

1 Korijeni

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

1.1. Drugi i treći korijen realnog broja

Zadatak 1. Izračunaj bez uporabe džepnog računala:

$$\begin{array}{ll} 1) 0.5 \cdot \sqrt{0.04} + \frac{1}{6}\sqrt{144}; & 2) \frac{1}{2}\sqrt{196} + 1.5 \cdot \sqrt{0.36}; \\ 3) \frac{3}{4}\sqrt{2.56} - 1.2 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}}; & 4) \frac{2}{3}\sqrt{0.81} + 4 \cdot \sqrt{1.21}. \end{array}$$

Rješenje.

$$\begin{array}{l} 1) 0.5 \cdot \sqrt{0.04} + \frac{1}{6}\sqrt{144} = 0.5 \cdot 0.2 + \frac{1}{6} \cdot 12 = 2.1; \\ 2) \frac{1}{2}\sqrt{196} + 1.5 \cdot \sqrt{0.36} = \frac{1}{2} \cdot 14 + 1.5 \cdot 0.6 = 7 + 0.9 = 7.9; \\ 3) \frac{3}{4}\sqrt{2.56} - 1.2 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot 1.6 - 1.2 \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} = 1.2 - 1.2 \cdot \frac{3}{2} = 0.3 - 0.9 = -0.6; \\ 4) \frac{2}{3}\sqrt{0.81} + 4 \cdot \sqrt{1.21} = \frac{2}{3} \cdot 0.9 + 4 \cdot 1.1 = 2 \cdot 0.3 + 4.4 = 5. \end{array}$$

Zadatak 2. Između koja se dva uzastopna cijela broja nalazi broj

$$1) \sqrt{15}; \quad 2) \sqrt{200}; \quad 3) \sqrt{0.8}; \quad 4) \sqrt{990}?$$

Rješenje.

1) Kako je $3^2 = 9 < 15 < 16 = 4^2$, broj $\sqrt{15}$ nalazi se između 3 i 4;
 2) Kako je $14^2 = 196 < 200 < 225 = 15^2$, broj $\sqrt{200}$ nalazi se između 14 i 15;
 3) Kako je $0 < 0.8 < 1$, broj $\sqrt{0.8}$ nalazi se između 0 i 1;
 4) Kako je $31^2 = 961 < 990 < 1024 = 32^2$, broj $\sqrt{990}$ nalazi se između 31 i 32.

Zadatak 3. Provjeri jednakosti:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}; & 2) \sqrt{2} - 1 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}; \\ 3) 2 - \sqrt{3} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}. \end{array}$$

Rješenje.

$$\begin{array}{l} 1) \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}; \\ 2) \sqrt{2} - 1 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2 - 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}; \\ 3) 2 - \sqrt{3} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}. \end{array}$$

Zadatak 4. Izračunaj:

$$\begin{array}{l} 1) \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}; \\ 2) \sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})^2}. \end{array}$$

Rješenje.

$$\begin{array}{l} 1) \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} \\ = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= |1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{3} - \sqrt{2}| + |2 - \sqrt{3}| \\
 &\text{(zbog } 1 < \sqrt{2}, \sqrt{3} > \sqrt{2} \text{ i } 2 > \sqrt{3}\text{)} \\
 &= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} = 1; \\
 2) \quad &\sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2} \\
 &= |3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}| + |3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}| \\
 &= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Zadatak 5. Za koje realne brojeve x vrijedi:

- 1) $\sqrt{(2x-1)^2} = 2x-1$; 2) $\sqrt{(x+2)^2} = -x-2$;
 3) $\sqrt{(3-4x)^2} = 4x-3$; 4) $\sqrt{x^2-6x+9} = 3-x$;
 5) $\sqrt{9x^2-12x+16} = 3x-4$; 6) $\sqrt{4x^2-4x+1} = 1-2x$?

