Aritmetički niz

Poglavlje 1.

1.1. Općenito o nizovima
1.2. Aritmetički niz

Ciljevi:

- prepoznati, usporediti i prikazati članove niza
- prepoznati aritmetički niz
- izračunati određeni član aritmetičkog niza i konačni zbroj članova aritmetičkog niza
- primijeniti niz u konkretnoj situaciji

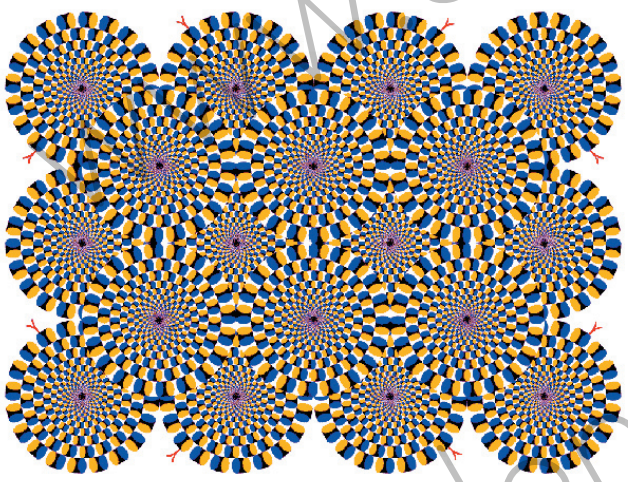
www.element.hr

Uvod

Fibonacci je rođen u Italiji, ali je odrastao u Sjevernoj Africi, gdje je učio matematiku te putujući s ocem po svijetu spoznavao goleme prednosti matematičkih sustava u zemljama koje su posjećivali. To opisuje u svojoj poznatoj knjizi "Liber abaci" (1202).

Zadatak iz trećeg poglavlja te knjige doveo je do uvođenja Fibonaccijevih brojeva i Fibonaccijeva niza, po čemu ga danas najviše pamte:

Neki čovjek postavio je par zečeva u prostor koji je sa svih strana bio okružen zidom. Koliko parova zečeva može nastati od tog para za godinu dana ako se pretpostavi da svaki mjesec svaki par na svijet donese novi par, koji postaje produktivan od drugog mjeseca?



Trutovi su muške jedinke kod pčela. Njihov zadatak je oplođivanje matice. Trutovi imaju snažna krila i velike oči, a to im je potrebno da za vrijeme leta mogu opaziti i dostići maticu. Oni za vrijeme toplih sunčanih dana izlijeću iz košnica da bi se sreli s maticama. Poslije sparivanja s maticom, trut ugiba. Tako dugo dok traje lijepo vrijeme i dok cvijeće obilno proizvodi nektar, trutovi u svom društvu nalaze gostoprimstvo i hranu. Ali u jesen čim nestane paše, u pčelinjacima počinje takozvano izbacivanje trutova. Trutove koji se vraćaju s leta pčele ne puštaju natrag u košnicu.

Svaka kolonija pčela sastoji se od kraljice, par trutova i puno pčela radilica. Ženke pčela (kraljice i radilice) imaju dva roditelja, truta i kraljicu. Trutovi se pak roje iz neoplođenih jajašca. To znači da imaju jednog roditelja. **Fibonaccijev niz** označuje trutovo obiteljsko stablo u kojem on ima jednog pretka, zatim dva pretka, tri pretka i tako dalje.

www.element.hr

1.1. Općenito o nizovima

Mnoge kreacije u prirodi uključuju komplicirani matematički „dizajn“ spirale. Primjerice, sjemenke u cvijetu suncokreta formiraju spiralu. Kod nekih vrsta je 21 spirala položena u smjeru kazaljke na satu, 34 u smjeru obrnuto od kazaljke na satu, kod nekih drugih vrsta 34 i 55, ili 55 i 89 ili čak 89 i 144.

Ovakvo opažanje postaje još zanimljivije kada promotrimo niz brojeva koje je otkrio i proučavao Leonardo iz Pise, poznat kao Fibonacci, matematičar iz Italije koji je djelovao u 13. stoljeću.

Fibonacci-jev niz brojeva je beskonačni niz koji započinje ovako

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Prva dva člana su 1, a svaki sljedeći član nastaje zbrajanjem prethodna dva člana.

Ako broj 1 nazovemo prvim članom niza, sljedeću jedinicu drugim članom niza, broj 2 trećim članom niza, broj 3 četvrtim članom niza i tako dalje, to znači da prirodnim brojevima $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ pridružujemo vrijednosti $F = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots\}$ članova Fibonacci-jeva niza.

Ako članove niza označimo $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, … pridružili smo prirodnim brojevima vrijednosti Fibonacci-jeva niza.

Broj a_1 čitamo prvi član niza, broj a_2 drugi član niza, broj a_3 treći član niza, a broj a_n n-ti ili opći član niza.

Niz u skupu A, gdje je $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ skup članova nekog niza, je svaka funkcija $a : N \to A$. Funkcija a prirodnom broju n pridružuje element a_n skupa A.

Element a_n je **opći** ili ***n*-ti član niza**, a sam niz katkad kratko zapisujemo (a_n).

