I. OSNOVNI POJMOVI. PROJEKTIVITETI

1.

Točke i pravci ravnine. Incidencija.

Promotrimo li jednu ravninu (intuitivno), odmah uočimo dva skupa elemenata, koje nazivamo:

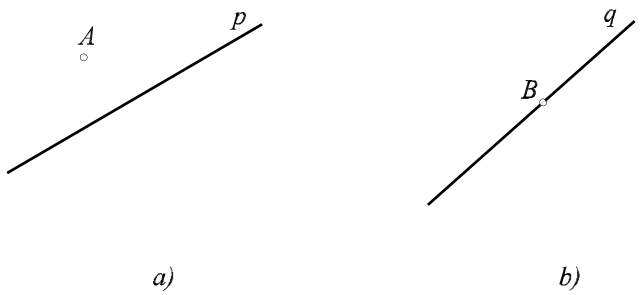
1) točke,

2) pravci.

Međusobni položaj dviju točaka može biti bilo kakav. Kažemo da je to *par različitih točaka*. Jedini izuzetak nastaje onda kada dvije točke padnu zajedno. Tada kažemo da se one *poklapaju* ili da su *incidentne*.

Pogledajmo sada kakve međusobne položaje mogu zauzeti jedna *točka* i jedan *pravac*.

a) Neki pravac p i točka A mogu najprije ležati u općem položaju. Kažemo da točka A ne leži na pravcu p ili da pravac p ne prolazi točkom A (sl. 1.1a) ili da točka A i pravac p nisu incidentni.

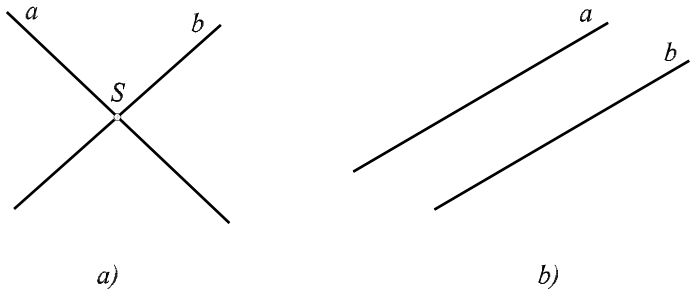


Sl. 1.1.

b) Točka B može ležati na pravcu q. Sada kažemo da točka B leži na pravcu q ili da pravac q prolazi točkom B; ili da su točka B i pravac q incidentni (sl. 1.1b).

Dva pravca mogu imati sljedeće međusobne položaje:

a) *pravci* a *i* b *sijeku se* u jednoj točki S. Točka S, dakle, leži na oba pravca. Tu točku zovemo *sjecište* S pravaca a i b, dok za ta dva pravca kažemo da se *sijeku* (sl. 1.2a).



Sl. 1.2.

b) Dva pravca a i b, koji su međusobno paralelni, nemaju niti jedne zajedničke točke, tj. one koja leži na jednom i na drugom pravcu (sl. 1.2b).

Promotrimo dalje neki pravac a. Lako se vidi da postoji beskonačno mnogo različitih točaka koje su incidentne s pravcem a (one, dakle, leže na pravcu a). *Skup svih takvih točaka koje su incidentne s nekim pravcem* a *zovemo nizom točaka* na pravcu a kao *nosiocem* tog niza. Takav niz točaka označavamo s (a).

Analogno tome skup svih pravaca koji su incidentni s jednom točkom A (prolaze kroz točku A) zovemo *pramenom pravaca* i takav pramen pravaca označavamo s (A). Točku A zovemo *vrhom* A pramena pravaca.

2.

Perspektiviteti

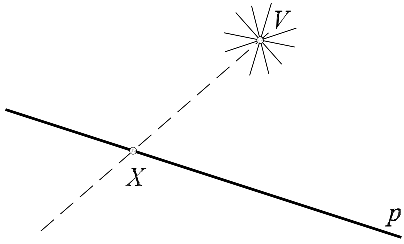
Neka je u ravnini dan niz točaka (p) na nosiocu p i pramen pravaca (V) s vrhom u točki V, ali tako da točka V ne leži na pravcu p. Pramen pravaca (V) možemo shvatiti kao skup svih spojnica točaka niza (p) s vrhom V.