- Rješenje.**
- 1) Mora vrijediti $2x-1 \geq 0$, tj. $x \geq \frac{1}{2}$;
 2) Mora vrijediti $-x-2 \geq 0$, tj. $x \leq -2$;
 3) Mora vrijediti $4x-3 \geq 0$, tj. $x \geq \frac{3}{4}$;
 4) $\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2}$. Mora vrijediti $3-x \geq 0$, tj. $x \leq 3$;
 5) $\sqrt{9x^2-12x+16} = \sqrt{(3x-4)^2}$. Mora vrijediti $3x-4 \geq 0$, tj. $x \geq \frac{4}{3}$;
 6) $\sqrt{4x^2-4x+1} = \sqrt{(2x-1)^2}$. Mora vrijediti $1-2x \geq 0$, tj. $x \leq \frac{1}{2}$.

Zadatak 6. Koliko je:

- 1) $\sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2+4x+4}$, za $-2 \leq x \leq 1$;
 2) $\sqrt{4x^2-4x+1} - \sqrt{x^2+2x+1}$, za $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$;
 3) $\sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2-2x+1}$, za $2 \leq x \leq 3$?

- Rješenje.**
- 1) $f(x) = \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x+2)^2} = |x-1| - |x+2|$, za $-2 \leq x \leq 1$ je
 $f(x) = -x+1 - x-2 = -2x-1$;
 2) $f(x) = \sqrt{(2x-1)^2} - \sqrt{(x+1)^2} = |2x-1| - |x+1| = -2x+1 - x-1$
 $= -3x$, za $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$;
 3) $f(x) = \sqrt{(x-3)^2} - \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(x-1)^2} = |x-3| - |x-2| - |x-1|$
 $= -x+3 - x+2 - x+1 = -3x+6$, za $2 \leq x \leq 3$.

Zadatak 7. Duljine kateta pravokutnog trokuta jednake su 11 cm i 19 cm. Kolika je duljina hipotenuze?

- Rješenje.** Iz Pitagorina poučka slijedi da je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta jednaka drugom korijenu od zbroja kvadrata duljina kateta: $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{11^2+19^2} = \sqrt{121+361} = \sqrt{482} \approx 21.95$.

Zadatak 8. Duljine hipotenuze i jedne katete pravokutnog trokuta jednake su 27 cm i 17 cm. Kolika je duljina druge katete?

Rješenje. Označimo li drugu katetu sa b , iz Pitagorina poučka slijedi: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{27^2 - 17^2} = \sqrt{729 - 289} = \sqrt{440} \approx 20.98$.

Zadatak 9. Nožište visine na hipotenuzu pravokutnog trokuta dijeli hipotenuzu na dva dijela duljina 18 cm i 8 cm. Kolika je duljina visine?

Rješenje. Prisjetimo se Euklidova poučka. Označimo li dva dijela hipotenuze sa p i q vrijedi: $v = \sqrt{pq}$. Tada je $v = \sqrt{18 \cdot 8} = \sqrt{144} = 12$.

Zadatak 10. Površina kruga iznosi 330π cm². Koliki je opseg ovog kruga?

Rješenje. Površina kruga računa se po formuli $P = r^2\pi$ odakle je $r = \sqrt{\frac{P}{\pi}} = \sqrt{\frac{330}{\pi}} \approx \sqrt{105.04} \approx 10.25$ cm. Sada se lako izračuna opseg kruga: $O = 2r\pi = 64.4$ cm.

Zadatak 11. Koliko će vremena trajati slobodni pad kamenčića ispuštenog s visine 50 metara?

Rješenje. Slobodni pad je jednoliko ubrzano gibanje s ubrzanjem $g = 9.81$ m/s² i vrijedi $s = \frac{at^2}{2}$. Odatle slijedi da je $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{9.81}} \approx \sqrt{10.19} \approx 3.19$ s.

Zadatak 12. Površina trokuta kojem su duljine stranica jednake a , b i c računa se po Heronovoj formuli $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je s polovina opsega trokuta. Izračunaj površinu trokuta kojem su duljine stranica jednake

- 1) $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm;
- 2) $a = 1.1$ dm, $b = 1.3$ dm, $c = 2$ dm.