Fibonacci-jev niz možemo smatrati funkcijom $a : N \to A$.

N	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
F	1	1	2	3	5	8	13
	$a_1 = 1$	$a_2 = 1$	$a_3 = 2$	$a_4 = 3$	$a_5 = 5$	$a_6 = 8$	$a_7 = 13 \ldots$

PRIMJER 1

Napišimo prva četiri člana niza zadanog općim članom:

a) $a_n = 3n + 4$ b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n - 1}$

Rješenje

a) za $n = 1$, $a_1 = 3 \cdot 1 + 4 = 7$ za $n = 2$, $a_2 = 3 \cdot 2 + 4 = 10$

za $n = 3$, $a_3 = 3 \cdot 3 + 4 = 13$ za $n = 4$, $a_1 = 3 \cdot 4 + 4 = 16$

Prva četiri člana niza su 7, 10, 13, 16.

Fibonacci-jevi brojevi na klavijaturama

Fibonacci-jeve brojeve možemo naći u jednoj oktavi na klavijaturama glazbenih instrumenata. Oktava sadržava **13** tipki, od kojih je **8** bijelih i **5** crnih. Crne tipke su u dvije grupe, u jednoj su **2**, a u drugoj **3**. Brojevi koje smo nabrojali, 2, 3, 5, 8, 13, su dio niza koji nazivamo Fibonacci-jev niz.

www.element.hr

Općenito, faktor $(-1)^n$ određuje hoće li određeni član niza biti pozitivan ili negativan ovisno o parnosti, odnosno neparnosti eksponenta n.

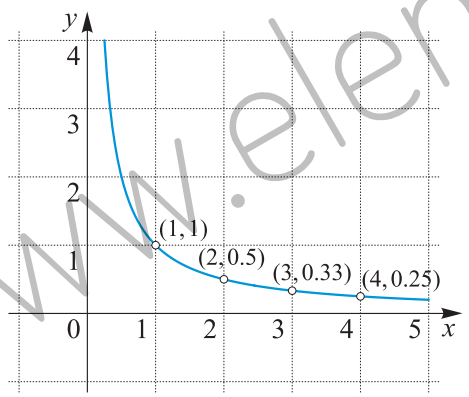
b) za $n = 1$, $a_1 = \frac{(-1)^1}{3^1 - 1} = -\frac{1}{2}$ za $n = 2$, $a_2 = \frac{(-1)^2}{3^2 - 1} = \frac{1}{8}$

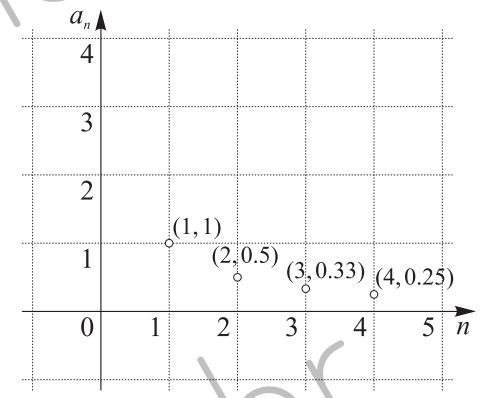
za $n = 3$, $a_3 = \frac{(-1)^3}{3^3 - 1} = -\frac{1}{26}$ za $n = 4$, $a_1 = \frac{(-1)^4}{3^4 - 1} = \frac{1}{80}$

Prva četiri člana niza su $-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{26}, \frac{1}{80}$.

Niz može biti zadan **grafički**.

Zamislimo niz s općim članom $a_n = \frac{1}{n}$. Kako ćemo razlikovati graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ od grafičkog prikaza niza $a_n = \frac{1}{n}$? Na slikama su prikazana oba grafa. Vidimo da se na grafu niza nalaze samo točke čije su apscise prirodni brojevi.





lat. *recurrere*; opet doći, vratiti se, vraćati se (na stvar ili predmet)

Niz možemo zadati **rekurzivnim formulama**, u kojima se članovi niza zadaju s pomoću već definiranih članova. Ako znamo kako bilo koji član niza ovisi od člana pred sobom ili od nekoliko prethodnih članova, odnosno znamo pravilo po kojem računamo n-ti član, onda se vraćamo, tražeći vrijednosti prethodnih članova pa se takav način zadavanja niza zove **rekurzivno zadavanje niza**.

PRIMJER 2

Fibonacci-jev niz je upravo niz zadan rekurzivnim formulama. Odredimo prvih šest članova Fibonacci-jeva niza.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3$$

Rješenje

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

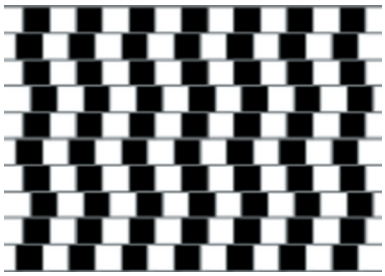
$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

Prvih 6 članova niza je 1, 1, 2, 3, 5, 8.

www.element.hr

Niz može biti zadan svojim članovima. U toj situaciji pokušavamo odrediti pravilo po kojem se formiraju članovi toga niza.