Definirajmo sada preslikavanje skupa točaka niza (p) i skupa pravaca pramena (V), tako da bilo kojoj točki X niza (p) pridružimo onaj pravac pramena (V) koji prolazi tom točkom i obrnuto.

Pođimo od niza (p) i konstruirajmo na taj način pridruženi pramen (V). Tada kažemo da je (V) *spojni pramen niza* (p).

Obrnuto, ako pođemo od pramena (V), pa tom pramenu pridružimo na obrnuti način niz (p), tada kažemo da je (p) *presječni niz pramena* (V).

Ovdje moramo napomenuti da u pojam “spojni pramen”, odnosno “presječni niz” nisu uključene samo figure (p) i (V), nego i preslikavanje koje vezuje te dvije figure.



Sl. 2.1.

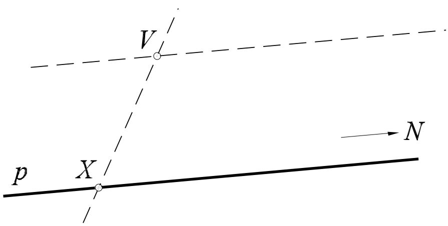
Pogledajmo sada dalje jedan niz točaka (p) i pramen pravaca (V). Ovdje je, kako smo rekli, nekoj točki X pravca p pridružena spojnica XV

te točke V i pravca p (sl. 2.1). Kako se vidi, za svaku točku X pravca p postoji točno jedna spojnica XV (kao pravac pramena).

No ako pođemo obrnuto od jednog pravca x pramena (V), tada se pravac x preslika u svoje sjecište X sa pravcem p. Ovdje se opet lako vidi da svaki pravac x pramena (V) ima sjecište X s pravcem p. Jedina iznimka je pravac q, koji je paralelan s pravcem p. Vidimo, dakle, da opisano preslikavanje *nije bijektivno*.

Niz točaka (p) nekog pravca p možemo definirati i ovako:

skup točaka niza (p) možemo shvatiti tako kao da se sastoji od svih točaka koje leže na pravcu p; i kojemu pridodamo još jednu točku N. Tu točku N možemo predočiti kao *sjecište* pravca u pramenu (V), koji je paralelan s pravcem p (sl. 2.2). Tu točku N zvat ćemo *nepravom točkom* ili *neizmjerno dalekom točkom* pravca p.



Sl. 2.2.

Ako imamo na umu ovako definiran niz točaka (p), onda opisano preslikavanje pravca pramena (V) i točaka niza (p) možemo smatrati *bijekcijom*.

Iz ovog razmatranja odmah dalje slijedi da svaki pravac ravnine ima jednu nepravu točku. Skup svih međusobno paralelnih pravaca ima *istu* nepravu točku. Oni, dakle, svi prolaze istom nepravom točkom i čine skup pravaca koji smo nazvali *pramenom paralelnih pravaca* (vrh N).

Dalje se lako može zaključiti da u elementarnoj ravnini proširenoj na opisani način na svakom pravcu postoji po jedna neprava točka. U takvoj ravnini postoji, dakle, beskonačno mnogo nepravnih (odnosno beskonačno dalekih) točaka, koje opet sve leže na *nepravom* ili *beskonačno dalekom pravcu* te ravnine.

Elementarnu ravninu ovako proširenu nepravnim elementima zovemo *projektivnom ravninom*.

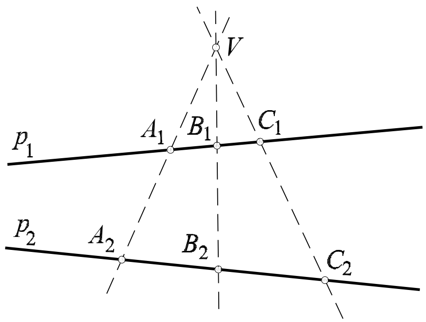
Definicija 2.1. Ovako opisano bijektivno preslikavanje niza točaka i pramena pravaca u projektivnoj ravnini zovemo *perspektivitetom*.