Rješenje. Zadane podatke uvrstimo u Heronovu formulu za površinu trokuta:

$$1) s = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21, P = \sqrt{21(21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)} = 84 \text{ cm}^2; \quad 2) s = \frac{1.1 + 1.3 + 2}{2} = 2.2, P = \sqrt{2.2(2.2 - 1.1)(2.2 - 1.3)(2.2 - 2)} = 0.66 \text{ dm}^2.$$

Zadatak 13. Skok s visoke litice (engl. *cliff diving*) jedan je od adrenalinskih sportova. Među popularnijim natjecanjima u ovom sportu je i skok sa starog mosta u Mostaru.



Skače se s visine od 27 metara. Na internetu nalazimo podatak da skok traje 3 sekunde te da skakač pri ulasku u vodu doseže brzinu od 90 km/h. Jesu li ti podatci vjerodostojni?

Rješenje. Ako bi to bio slobodni pad, tada bismo imali $t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \approx 2.35$ s.

Također je $v^2 = 2gs$ pa slijedi $v = 23$ m/s = 82.8 km/h.

Zadatak 14. U meteorologiji se rabe baloni kako bi se pratile razne pojave u troposferi. Takvi baloni uzdižu se do visine od 30 km. Koliki je polumjer kružnice koja je granica područja koje "pokriva" jedan takav balon s visine 25 km?

Rješenje. Koristimo formulu $d \approx 3.856\sqrt{h}$ pri čemu je h visina izražena u metrima, a d polumjer tražene kružnice izražen u kilometrima. Vrijedi $d \approx 3.856\sqrt{25\,000} \approx 609.69$.

Zadatak 15. Prva kozmička brzina je brzina kojom se giba satelit po kružnoj stazi oko nekog nebeskog tijela. Računa se po formuli $v = \sqrt{\frac{G \cdot m}{r}}$, gdje je G gravitacijska konstanta, m masa tijela oko kojeg se satelit giba, r polumjer kružne staze. Za Zemlju je $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$, $m = 6 \cdot 10^{24}$ kg te $r = 6400$ km. Prva kozmička brzina za Zemlju iznosi približno 7.91 km/s. Provjeri ovaj podatak.

Rješenje. Prije nego uvrstimo podatke u formulu iskoristimo $N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ i $\text{m}^3 = 10^{-9} \text{km}^3$. Sad je $v = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 10^{-9} \text{km}^3 \text{kg}^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{kg}}{6400 \text{km}}}$
 $= \sqrt{\frac{40.02 \cdot 10^4 \text{km}^2 \text{s}^{-2}}{6400}} = \sqrt{62.53 \text{km}^2 \text{s}^{-2}} = 7.91 \text{km/s}$. Dakle, podatak je točan.

Zadatak 16. Provjeri i obrazloži:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1) $\sqrt[3]{1331} = 11$; | 2) $\sqrt[3]{512} = 8$; |
| 3) $\sqrt[3]{0.125} = \frac{1}{2}$; | 4) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}} = \frac{5}{6}$; |
| 5) $\sqrt[3]{0.001} = 0.1$; | 6) $\sqrt[3]{3.375} = 1.5$. |

Rješenje. 1) $\sqrt[3]{1331} = \sqrt[3]{11^3} = 11$; 2) $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8^3} = 8$;
 3) $\sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{0.5^3} = 0.5 = \frac{1}{2}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{5}{6}$;
 5) $\sqrt[3]{0.001} = \sqrt[3]{0.1^3} = 0.1$; 6) $\sqrt[3]{3.375} = \sqrt[3]{1.5^3} = 1.5$.

Zadatak 17. Uz uporabu tablice trećih potencija odredi

- | | | |
|----------------------------------|------------------------|---------------------------------|
| 1) $\sqrt[3]{729}$; | 2) $\sqrt[3]{8000}$; | 3) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$; |
| 4) $\sqrt[3]{\frac{1}{0.001}}$; | 5) $\sqrt[3]{1.728}$. | |

Rješenje. 1) $\sqrt[3]{729} = 9$; 2) $\sqrt[3]{8000} = 20$; 3) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$;

$$4) \sqrt[3]{\frac{1}{0.001}} = \sqrt[3]{1000} = 10; \quad 5) \sqrt[3]{1.728} = 1.2.$$

Zadatak 18. Između koja se dva uzastopna cijela broja nalazi broj

$$1) \sqrt[3]{25}; \quad 2) \sqrt[3]{250}; \quad 3) \sqrt[3]{2500}.$$

Rješenje. 1) $2 < \sqrt[3]{25} < 3$ jer je $8 < 25 < 27$;
 2) $6 < \sqrt[3]{250} < 7$ jer je $216 < 250 < 343$;
 3) $13 < \sqrt[3]{2500} < 14$ jer je $2197 < 2500 < 2744$.