PRIMJER 3



Odredimo opći član niza:

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

c) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, …

Rješenje

a) Vidimo da su članovi zadanog niza prirodni brojevi i vidimo da je prvi član 1, drugi član 2, treći član 3 i tako dalje, znači da redni broj člana možemo povezati s njegovom vrijednosti, tako da opći član niza glasi $a_n = n$.

b) Brojnici članova zadanog niza redom su prirodni brojevi, a nazivnici su brojevi za jedan veći od brojnika, što znači da opći član niza možemo zapisati $a_n = \frac{n}{n+1}$.

c) Pomnije promatrajući vidimo da ovaj niz čine prosti brojevi. Proste brojeve možemo definirati kao brojeve koji su djeljivi s jedan i samim sobom, ali to ne znamo zapisati formulom. U ovakvim situacijama članove niza zadajemo opisno.

Zadatci za vježbu

1. Napišite prva četiri člana niza zadanog formulom:

a) $a_n = 3n + 2$, b) $a_n = 3^n$, c) $a_n = (-3)^n$,

d) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, e) $a_n = (-1)^n (n+3)$, f) $a_n = \frac{2n}{n+4}$.

2. Napišite prva četiri člana niza zadanog rekurzivnom formulom:

a) $a_1 = 7,\ a_n = a_{n-1} + 5,\ n \geq 2$, b) $a_1 = 12,\ a_n = a_{n-1} + 4,\ n \geq 2$,

c) $a_1 = 3,\ a_n = 4a_{n-1},\ n \geq 2$, d) $a_1 = 2,\ a_n = 5a_{n-1},\ n \geq 2$,

e) $a_1 = 4,\ a_n = 2a_{n-1} + 3,\ n \geq 2$, f) $a_1 = 5,\ a_n = 3a_{n-1} - 1,\ n \geq 2$.

3. Napišite n-ti član zadanih nizova, ako je moguće.

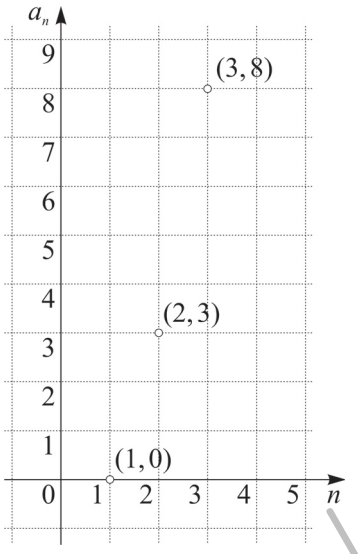
a) 2, 5, 8, 11, 14, ... b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ c) $\frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \frac{10}{8}, \ldots$

d) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{26}, \frac{1}{80}, \ldots$ e) 1, 0, −1, 2, −3, ... f) $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$

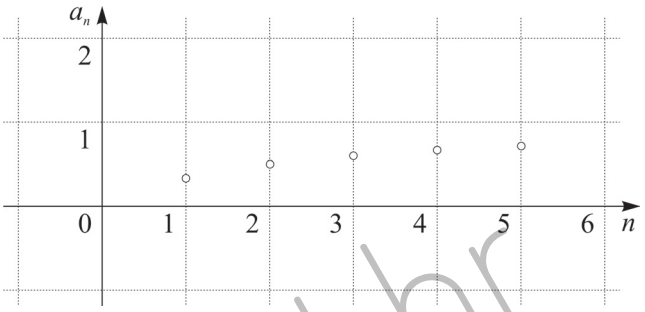
www.element.hr

4. Napišite n-ti član nizova zadanih grafički, ako je moguće.

a)



b)



5. Napišite n-ti član nizova zadanih opisno, ako je moguće.

a) niz prirodnih višekratnika broja 3,

b) niz parnih prirodnih brojeva,

c) niz kvadrata neparnih prirodnih brojeva,

d) niz prirodnih brojeva koji pri dijeljenju sa 6 daju ostatak 5.

www.element.hr

1.2. Aritmetički niz

PRIMJER 1

Damir počinje trčati i namjerava trčati svaki dan. S obzirom na to da dugo nije trčao započinje 15-minutnim trčanjem, drugi dan trčanje produžava 5 minuta, treći dan 10 minuta, četvrti 15 minuta i tako dalje. Koliko je minuta trčao peti, odnosno sedmi dan?

Ako je prvi dan pretrčao 2700 metara i svaki dan produžavao za istu udaljenost, a deseti dan pretrčao 10 800 metara, koliku je udaljenost pretrčao peti, odnosno sedmi dan?

Rješenje

Ovdje se radi o dva niza čiji članovi glase:

minute	15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60
udaljenost	2700, ……., 10800

U prvom nizu čitamo da je peti član 35, a sedmi 45 minuta ($a_5 = 35$, $a_7 = 45$), a u drugom da je prvi član 2700, a deseti 10 800 ($a_1 = 2\,00$, $a_{10} = 10\,800$).

