^4}{9}$.

7. Izračunajte:

a) $\left(\dfrac{3a^2}{b}\right)^3\cdot\left(\dfrac{2b^2}{a}\right)^2$, b) $\left(\dfrac{a^2}{bx}\right)^5\cdot\left(\dfrac{x^3}{y^5}\right)^2\cdot\left(\dfrac{by^3}{a^3}\right)^3$, c) $\left(\dfrac{2a^3b^5}{5xy^4}\right)^5:\left(\dfrac{2ab^3}{5xy^5}\right)^4$,

d) $\left(\frac{a^4bc^2}{d^3}\right)^2 : \left(\frac{c^3d}{b^4}\right)^3$, e) $\left(a^4b^5\right)^2 : \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$, f) $\left(-\frac{4}{5}a^2b^{x+1}c^{10}\right) : \left(\frac{3}{5}b^{x-1}c^2\right)$.

8. Izračunajte:

a) $\frac{3a^{-2}x^{-3}}{b^{-4}} \cdot \frac{2a^{-1}x^3}{b^3}$, b) $\frac{a^2b^{-3}}{cd^{-4}} \cdot \frac{5a^{-3}c^4}{b^2d^{-5}}$, c) $\left(\frac{x^{-3}}{2ab^{-4}}\right)^2 : \left(a^{-3}b^{-2}x\right)^{-3}$,

d) $\left(\frac{3a^2}{4b^3}\right)^{-3} : \left(\frac{9a^{-2}b}{4c}\right)^{-2}$, e) $\left(\frac{a^5b^6}{x^6y^4}\right)^3 : \left(\frac{x^9y^6}{a^7b^9}\right)^{-2}$, f) $\left(\frac{8x^{-4}}{y^2}\right)^{-3} : \left(\frac{4x^5}{y^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(x^4y^3\right)^{-5}$.

1.1.5. Znanstveni zapis realnog broja

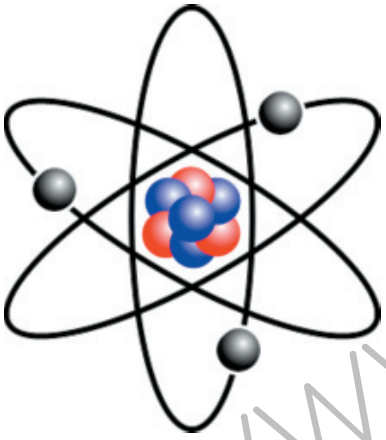
Apollo 11

Ogledalo koje su na površini Mjeseca postavili astronauti *Apolla 11* jedini je dio misija Apollo koji još uvijek šalje podatke na Zemlju. Mjerenje vremena koje treba laserskom snopu da dođe od Zemlje do tog ogledala i natrag omogućuje mjerenje udaljenosti Zemlja – Mjesec.

Udaljenost od Zemlje do Mjeseca je 384 tisuće kilometara, a do Sunca 146 milijuna kilometara.

Atom je osnovna građevna jedinica tvari. Atom se sastoji od jezgre (koju čine protoni i neutroni) i elektrona koji se nalaze u ljuskama oko jezgre. Jezgra čini 99.98 % mase atoma. Promjer jezgre (0.000000000000001 m) je 100 000 puta manji od promjera atoma (0.0000000001 m).

U znanosti se često pojavljuju vrlo veliki ili vrlo mali brojevi, kao što je vidljivo iz gornjih primjera. Zapisivanje ovih brojeva možemo pojednostavniti korištenjem znanstvenog ili standardnog zapisa.



Atom

Broj je zapisan u **znanstvenom zapisu** ako je prikazan u obliku

$$a \cdot 10^n,$$

gdje je n cijeli broj i $1 \leq a < 10$ ili $-10 < a < -1$.

Udaljenost od Zemlje do Mjeseca prikazat ćemo u znanstvenom zapisu $3.84 \cdot 10^5$ km, a do Sunca $1.46 \cdot 10^8$ km. Promjer jezgre atoma je 10^{-15} m, a promjer atoma 10^{-10} m.

PRIMJER 1

Prikažimo zadane brojeve u standardnom zapisu.

a) 75300, b) 0.0000056.