Zadatak 19. Izračunaj:

$$1) \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{27}; \quad 2) \sqrt[3]{-216} - \sqrt[3]{-343};$$

$$3) \sqrt[3]{0.001} \cdot \sqrt[3]{-0.125}; \quad 4) \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{-1331}}.$$

Rješenje. 1) $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{27} = -3 + 3 = 0$;
 2) $\sqrt[3]{-216} - \sqrt[3]{-343} = -6 - (-7) = -6 + 7 = 1$;
 3) $\sqrt[3]{0.001} \cdot \sqrt[3]{-0.125} = 0.1 \cdot (-0.5) = -0.05$;
 4) $\frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{-1331}} = -\frac{9}{11}$.

Zadatak 20. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{8x}} + \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{4x}}$$

za $x = 2$.

Rješenje. Za $x = 2$ vrijednost brojevnog izraza $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{8x}} + \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{4x}}$ jednaka je 4 jer je $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{8 \cdot 2}} + \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot 2}} = \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{16}} + \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} + \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$.

Zadatak 21. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{9x}} - \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{3x}}$$

za $x = 3$.

Rješenje. Za $x = 3$ vrijednost brojevnog izraza $\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{9x}} - \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{3x}}$ iznosi 0 jer je $\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot 3}} - \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{3 \cdot 3}} = \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{27}} - \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{9}} = \sqrt{3 \cdot 3} - \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt{9} - \sqrt[3]{27} = 3 - 3 = 0$.

Zadatak 22. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\sqrt[3]{0.01 \cdot \sqrt{0.1x}} + \sqrt{0.01 \cdot \sqrt[3]{10x}}$$

za $x = 0.1$.

Rješenje. Za $x = 0.1$ vrijednost brojevnog izraza $\sqrt[3]{0.01 \cdot \sqrt{0.1x}} + \sqrt{0.01 \cdot \sqrt[3]{10x}}$ iznosi 0.2 jer je $\sqrt[3]{0.01 \cdot \sqrt{0.1 \cdot 0.1}} + \sqrt{0.01 \cdot \sqrt[3]{10 \cdot 0.1}} = \sqrt[3]{0.01 \cdot 0.1} + \sqrt{0.01 \cdot 1} = \sqrt[3]{0.001} + \sqrt{0.01} = 0.1 + 0.1 = 0.2$.

Zadatak 23. Obujam kugle čiji je polumjer jednak R računa se po formuli $V = \frac{4}{3}R^3\pi$. Gustoća zlata je 19.3 g/cm^3 . Ako je masa zlatne kuglice 10 g, koliki je njezin polumjer?

Rješenje. Vrijedi $\rho = \frac{m}{V}$, a odatle slijedi $19.3 = \frac{10}{V}$ te je $V = \frac{10}{19.3} = 0.52 = \frac{4}{3}R^3\pi$. Slijedi $R = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0.52}{4\pi}} \approx \sqrt[3]{0.12} \approx 0.5 \text{ cm}$. Polumjer kuglice iznosi 5 mm.

Zadatak 24. Stotinu olovnih kuglica promjera 1 mm pretopimo i oblikujemo u jednu veću kuglu. Koliki je polumjer te veće kugle?

Rješenje. Obujam jedne kuglice iznosi $V_1 = \frac{4}{3}R_1^3\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \text{ mm}^3$. Kad se pretopi stotinu takvih kuglica, obujam veće kugle jednak je $V = 100 \cdot V_1 = 100 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \text{ mm}^3$. Dakle, $100 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{4}{3}R^3\pi$, odakle je $R^3 = 100 \text{ mm}^3$ tj. $R = \sqrt[3]{100} = 4.64 \text{ mm}$.