Vidimo da se susjedni članovi prvoga niza razlikuju za 5, a u drugom nizu to ne znamo jer nemamo dva susjedna člana. Znamo da je između prvog i desetog člana preostalo još 8 članova.

$$a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \sim a_9 \sim a_{10}$$

Između svaka dva susjedna člana ista je razlika (u vremenu) i tih je razlika upravo 9 (prebrojite znakove). Jednostavnim računanjem možemo doći do traženog vremena

$$\sim = \frac{10800 - 2700}{9} = 900$$

Sada možemo ispisati sve članove drugog niza,

udaljenost 2700, 3600, 4500, 5400, 6300, 7200, 8100, 9000, 9900, 10 800

i vidimo da je peti član 6300, a sedmi 8100 ($a_5 = 6\,300$, $a_7 = 8\,100$), što znači da je Damir peti dan pretrčao udaljenost od 6300 m, a sedmi 8100 m.

Ova dva niza primjeri su aritmetičkog niza.

diferencija (lat. *differentia*) razlika, različnost; mat. razlika, dio za koji je neka veličina veća ili manja od druge

Niz (a_n) je **aritmetički niz** ako je razlika svaka dva uzastopna člana jednaka (konstanta).

$$a_2 - a_1 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$$

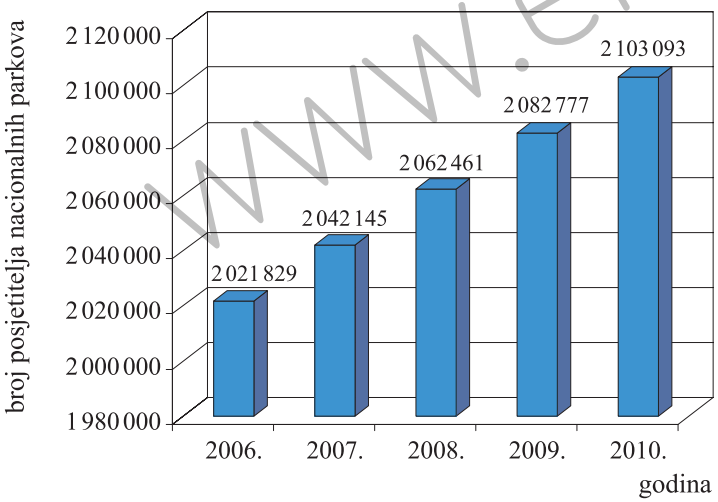
Taj broj nazivamo **razlika** (**diferencija**) i označavamo sa d.

aritmetički niz	**razlika**
1 076 865, 1 304 152, 1 531 439, 1 758 726, …	$d = 1\,304\,152 - 1\,076\,865 = 227\,287$
2, 6, 10, 14, 18, …	$d = 6 - 2 = 4$
–2, –7, –12, –17, …	$d = -7 - (-2) = -5$

Ako je poznat prvi član (a_1) i razlika (d) aritmetičkog niza, tada je niz zadan rekurzivnom formulom:

$$a_n = a_{n-1} + d.$$

Dodavanjem d bilo kojem članu, dobivamo sljedeći član.



PRIMJER 2

U posljednjih nekoliko godina broj posjetitelja naših nacionalnih parkova raste. Po podacima iz grafikona vidimo da taj broj iz godine u godinu raste. Usporedimo broj posjetitelja od 2006. do 2010. godine. Pokušajmo procijeniti koliko je posjetitelja bilo 2011. i 2012. godine.

www.element.hr

Nacionalni park Paklenica

Rješenje

Usporedimo li podatke za 2006. i 2007. godinu, vidimo da je 2007. bilo 20 316 posjetitelja više nego 2006.

godina	2006.	2007.	2008.	2009.	2010.
broj posjetitelja	2 021 829	2 042 145	2 062 461	2 082 777	2 103 093
razlika		20 316	20 316	20 316	20 316

Vidimo da je razlika ista za sve te godine. Zaključujemo da se radi o članovima aritmetičkog niza za koji vrijedi rekurzivna formula: $a_1 = 2\,021\,829$, $a_n = a_{n-1} + 20\,316$. Sudeći po danim podatcima, u 2011. godini nacionalne parkove obišlo je $2\,103\,093 + 20\,316 = 2\,123\,409$ posjetitelja, a 2012. godini $2\,123\,409 + 20\,316 = 2\,143\,725$ posjetitelja.

Možemo li aritmetički niz definirati koristeći samo prvi član niza i njegovu razliku? U ovom smo primjeru vrlo brzo prepoznali da je razlika aritmetičkog niza $d = 20\,316$, a prvi član je $a_1 = 2\,021\,829$.

Drugi član možemo dobiti upravo koristeći rekurzivnu formulu $a_2 = a_1 + 20\,316$.

Treći član niza dobivamo također koristeći rekurzivnu formulu $a_3 = a_2 + 20\,316$, gdje možemo umjesto a_2 pisati $a_2 = a_1 + 20\,316$, odnosno $a_3 = a_1 + 20\,316 + 20\,316 = a_1 + 2 \cdot 20\,316$.

Nastavljajući postupak, četvrti član glasio bi $a_4 = a_1 + 3 \cdot 20\,316$, a peti $a_5 = a_1 + 4 \cdot 20\,316$.