Rješenje

a) Broj 75 300 možemo zapisati kao 75 300.0. Decimalna će se točka nalaziti iza znamenke 7. Prebrojimo koliko je mjesta od stare do nove decimalne točke. Vidimo da su to 4 mjesta. Tada je $75\,300 = 7.53 \cdot 10^4$.

b) Zaključujući na sličan način, prebrojavamo na kojem je mjestu iza decimalne točke znamenka različita od nule. Znamenka 5 je na šestom mjestu iza decimalne točke te zapisujemo $0.0000056 = 5.6 \cdot 10^{-6}$.

PRIMJER 2

Zapišimo zadane brojeve u decimalnom obliku:

a) $-5.6 \cdot 10^2$, b) $7.12 \cdot 10^{-4}$.

Rješenje

a) Sada je potrebno samo okrenuti postupak. Pri množenju broja s 10 broj se povećava i decimalna se točka pomiče za jedno mjesto udesno, tako da je $-5.6 \cdot 10^2 = -560$.

b) Pri dijeljenju broja s 10, odnosno množenju broja s 10^{-1}, broj se smanjuje i decimalna se točka pomiče za jedno mjesto ulijevo te je broj $7.12 \cdot 10^{-4} = 0.000712$.

PRIMJER 3

Riječ "milijun" prvi je put upotrijebljena u 14. stoljeću, a trajalo je dugo dok nije postala općenito prihvaćena. Dotad, a i poslije, koristio se izraz "tisuću tisuća". Riječ "milijarda" nastala je tek u 18. st. Amerikanci, kadšto Francuzi i Rusi, umjesto milijarde koriste riječ "bilijun".

Masa Jupitera približno je jednaka $2 \cdot 10^{27}$ kg, a masa Zemlje $6 \cdot 10^{24}$ kg. Koliko je puta masa Jupitera veća od mase Zemlje?

Rješenje

Podijelit ćemo masu Jupitera masom Zemlje.

$$\frac{2 \cdot 10^{27}}{6 \cdot 10^{24}} = \frac{\cancel{2} \cdot 10^{27-24}}{\cancel{6}^{3}} = \frac{10^3}{3} = 333.\dot{3}$$

Masa Jupitera je 333 puta veća od mase Zemlje.

Osim uobičajenog zapisa broja, na računalu se brojevi mogu zapisati i u znanstvenom i inženjerskom obliku s pomoću tipki SCI (SCI 5).

SCI: prikazuje broj u obliku $a_0.a_1 a_2 ... a_n \cdot 10^n$, $1 \le a_0 \le 9$.

ENG: prikazuje broj u obliku $b \cdot 10^n$, $1 \le b \le 999$.

PRIMJER 4

Izračunajmo s pomoću džepnog računala na dva načina.

$24.56 \cdot 10^5 = 2\,456\,000 = 2.456 \cdot 10^6$

Rješenje

$8000 = 8 \cdot 10^3$

$8230 = 8.23 \cdot 10^3$

$0.08 = 8 \cdot 10^{-2}$

$0.0000823 = 8.23 \cdot 10^{-5}$

2 4 . 5 6 × 1 0 y^x 5 = 2456000

2nd SCI 5 2 4 . 5 6 × 1 0 y^x 5 = 2.456^{06}

Tipka EE omogućuje unos dvoznamenkastog eksponenta baze 10.

S pomoću te tipke $1.22 \cdot 10^6$ na džepnom računalu zapisujemo ovako:

1 . 2 2 EE 6 , a na zaslonu se pojavljuje 1.22^{06}.

Ako pomnožimo milijun milijunom, tj. $1\,000\,000 \cdot 1\,000\,000$, na ekranu će se pojaviti $1.^{12}$, što predstavlja 10^{12}.

Zadatci za vježbu

1. Izračunajte: a) 4^5, b) 7^3, c) 11^5, d) 2.2^4.

Odgovorite na pitanja

1. $1^{2005} + 1^{2005} =$ a) 1^{4010}, b) 2^1, c) 2^{2005}, d) 2^{4010}.

2. $x^{400} : x^{100} =$ a) x^{500}, b) x^{300}, c) x^4, d) 4.

3. Umnožak $\square$ i x^{100} ima istu vrijednost kao i $(-x)^{100}$. Vrijednost $\square$ je:
a) 100, b) 1, c) –1, d) –100.