Definirajmo dalje:

Definicija 2.2. Dva su niza,

$$(p_1) = \{A_1, B_1, C_1, \ldots\} \quad \text{i} \quad (p_2) = \{A_2, B_2, C_2, \ldots\}$$

na različitim nosiocima p_1 i p_2 perspektivna s obzirom na centar perspektiviteta V, točno onda kada im sve spojnice parova pridruženih točaka prolaze točkom V.



Sl. 2.3.

Drugim riječima: dva su niza perspektivna ako su oni presječni nizovi jednog te istog pramena pravca (sl. 2.3).

3.

Dualnost

Dalje ćemo ukratko opisati jedno istaknuto svojstvo projektivne ravnine, što će nam uvelike pomoći pri daljnjem izlaganju.

Promotrimo dvije tvrdnje, T_1 i T_2:

T_1	T_2
Postoji točno jedan pravac incidentan s dvjema različitim točkama A i B.	Postoji točno jedna točka incidentna sa dvama različitim pravcima a i b.

Lako se vidi da tvrdnju T_2 dobijemo ako u tvrdnji T_1 izmijenimo ove riječi:

točka → pravac
pravac → točka,

dok riječ incidencija ostavimo nepromijenjenu. Pritom se umjesto tom riječju možemo poslužiti s

prolazi kroz → leži na
leži na → prolazi kroz

ili možda sa

spajanje → sječenje,
sječenje → spajanje.

Ovim postupkom smo iz istinite tvrdnje T_1 dobili opet istinitu tvrdnju T_2. Za takve dvije tvrdnje kažemo da su *dualne tvrdnje*.

Može se dokazati

princip dualnosti projektivne ravnine: *zamijenimo li u nekoj valjanoj izreci (teoremu) projektivne geometrije ravnine, pojam točka dualnim* *pojmom pravac i obrnuto, a pojam incidencije ostavimo nepromijenjen, opet dobijemo neku valjanu izreku (teorem) projektivne geometrije ravnine. Za takve dvije izreke kažemo da su međusobno dualne izreke.*

Ovdje ćemo dalje navesti jednu nama potrebnu definiciju, kao dualnu definiciju 2.3.

Definicija 3.1. Dva pramena pravaca

$$(V_1) = \{a_1, b_1, c_1, \ldots\} \quad \text{i} \quad (V_2) = \{a_2, b_2, c_2, \ldots\}$$

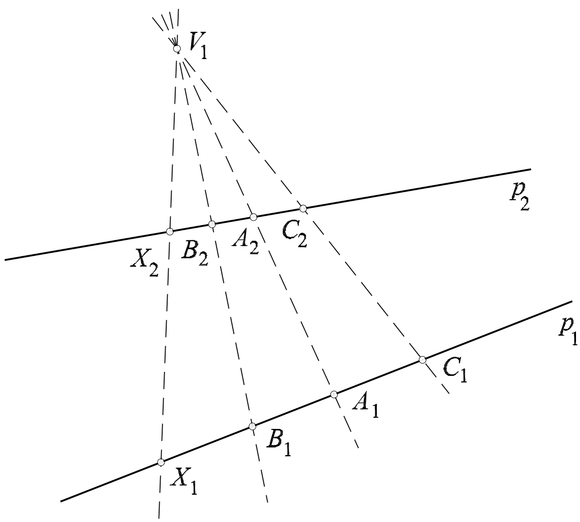
s različitim vrhovima V_1 i V_2 su perspektivna s obzirom na os p ako im se parovi pridruženih pravaca sijeku u točkama nekog niza (p) koji zovemo *os* perspektiviteta.

Drugim riječima, dva su pramena pravaca perspektivno pridružena ako su oni spojeni pramenovi jednog te istog niza (p).