Općenito, zamijenimo li 20316 sa d, dobivamo:

prvi član	**drugi** član	**treći** član	**četvrti** član	**peti** član
a_1	$a_1 + d$	$a_1 + 2d$	$a_1 + 3d$	$a_1 + 4d$
a_1	$a_2 = a_1 + d$	$a_3 = a_1 + 2d$	$a_4 = a_1 + 3d$	$a_5 = a_1 + 4d$
	1 je za 1 manje od 2	2 je za 1 manje od 3	3 je za 1 manje od 4	4 je za 1 manje od 5

Sada više nije problem pronaći formulu za n-ti član aritmetičkog niza.

n-ti član

$$a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$n - 1$ je za 1 manje od n

Aritmetički niz određen je svojim prvim članom a_1 i razlikom d.

www.element.hr

Opći član aritmetičkog niza ima oblik
$$a_n = a_1 + (n-1)d\,.$$

PRIMJER 3

Odredite osmi član aritmetičkog niza kojemu je prvi član broj 4, a razlika je –7.

Rješenje

Formula za osmi član ovoga niza je

$$a_8 = 4 + (8-1)\cdot(-7) = 4 - 7\cdot 7 = 4 - 49 = -45\,.$$

Osmi član niza je broj –45, a to možemo provjeriti ispisujući redom prvih osam članova niza:

$$4,\ -3,\ -10,\ -17,\ -24,\ -31,\ -38,\ -45.$$

PRIMJER 4

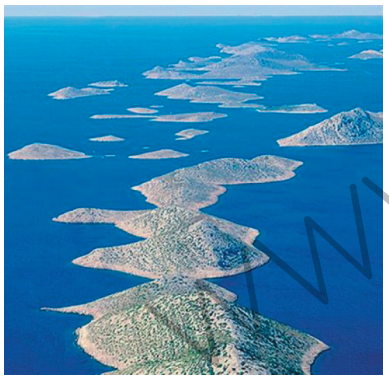
Odredimo prvi član aritmetičkog niza ako je drugi član 7, a sedmi 37.

Rješenje

Iz $a_2 = 7$ i $a_7 = 37$ slijedi: $a_1 + d = 7$ i $a_1 + 6d = 37$, sustav od dvije jednadžbe s nepoznanicama a_1 i d.

$$\begin{aligned} &a_1 + d = 7 \ /\cdot(-1)\\ &\underline{a_1 + 6d = 37}\\ &\left.\begin{aligned} -a_1 - d &= -7\\ a_1 + 6d &= 37 \end{aligned}\right\} +\\ &5d = 30 \ /:5\\ &d = 6 \ \Rightarrow a_1 + 6 = 7 \Rightarrow a_1 = 1 \end{aligned}$$

PRIMJER 5



Nacionalni park Kornati

Koliko je sveukupno posjetitelja bilo u nacionalnim parkovima? (Koristimo podatke iz Primjera 2.)

Rješenje

U ovom slučaju to nije problem izračunati jer promatramo razdoblje od samo 5 godina, ali što ako promatramo neko duže vremensko razdoblje? Članovi aritmetičkog niza imaju zanimljivo svojstvo koje ćemo sada prikazati.

Ispišimo zbrojeve članova našeg niza dva puta, prvo u redoslijedu kao što je zadan, a potom u obrnutom poretku, a zatim ih zbrojimo.

$$\begin{aligned} S &= 2\,021\,829 + 2\,042\,145 + 2\,062\,461 + 2\,082\,777 + 2\,103\,093\\ \underline{S &= 2\,103\,093 + 2\,082\,777 + 2\,062\,461 + 2\,042\,145 + 2\,021\,829}\\ 2S &= 4\,124\,922 + 4\,124\,922 + 4\,124\,922 + 4\,124\,922 + 4\,124\,922 \end{aligned}$$

Zbroj prvog i zadnjeg člana jednak je zbroju drugog i predzadnjeg člana, a to je jednako zbroju trećeg i trećeg člana od kraja. Takvih zbrojeva je pet.

www.element.hr

Dobili smo dvostruki zbroj članova niza.

$$2S = 5 \cdot 4\,124\,922 \,/ : 2$$

$$S = 10\,312\,305$$

Sveukupno je 10 312 305 posjetitelja bilo u nacionalnim parkovima.

Cijelu ovu situaciju možemo poopćiti. Želimo odrediti zbroj prvih n članova aritmetičkog niza i to ćemo učiniti kao i u prethodnom primjeru. Neka je S_n zbroj prvih n članova aritmetičkog niza.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$$

Zapišimo S_n na dva različita redoslijeda i zbrojimo

$$\begin{array}{rccccccc} S_n = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + \ldots\ldots + & a_n \\ S_n = & a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & + \ldots\ldots + & a_1 \end{array}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots + (a_1 + a_n).$$

Iz prošlog primjera znamo je zbroj prvog i zadnjeg člana jednak zbroju drugog i predzadnjeg člana, a to je jednako zbroju trećeg i trećeg člana od kraja. To možemo jednostavno pokazati.

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + d(1 + n - 2) = 2a_1 + (n-1)d$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_1 + (n-3)d = 2a_1 + d(2 + n - 3) = 2a_1 + (n-1)d$$

Analognim načinom možemo zaključiti da su zbrojevi i ostalih parova jednaki i sada možemo izvesti formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza.

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots\ldots\ldots + (a_1 + a_n)$$

Parova $(a_1 + a_n)$ ima koliko i članova samog niza, dakle n.