Zadatak 25. Ako je površina jedne strane kocke 20 cm^2 , koliki je obujam kocke?

Rješenje. Iz $a^2 = 20 \text{ cm}^2$ slijedi da je $a = \sqrt{20} \approx 4.4721 \text{ cm}$, tj. $V = a^3 = 4.4721^3 = 89.44 \text{ cm}^3$.

Zadatak 26. Ako je obujam kocke 20 cm^3 , koliko je njezino oplošje?

Rješenje. Iz $a = \sqrt[3]{V}$ slijedi $a = \sqrt[3]{20} = 2.7144 \text{ cm}$, odnosno oplošje je $O = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 2.7144^2 \approx 44.21 \text{ cm}^2$.

Zadatak 27. Sve strane trostrane piramide sukladni su jednakostranični trokuti. Obujam V takve piramide jednak je $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ gdje je a duljina njezina brida. Ako je obujam piramide 1 dm^3 , kolika je duljina njezina brida?

Rješenje. Uvrstimo 1 dm^3 u formulu za obujam piramide, dobivamo $1 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, odnosno $a^3 = 6\sqrt{2}$ pa je $a = \sqrt[3]{6\sqrt{2}} \approx 2.04 \text{ dm}$.

1.2. Računanje s korijenima

Zadatak 1. Pojednostavi:

1) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$;

3) $\sqrt{10} + \sqrt{10}$;

5) $4\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3\sqrt{3}$;

2) $4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$;

4) $5\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$;

6) $\sqrt{5} - \sqrt{7} + 4\sqrt{5} - 6\sqrt{7}$.

Rješenje. 1) $5\sqrt{2}$; 2) $9\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{10}$; 4) $\sqrt{5}$; 5) 0; 6) $5\sqrt{5} - 7\sqrt{7}$.

Zadatak 2. Izračunaj:

1) $\sqrt{144 + 81}$;

3) $\sqrt{13^2 - 12^2}$;

2) $\sqrt{7(32 - 25)}$;

4) $\sqrt{(10+14) \cdot (11+13)}$.

Rješenje. 1) $\sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$; 2) $\sqrt{7(32 - 25)} = \sqrt{7 \cdot 7} = 7$;

3) $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13 - 12)(13 + 12)} = \sqrt{1 \cdot 25} = 5$;

4) $\sqrt{(10 + 14) \cdot (11 + 13)} = \sqrt{25 \cdot 25} = 25$.

Zadatak 3. Izračunaj:

1) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$;

3) $\sqrt{4.41}$;

2) $\sqrt{0.09}$;

4) $\sqrt{81\,000\,000}$.

Rješenje. 1) $\frac{3}{2}$; 2) 0.3; 3) 2.1; 4) 9 000.

Zadatak 4. Izračunaj i obrazloži:

1) $\sqrt{10^8}$;

3) $\sqrt{10^0}$;

5) $\sqrt{(-10)^{10}}$.

2) $\sqrt{10^{-6}}$;

4) $\sqrt{-10^{10}}$;

Rješenje. 1) 10^4 ; 2) 10^{-3} ; 3) 1 (jer je $10^0 = 1$); 4) nije realan broj; 5) 10^5 .

Zadatak 5. Unutar kojeg se intervala, čiji su rubovi dva susjedna cijela broja, nalaze sljedeći brojevi:

1) $\sqrt{22}$;

2) $\sqrt{15.5}$;

3) $\sqrt{0.9}$;

4) $\sqrt{909}$?

Rješenje. 1) $[4, 5]$ jer je $16 < 22 < 25$; 2) $[3, 4]$ jer je $9 < 15.5 < 16$;

3) $[0, 1]$ jer je $0 < 0.9 < 1$; 4) $[30, 31]$ jer je $900 < 909 < 961$.