4. Odredite eksponente sljedećih potencija: a) $5x^2$, b) $15 \cdot 2^3$, c) $(-2)^5$.

5. Odredite baze sljedećih potencija: a) $5x^2$, b) $15 \cdot 2^3$, c) $(-2)^5$.

6. Koji je od sljedećih brojeva zapisan u znanstvenom zapisu?
a) $12.36 \cdot 10^6$, b) $123.6 \cdot 10^6$, c) $0.1236 \cdot 10^6$, d) $1.236 \cdot 10^6$.

Procijenite

1. Provjerite je li:
a) $(1+2+3+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$, b) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

2. Koja je od sljedećih tvrdnji točna?
a) $4^{-2} < 4^{-3}$, b) $5^{-2} > 2^{-5}$, c) $(-2)^4 = 2^{-4}$, d) $7^2 \cdot 7^{-2} > 2^7 \cdot 2^{-7}$.

3. Upiši točan broj u prazan kvadratić: $2^{2005} = 2^{2004} + \square$

4. Koja je tvrdnja točna za $a = \left(2^{-2}\right)^{-5}$?
a) $a < 0$, b) $0 < a < 1$, c) $100 < a < 1\,000$, d) $1\,000 < a < 10\,000$.

5. Koja je od sljedećih tvrdnji točna?
a) $2 \cdot 3^4 = 6^4$, b) $2^4 \cdot 5^4 = 10^8$, c) $3a^8 - 5a^8 = -2a^8$, d) $(-1)^5 = -5$.

6. $4 \cdot 4^4 =$ a) 4^4, b) 4^5, c) 14^4, d) 16^5.

7. Koliko znamenaka ima broj $10\,000^{9999}$?
a) 9999, b) 10 000, c) 39996, d) 39997.

Modeliranje i rješavanje problema

1. Masa jedne molekule kisika je $5.3 \cdot 10^{-23}$ grama. Odredite masu 20 000 molekula kisika.

2. Ako je brzina svjetlosti $3 \cdot 10^8$ m/s, odredite udaljenost Plutona od Sunca ako je poznato da svjetlost putuje od Sunca do Plutona 5 sati 28 minuta i 20 sekundi.

3. Odredite masu ledene kocke duljine brida 0.5 m. Gustoća leda je 0.916 g/cm^3.
($m = \rho \cdot V$ masa tijela gustoće ρ i volumena V)

4. Na zemljopisnoj karti udaljenost Zagreb – Karlovac iznosi 10 cm. U kojem je omjeru rađena karta ako se zna da je udaljenost Zagreb – Karlovac 50 km?

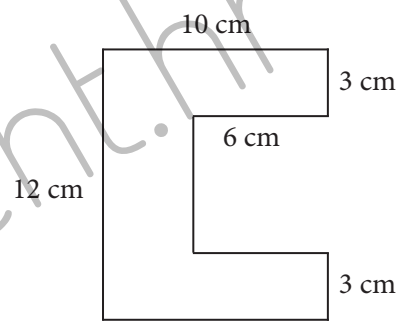
5. Koristeći 20 čačkalica, složite pravokutnike različitih duljina i širina. Kako će se odnositi njihovi opsezi?

6. Ako je Ratko potrošio 16.4 m žice kako bi ogradio okućnicu, a širina okućnice je 5.05 m, kolika je duljina okućnice?

a) 3.15 m, b) 5.05 m, c) 6.3 m, d) 10.1 m.

7. Odredite opseg lika sa slike:

a) 34 cm, b) 34 cm^2, c) 56 cm, d) 56 cm^2.



8. U 2010. godini potrošili smo $3.7 \cdot 10^9$ kuna na sladoled. Ako je u Hrvatskoj otprilike $4.5 \cdot 10^6$ stanovnika, koliko je svaki potrošio na sladoled?

Provjerite svoje znanje

1. Izračunajte:

a) $2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - (-2)^3 \cdot \frac{1}{4}$, b) $(-1.25)^2 + 0.75^2 + (-1)^3 - (-3.5)^2 - 0.5$.