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) / : 2$$

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Ako umjesto $(a_1 + a_n)$ zapišemo $2a_1 + (n-1)d$, dobivamo još jednu formulu

$$S_n = \frac{n \cdot \left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2}.$$

Aritmetički niz znači da uvijek dodajemo ili oduzimamo isti broj, a zbrajanje i oduzimanje su dvije osnovne aritmetičke operacije.

Dobra stvar je što ako znamo da je skup brojeva aritmetički niz, znamo broj koji stalno dodajemo (ili oduzimamo), možemo pronaći bilo koji član niza, pa čak i zbroj svih članova niza.

Pogledajte sliku i odgovorite kolika je vrijednost trinaestog člana i koliki je zbroj prvih 13 članova ovoga niza.

Zbroj ili suma prvih n članova aritmetičkog niza, ako znamo prvi član i n-ti član niza, dan je formulom

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza, ako znamo prvi član i razliku d niza, dan je formulom

$$S_n = \frac{n \cdot \left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2}.$$

www.element.hr

PRIMJER 5

Izračunajmo zbroj prvih 100 neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje

Prvi član našeg niza je $a_1 = 1$, a razlika je $d = 2$. Koristit ćemo drugu formulu, uz $n = 100$

$$S_{100} = \frac{\cancel{100}^{50} \cdot \left[2 \cdot 1 + (100-1) \cdot 2\right]}{\cancel{2}^{1}} = 50 \cdot (2 + 198) = 10000 .$$

PRIMJER 6

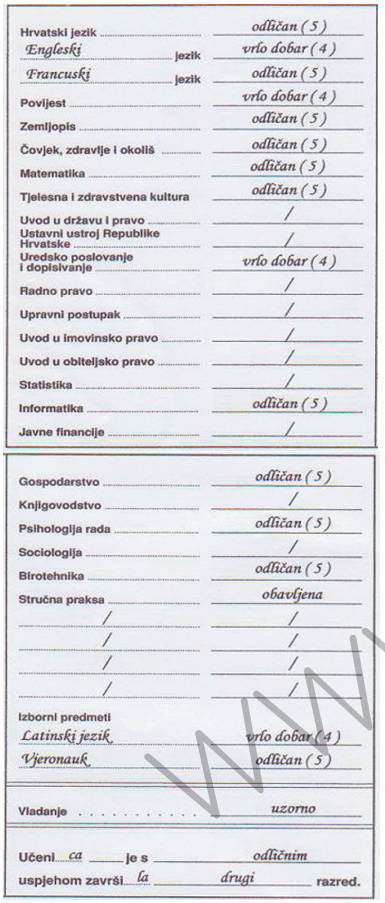
Izračunajmo zadnji član aritmetičkog niza ako je zbroj prvih 25 članova 1650, a prvi član je broj 6.

Rješenje

Uvrstimo li u prvu formulu zadane podatke $S_{25} = \frac{25 \cdot (6 + a_{25})}{2}$, dobit ćemo samo jednu nepoznanicu, a_{25}.

$$1650 = \frac{25 \cdot (6 + a_{25})}{2} \;/ \cdot 2$$
$$3300 = 25 \cdot (6 + a_{25}) \;/ : 25$$
$$132 = 6 + a_{25}$$
$$a_{25} = 126$$

Dvadeset i peti član zadanog niza je 126.



Hrvatski jezik	odličan (5)
Engleski jezik	vrlo dobar (4)
Francuski jezik	odličan (5)
Povijest	vrlo dobar (4)
Zemljopis	odličan (5)
Čovjek, zdravlje i okoliš	odličan (5)
Matematika	odličan (5)
Tjelesna i zdravstvena kultura	odličan (5)
Uvod u državu i pravo	/
Ustavni ustroj Republike Hrvatske	/
Uredsko poslovanje i dopisivanje	vrlo dobar (4)
Radno pravo	/
Upravni postupak	/
Uvod u imovinsko pravo	/
Uvod u obiteljsko pravo	/
Statistika	/
Informatika	odličan (5)
Javne financije	/
Gospodarstvo	odličan (5)
Knjigovodstvo	/
Psihologija rada	odličan (5)
Sociologija	/
Birotehnika	odličan (5)
Stručna praksa	obavljena
/	/
/	/
/	/
/	/
Izborni predmeti	
Latinski jezik	vrlo dobar (4)
Vjeronauk	odličan (5)
Vladanje	uzorno

Učeni ca je s odličnim uspjehom završi la drugi razred.

S kojim uspjehom je učenik/ca završio/la razred?

Aritmetički niz dobio je ime po **aritmetičkoj sredini**. Osnovno svojstvo tri uzastopna člana aritmetičkog niza je da je srednji od ta tri aritmetička sredina prethodnog i sljedećeg člana niza.

Ovo vrijedi iz:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$
$$2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$$
$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Zadatci za vježbu

1. Napišite prva četiri člana aritmetičkog niza, ako je:

a) $a_1 = 200,\ d = 20$,
b) $a_1 = 300,\ d = 50$,
c) $a_1 = -7,\ d = 4$,
d) $a_1 = 300,\ d = -90$,
e) $a_1 = \frac{5}{2},\ d = -\frac{1}{2}$,
f) $a_1 = \frac{3}{4},\ d = \frac{1}{4}$,
g) $a_n = a_{n-1} + 6,\ a_1 = -7$,
h) $a_n = a_{n-1} - 10,\ a_1 = 30$,
i) $a_n = a_{n-1} - 0.4,\ a_1 = 1.6$.