4.

Projektiviteti

Već smo prije (definicija 2.2) opisali perspektivitet dvaju nizova točaka (p_1) i (p_2) pomoću presječnih nizova istog pramena (V_1). Pritom je nekoj točki X_1 niza (p_1) bila pridružena ona točka X_2 niza (p_2) koja s točkom X_1 leži na istom pravcu pramena (V_2) (sl. 4.1).



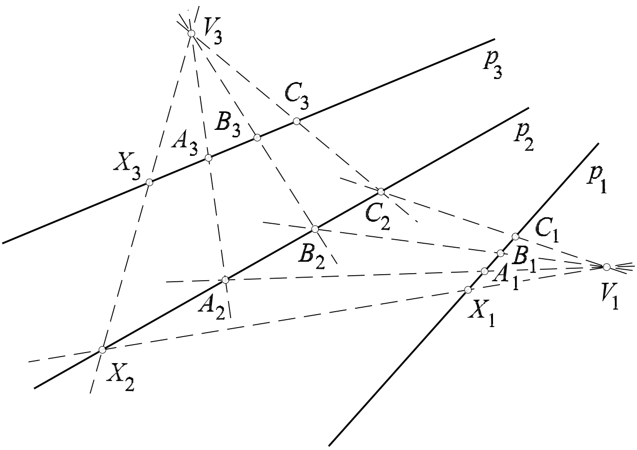
Sl. 4.1.

Tada kažemo da su nizovi (p_1) i (p_2) *perspektivni* s centrom perspektiviteta V_1, što označavamo sa

$$(p_1) \overset{V_1}{\underset{\wedge}{=}} (p_2).$$

Ako sada za niz (p_2) konstruiramo spojni pramen (V_2) i tom pramenu presječni niz (p_3), tada su očito nizovi (p_2) i (p_3) također perspektivni (sl. 4.2),

$$(p_2) \overset{V_2}{\overline{\overline{\wedge}}} (p_3).$$



Sl. 4.2.

Za nizove (p_1) i (p_3) time smo definirali određenu bijekciju (što više nije perspektivitet), tj. vrijedi

$$(p_1) \overline{\wedge} (p_3),$$

što se lako vidi.

Nastavljanjem tog istog postupka (to jest nizanjem daljnjih perspektiviteta) dobivamo lanac perspektiviteta

$$(p_1) \overset{V_1}{\overline{\overline{\wedge}}} (p_2) \overset{V_2}{\overline{\overline{\wedge}}} (p_3) \overset{V_3}{\overline{\overline{\wedge}}} \dots \overset{V_{n-1}}{\overline{\overline{\wedge}}} (p_n).$$

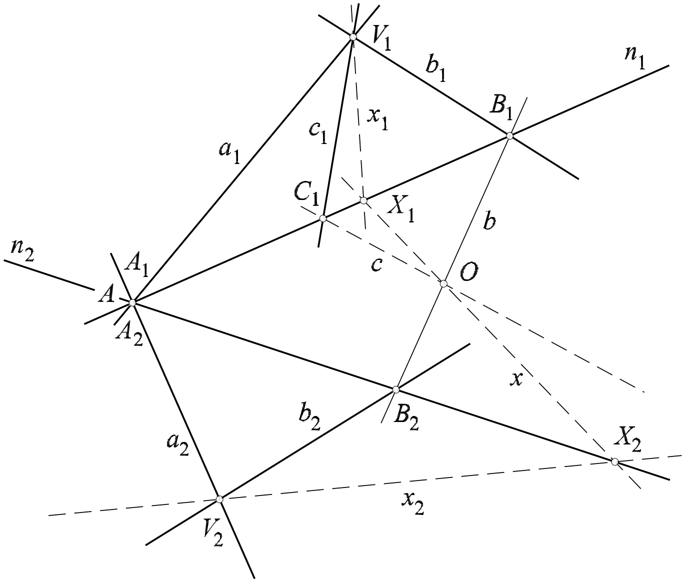
Ovdje možemo koristiti konačno mnogo karika (perspektiviteta) u tom lancu.