2. Izračunajte vrijednosti izraza:

a) $x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x$, za $x = -1$, b) $a^3 - 3a^2b + 4b^3$, za $a = -2$ i $b = 3$.

3. Izračunajte: a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{11} : \left(\frac{1}{3}\right)^6$, b) $0.5^{15} : 0.5^{11}$.

4. Napišite brojeve: 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ i $\frac{1}{243}$ kao potencije s bazom 3.

5. Napišite brojeve: 0, $\frac{1}{16}$, i 81 kao potencije s eksponentom 4.

6. Izračunajte: a) $\frac{8^5 + 2^{11}}{17}$, b) $\frac{10^6 - 5^7}{59}$.

7. Izračunajte: $\left(\frac{x}{y^2}\right)^3 : \left(x^2 y\right)^2$.

8. Izračunajte: $\left(\frac{5x^5}{y^{-3}}\right)^{-3} : \left(\frac{5x^2}{y^3}\right)^{-4} : \left(x^3 y^9\right)^{-2}$.

9. Izračunajte i prikažite u znanstvenom zapisu $\frac{66\,000 \cdot 0.001}{0.003 \cdot 0.002}$.

10. U New Yorku na maratonu sudjeluje $2 \cdot 10^4$ trkača. Svaki od njih pretrči 42 kilometra. Izračunajte koliko ukupno kilometara pretrče svi trkači i izrazite odgovor u znanstvenom zapisu. Ako znamo da je udaljenost od Zemlje do Sunca 149 600 000 km, koliko bi još trkača trebalo trčati kako bi svi zajedno dostigli tu udaljenost?

1.2. Algebarski izrazi

Izraz oblika $a \cdot x^n$ naziva se **monom** ili **jednočlan izraz**. Tako su izrazi $2x^3$, $0.25a^4$ i $\frac{1}{2}y$ primjeri monoma.

Dvočlani algebarski izraz koji čine dva monoma povezana znakom + naziva se **binom**. Tako su binomi izrazi $a + b$ ili $7x^2 + y$.

Zbroj više monoma naziva se **polinom** ili **višečlan izraz**, primjerice: $2x^2 - 5xy + 6$ je polinom.

1.2.1. Računanje s algebarskim izrazima

Izračunajmo umnožak $(a + b)(c + d)$.

Već smo upoznali zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \text{odnosno} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

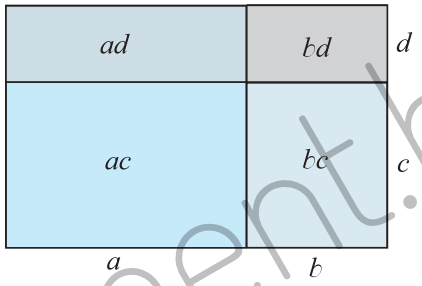
Neka je $c + d = m$, tada je

$(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$

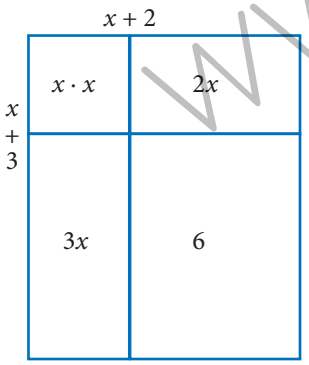
Dakle,

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Navedeni postupak potvrđuje i jednakost površina na slici.



Množenje polinoma



$(x + 3)(x + 2) = x^2 + (2 + 3)x + 6$

PRIMJER 1

Izračunajmo: a) $(x+6)\cdot(y+4)$, b) $(4a+6)\cdot(3b+8)$.

Rješenje

a) $(x+6)\cdot(y+4) = (x+6)\cdot y + (x+6)\cdot 4 = xy + 6y + 4x + 24$,

b) $(4a+6)\cdot(3b+8) = 12ab + 32a + 18b + 48$.

Zadatci za vježbu

1. Izračunajte:

a) $(a+b)\cdot 4b$, b) $(4x+5y)\cdot(2x+3)$, c) $(8x-7y)\cdot(3x+4y)$,

d) $(18ab-15a):3a$, e) $(a + 4)(a + 3)$, f) $(3a + 2b)(a + b)$,

g) $(1 - x)(1 + x)$, h) $(\pi r^2 + \pi r):\pi r$.