2. Odredite zadane članove aritmetičkog niza, ako je zadano:

a) $a_1 = 13,\ d = 4,\ a_6 = ?$
b) $a_1 = 7,\ d = 5,\ a_{50} = ?$
c) $a_1 = -40,\ d = 5,\ a_{200} = ?$
d) $a_1 = 35,\ d = -3,\ a_{60} = ?$

www.element.hr

3. Odredite formulu za opći član niza koji je zadan sljedećim podacima, a nakon toga izračunajte a_{20}.

a) 1, 5, 9, 13, ... b) 2, 7, 12, 17, ... c) 7, 3, –1, –5, ...

d) 6, 1, –4, –9, ... e) $a_1 = 9,\ d = 2$ f) $a_1 = -20,\ d = -4$

g) $a_n = a_{n-1} + 3,\ a_1 = 4$ h) $a_n = a_{n-1} - 10,\ a_1 = 30$

4. Odredite zbroj prvih dvadeset članova aritmetičkog niza: 7, 10, 16, 22, …

5. Odredite zbroj prvih pedeset članova aritmetičkog niza: –10, –6, –2, 2, …

6. Odredite zbroj prvih sto prirodnih brojeva.

7. Odredite zbroj prvih 60 neparnih prirodnih brojeva.

8. Odredite zbroj neparnih prirodnih brojeva između 21 i 45.

9. U nekom aritmetičkom nizu 200. član je broj 99, a 268. član je broj 167. Odredite 234. član toga niza. Odredite zbroj svih članova od 235. do 312. Zadanoga niza, tj. $a_{235} + a_{236} + \ldots + a_{312}$.

Odgovorite na pitanja

1. Što je niz? Opišite niz nekim primjerom.

2. Kako izgleda graf niza?

3. Što je rekurzivna formula?

4. Kupili ste novi auto za 24 000 €. Na kraju n-te godine vrijednost auta dana je formulom $a_n = 24\,000\left(\frac{3}{4}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Odredite a_5 i objasnite (napišite rečenicu) koje je značenje a_5 u ovom slučaju. Objasnite koje je značenje n u ovom slučaju.

5. Što je aritmetički niz? Objasnite na primjeru.

6. Što je razlika u aritmetičkom nizu?

7. Objasnite kako izračunati zbroj prvih n članova aritmetičkog niza bez zbrajanja svih tih članova niza.

8. Nečiju zaradu n godina nakon 2010. godine možemo opisati sa $a_n = 1\,472\,n + 29\,060$. Koristeći ovaj model, kolika će biti zarada 2033. godine?

Procijenite

1. Napišite prvih pet članova niza čiji je prvi član broj 9, zadanog

$$a_n = \begin{cases} \frac{a_{n-1}}{2}, & \text{za } n \text{ je paran broj} \\ 3a_{n-1} + 5, & \text{za } n \text{ je neparan broj.} \end{cases}$$

2. Neka je a_n n-ta znamenka iza decimalne točke broja $\sqrt{2}$. Napišite prvih 5 članova ovoga niza.

3. Opći član niza zadan je $a_n = 5n + 2$. Odredite rekurzivnu formulu ovoga niza.

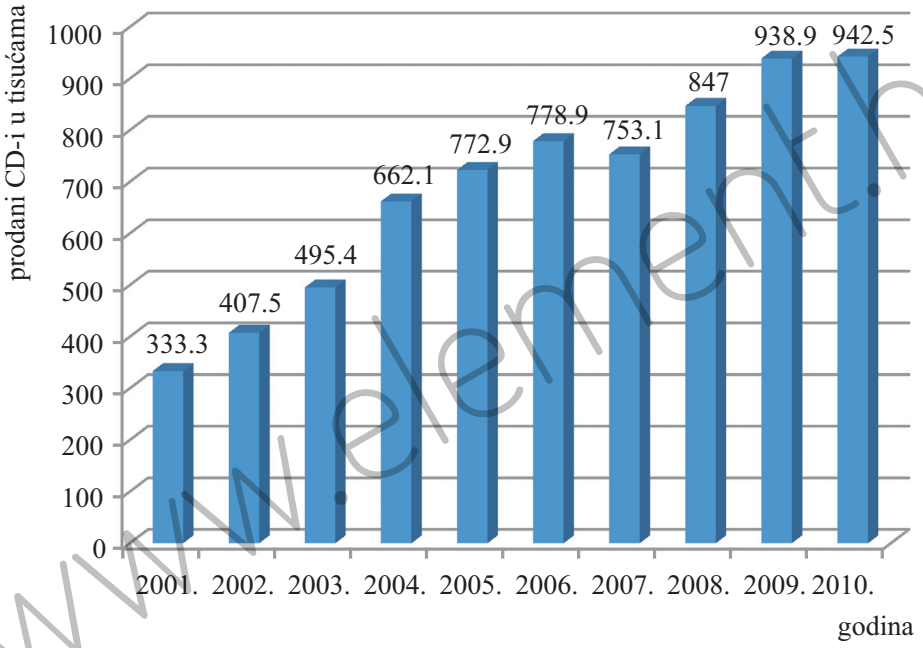
4. Dajte primjer dva različita aritmetička niza koji imaju broj 10 kao četvrti član.