Takav lanac perspektiviteta definira nam među nizovima (p_1) i (p_n) jednu određenu bijekciju.

Definicija 4.1. Bijekciju nizova (p_1) i (p_n), koju možemo prikazati kao lanac od konačno mnogo perspektiviteta, zovemo *projektivitetom*, što označavamo

$$(p_1) \overline{\wedge} (p_n).$$

Neki pravac x_1 pramena (V_1) siječe pravac n_1 u točki X_1. Toj točki pridružena je perspektivitetom $(n_1) \overset{O}{\overline{\wedge}} (n_2)$ točka X_2. Sada je spojnica V_2X_2 očito pridružena pravcu x_1 (V_1X_1).



Sl. 4.3.

Na taj način možemo konstruirati po volji velik broj parova V_1X_1 i V_2X_2 pridruženih pravaca projektiviteta $(V_1) \overline{\wedge} (V_2)$.

Riješimo dalje još jedan zadatak koji je zapravo dualan prethodnom.

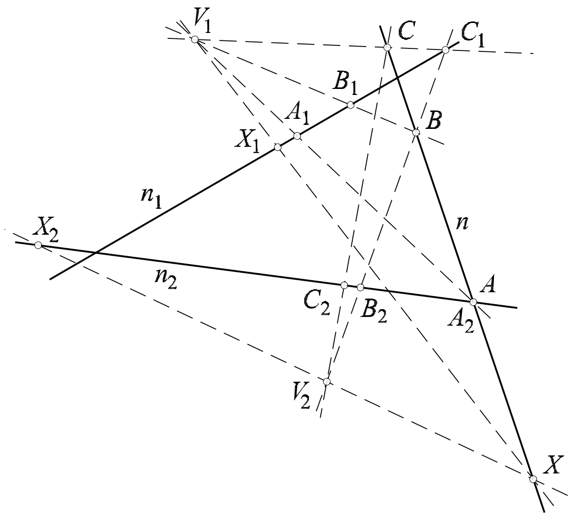
Zadatak 4.2. Zadan je projektivitet $(n_1) \overline{\wedge} (n_2)$ dvaju nizova s nosiocima n_1 i n_2 i s trima parovima pridruženih točaka

$$\{A_1, B_1, C_1\} \overline{\wedge} \{A_2, B_2, C_2\}.$$

Za neku po volji odabranu točku X_1 niza (n_1) treba konstruirati pridruženu točku X_2 niza (n_2).

Rješenje. Na pravcu n_1 zadane su tri različite točke, A_1, B_1, C_1 te na pravcu n_2 (različitom od n_1) točke A_2, B_2, C_2 (sl. 4.4). S takvim trima parovima pridruženih točaka A_1, A_2, zatim B_1, B_2, te C_1, C_2 određen je projektivitet $(n_1) \overline{\wedge} (n_2)$.

Na spojnici jednog para pridruženih točaka (na primjer na spojnici A_1A_2) uzmimo točku V_1 različitu od A_1 i A_2 i kroz A_2 položimo pravac n različit od n_2 i A_1A_2. Projicirajmo zatim niz n_1 na niz (n) iz točke V_1. Očito su sada nizovi (n_1) i (n) perspektivni sa centrom perspektiviteta u točki V_1.



Sl. 4.4.

Isto tako se lako vidi da su nizovi (n) i (n_2) također perspektivni sa centrom u točki V_2 (sjecište spojnice BB_1 i CC_1).

Ako hoćemo neku točku X_1 pravca n_1 preslikati projektivitetom $(n_1)\,\overline{\wedge}\,(n_2)$ na pravac n_2, najprije moramo točku X_1 projicirati iz centra V_1 na pravac n u točku X i zatim tu točku X projicirati iz centra V_2 na točku X_2 na pravcu n_2, čime je problem konstrukcije projektivno pridruženih točaka riješen.