Zadatak 6. Primjenjujući pravila za računanje s korijenima, izračunaj:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}$; | 2) $\sqrt{60} \cdot \sqrt{135}$; |
| 3) $\sqrt{0.1} \cdot \sqrt{1000}$; | 4) $\sqrt{75} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}}$; |
| 5) $\sqrt{\frac{3}{65}} \cdot \sqrt{\frac{13}{64}}$; | 6) $\sqrt{0.9} \cdot \sqrt{0.4}$. |

- Rješenje.**
- $\sqrt{14} \cdot \sqrt{56} = \sqrt{14 \cdot 56} = \sqrt{784} = 28$;
 - $\sqrt{60} \cdot \sqrt{135} = \sqrt{60 \cdot 135} = \sqrt{8100} = 90$;
 - $\sqrt{0.1} \cdot \sqrt{1000} = \sqrt{0.1 \cdot 1000} = \sqrt{100} = 10$;
 - $\sqrt{75} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} = \sqrt{75 \cdot \frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{75}{27}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$;
 - $\sqrt{\frac{3}{65}} \cdot \sqrt{\frac{13}{64}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 13}{65 \cdot 64}} = \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$;
 - $\sqrt{0.9} \cdot \sqrt{0.4} = \sqrt{0.9 \cdot 0.4} = \sqrt{0.36} = 0.6$.

Zadatak 7. Primjenjujući pravila za računanje s korijenima, izračunaj:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sqrt{20} : \sqrt{125}$; | 2) $\sqrt{48} : \sqrt{108}$; |
| 3) $\sqrt{1.62} : \sqrt{4.5}$; | 4) $\sqrt{42} : \sqrt{\frac{7}{24}}$; |
| 5) $\sqrt{\frac{26}{7}} : \sqrt{\frac{13}{56}}$; | 6) $\sqrt{0.18} : \sqrt{0.32}$. |

- Rješenje.**
- $\sqrt{20} : \sqrt{125} = \sqrt{20 : 125} = \sqrt{4 : 25} = 2 : 5 = \frac{2}{5}$;
 - $\sqrt{48} : \sqrt{108} = \sqrt{48 : 108} = \sqrt{4 : 9} = 2 : 3 = \frac{2}{3}$;
 - $\sqrt{1.62} : \sqrt{4.5} = \sqrt{1.62 : 4.5} = \sqrt{162 : 450} = \sqrt{9 : 25} = 3 : 5 = \frac{3}{5}$;
 - $\sqrt{42} : \sqrt{\frac{7}{24}} = \sqrt{42 : \frac{7}{24}} = \sqrt{42 \cdot \frac{24}{7}} = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = 12$;
 - $\sqrt{\frac{26}{7}} : \sqrt{\frac{13}{56}} = \sqrt{\frac{26}{7} : \frac{13}{56}} = \sqrt{\frac{26 \cdot 56}{7 \cdot 13}} = \sqrt{16} = 4$;
 - $\sqrt{0.18} : \sqrt{0.32} = \sqrt{0.18 : 0.32} = \sqrt{0.5625} = 0.75$.

Zadatak 8. Izračunaj:

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $\sqrt{109^2 - 60^2}$; | 2) $\sqrt{153^2 - 72^2}$; | 3) $\sqrt{160^2 - 96^2}$. |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

- Rješenje.**
- $\sqrt{109^2 - 60^2} = \sqrt{(109 - 60)(109 + 60)} = \sqrt{49 \cdot 169} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{169} = 7 \cdot 13 = 91$;
 - $\sqrt{153^2 - 72^2} = \sqrt{(153 - 72)(153 + 72)} = \sqrt{81 \cdot 225} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{225} = 9 \cdot 15 = 135$;
 - $\sqrt{160^2 - 96^2} = \sqrt{(160 - 96)(160 + 96)} = \sqrt{64 \cdot 256} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{256} = 8 \cdot 16 = 128$.

Zadatak 9. Primjenjujući pravila za računanje s korijenima, izračunaj:

- 1) $\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{10}$;
- 2) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$;
- 3) $\sqrt[3]{0.1} \cdot \sqrt[3]{0.27}$;
- 4) $\sqrt[3]{\frac{9}{16}} \cdot \sqrt[3]{6}$;
- 5) $\sqrt[3]{\frac{1}{625}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$.

Rješenje.