5. U nizu 21 700, 23 172, 24 644, 26 116, … koji član po redu je broj 314 628?

www.element.hr

Modeliranje i rješavanje problema

1. Graf pokazuje broj prodanih CD-a u tisućama od 2001. do 2010. godine. Neka a_n predstavlja broj prodanih CD-a u n-toj godini, gdje $n = 1$ odgovara 2001. godini.



a) Kolika je vrijednost a_5? Koje značenje ima a_5?

b) Koliko je ukupno prodano CD-a od 2001. do 2010. godine?

c) Kako biste zapisali razliku dva susjedna člana niza zadana ovim grafom?

d) Koje je godine ta razlika bila najveća? Kolika je razlika?

e) Koje je godine ta razlika bila negativna?

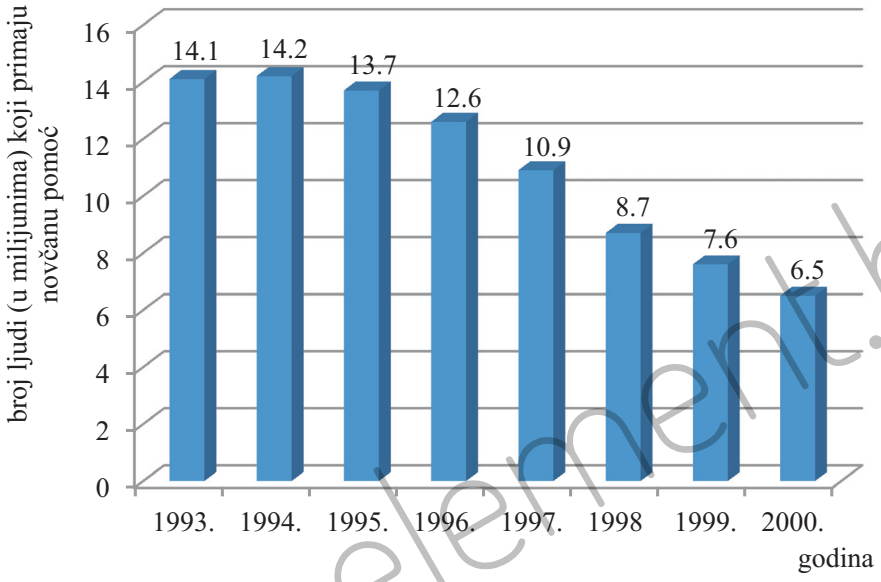
2. Depozit od 6000 kuna položen je na račun koji donosi kamatu od 6 % četiri puta godišnje (kvartalno). Stanje na računu nakon n kvartala dano je $a_n = 6000\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

a) Odredite stanje na računu nakon 5 godina. (Zaokružite na kune.)

b) Ako je netko položio novce na račun zato da bi uštedio za kupnju proizvoda čija je cijena na početku štednje bila 8000 kuna, a u međuvremenu je poskupio 2 %, ima li dovoljno novca za kupnju tog proizvoda?

www.element.hr

3. Graf pokazuje milijune građana SAD-a, korisnika socijalne pomoći koji primaju novčanu pomoć od 1993. godine.



a) Koliko je ukupno građana SAD-a primalo novčanu pomoć između 1993. i 2000. godine?

b) Ako je prvi član niza broj ljudi koji su 1993. godine primali novčanu pomoć, drugi član broj ljudi koji su 1994. godine primali novčanu pomoć i tako dalje redom, može li niz zadan formulom $a_n = -1.23n + 16.55$, gdje je $n = 1, 2, 3, \ldots, 8$ zamijeniti podatke s grafa? Koliki je zbroj prvih 8 članova ovoga niza? Kolika je razlika zbroja u zadatku a) i ovom zadatku?

4. Prema podatcima agencije za zaštitu okoliša, u 1960. godini u SAD-u je reciklirano 3.78 milijuna tona krutog otpada. Zahvaljujući ponajprije programima za reciklažu otpada, količina recikliranog krutog otpada povećana je za 0.576 milijuna tona na godinu.

a) Napišite formulu za opći član aritmetičkog niza koji modelira količinu recikliranog krutog otpada n godina nakon 1959. godine.

b) Kolika je ukupna količina recikliranog krutog otpada od 1960. godine do 2010. godine?

5. Tvrtka u kojoj se želite zaposliti nudi vam početnu mjesečnu plaću od 6500 kuna (za prvu godinu) s godišnjim povećanjem od 4200 kuna. Koliko ćete ukupno zaraditi ako se zaposlite u toj tvrtki i ostanete 10 godina?

6. Kazalište ima 30 sjedala (mjesta) u prvom redu, 32 sjedala u drugom i tako dalje po dva sjedala više u svakom sljedećem redu, a sveukupno je 26 redova. Koliko je sjedećih mjesta u kazalištu?

www.element.hr