- 1) $\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{100 \cdot 10} = \sqrt[3]{1000} = 10$;
- 2) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{12 \cdot 18} = \sqrt[3]{216} = 6$;
- 3) $\sqrt[3]{0.1} \cdot \sqrt[3]{0.27} = \sqrt[3]{0.1 \cdot 0.27} = \sqrt[3]{0.027} = 0.3$;
- 4) $\sqrt[3]{\frac{9}{16}} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{\frac{9}{16} \cdot 6} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$;
- 5) $\sqrt[3]{\frac{1}{625}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{25}} = \sqrt[3]{\frac{1}{625} \cdot \frac{1}{25}} = \sqrt[3]{\frac{1}{15625}} = \frac{1}{25}$.

Zadatak 10. Primjenjujući pravila za računanje s korijenima, izračunaj:

- 1) $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{625}$;
- 2) $\sqrt[3]{88} : \sqrt[3]{297}$;
- 3) $\sqrt[3]{192} : \sqrt[3]{375}$;
- 4) $\sqrt[3]{1.25} : \sqrt[3]{0.01}$;
- 5) $\sqrt[3]{100} : \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$.

Rješenje.

- 1) $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{40 : 625} = \sqrt[3]{8 : 125} = \sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{125} = 2 : 5 = \frac{2}{5}$;
- 2) $\sqrt[3]{88} : \sqrt[3]{297} = \sqrt[3]{88 : 297} = \sqrt[3]{8 : 27} = \sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27} = 2 : 3 = \frac{2}{3}$;
- 3) $\sqrt[3]{192} : \sqrt[3]{375} = \sqrt[3]{192 : 375} = \sqrt[3]{64 : 125} = 4 : 5 = \frac{4}{5}$;
- 4) $\sqrt[3]{1.25} : \sqrt[3]{0.01} = \sqrt[3]{1.25 : 0.01} = \sqrt[3]{125} = 5$;
- 5) $\sqrt[3]{100} : \sqrt[3]{\frac{1}{10}} = \sqrt[3]{100 : \frac{1}{10}} = \sqrt[3]{100 \cdot 10} = \sqrt[3]{1000} = 10$.

Zadatak 11. Izračunaj:

- 1) $(\sqrt{3} - 1)^2(4 + 2\sqrt{3})$;
- 2) $(3 + 2\sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^2$;
- 3) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2(4 - \sqrt{15})$.

Rješenje.

- 1) $(\sqrt{3} - 1)^2(4 + 2\sqrt{3}) = (4 - 2\sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3}) = 16 - 12 = 4$;
- 2) $(3 + 2\sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^2 = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$;
- 3) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2(4 - \sqrt{15}) = (8 + 2\sqrt{15})(4 - \sqrt{15}) = 2(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15}) = 2(16 - 15) = 2$.

Zadatak 12. Provedi kvadriranja:

- 1) $(1 + \sqrt[3]{3})^2$;
- 2) $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})^2$;
- 3) $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2})^2$.

- Rješenje.**
- 1) $(1 + \sqrt[3]{3})^2 = 1 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$;
 - 2) $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4} = -4 + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}$;
 - 3) $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Zadatak 13. Provedi sljedeća kubiranja dvočlanih izraza:

- 1) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^3$;
- 2) $(\sqrt{5} + \sqrt[3]{5})^3$;
- 3) $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{12})^3$.

- Rješenje.**
- 1) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^3 = \sqrt{2}^3 + 3 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = \sqrt{8} + 3\sqrt{12} + 3\sqrt{18} + \sqrt{27}$;
 - 2) $(\sqrt{5} + \sqrt[3]{5})^3 = (\sqrt{5})^3 + 3 \cdot (\sqrt{5})^2 \cdot \sqrt[3]{5} + 3 \cdot \sqrt{5} \cdot (\sqrt[3]{5})^2 + (\sqrt[3]{5})^3 = \sqrt{125} + 15\sqrt[3]{5} + 3\sqrt{5}\sqrt[3]{25} + 5$;
 - 3) $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{12})^3 = (\sqrt[3]{4})^3 - 3 \cdot (\sqrt[3]{4})^2 \cdot \sqrt[3]{12} + 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot (\sqrt[3]{12})^2 - (\sqrt[3]{12})^3 = 4 - 3\sqrt[3]{16 \cdot 12} + 3\sqrt[3]{4 \cdot 144} - 12 = -8 - 3\sqrt[3]{192} + 3\sqrt[3]{576}$.

Zadatak 14. Izračunaj:

- 1) $(\sqrt{10} - 1) \cdot (\sqrt{10} + 1)$;
- 2) $(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})$;
- 3) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) \cdot (5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$.

- Rješenje.**
- 1) $(\sqrt{10} - 1) \cdot (\sqrt{10} + 1) = (\sqrt{10})^2 - 1^2 = 10 - 1 = 9$;
 - 2) $(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3}) = 3^2 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$;
 - 3) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) \cdot (5\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) = (5\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5})^2 = 25 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = 50 - 20 = 30$.

Zadatak 15. Izračunaj:

- 1) $(1 - \sqrt[3]{2}) \cdot (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$;
- 2) $(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})$;
- 3) $(2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{2}) \cdot (4\sqrt[3]{25} + 6\sqrt[3]{10} + 9\sqrt[3]{4})$;
- 4) $(\sqrt[3]{10} + 1) \cdot (\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10} + 1)$.

- Rješenje.**
- 1) $(1 - \sqrt[3]{2}) \cdot (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = (1 - \sqrt[3]{2}) \cdot (1^2 + \sqrt[3]{2} \cdot 1 + (\sqrt[3]{2})^2) = 1^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 1 - 2 = -1$;
 - 2) $(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}) = (\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3}) \cdot ((\sqrt[3]{7})^2 - \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2) = (\sqrt[3]{7})^3 + (\sqrt[3]{3})^3 = 7 + 3 = 10$;
 - 3) $(2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{2}) \cdot (4\sqrt[3]{25} + 6\sqrt[3]{10} + 9\sqrt[3]{4}) = (2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{2}) \cdot ((2\sqrt[3]{5})^2 + 2\sqrt[3]{5} \cdot 3\sqrt[3]{2} + (3\sqrt[3]{2})^2) = (2\sqrt[3]{5})^3 - (3\sqrt[3]{2})^3 = 8 \cdot 5 - 27 \cdot 2 = 40 - 54 = -14$;
 - 4) $(\sqrt[3]{10} + 1) \cdot (\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10} + 1) = (\sqrt[3]{10})^3 + 1^3 = 10 + 1 = 11$.

1.3. Iracionalne jednađžbe

Zadatak 1. Dokaži da sljedeće jednađžbe nemaju rješenja u skupu realnih brojeva:

$$1) \sqrt{4-x} - \sqrt{x-6} = 2; \quad 2) \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+3} = 0;$$

$$3) \sqrt{x-3} - \sqrt{x+9} = \sqrt{x-2}; \quad 4) \sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 2.$$

Rješenje. 1) Ne postoji realan broj x za koji je istovremeno $4-x \geq 0$ i $x-6 \geq 0$ odnosno $x \leq 4$ i $x \geq 6$.
 2) Zbroj dvaju nenegativnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako su istodobno oba jednaka nuli. No to $\sqrt{2x+3}$ i $\sqrt{x+3}$ nisu ni za koji realni broj x .
 3) Iz sustava $x \geq 3$, $x \geq -9$ i $x \geq 2$ slijedi $x \geq 3$. Ali za $x \geq 3$ je $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+9} < 0$.
 4) Kad bi dana jednađžba imala rješenja, bio bi to broj x , $x \geq 0$. No za $x \geq 0$ je $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} \geq 3$. Stoga jednađžba nema rješenja.

Zadatak 2. Riješi jednađžbe:

$$1) 8 - 2\sqrt{2x+3} = 6; \quad 2) 11 - 3\sqrt{x+3} = 2;$$

$$3) 3 - \sqrt{3x+1} = 1; \quad 4) \sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4};$$

$$5) \sqrt{3x+19} - \sqrt{5x-1} = 0; \quad 6) \sqrt{4-9x^2} = \sqrt{2-3x}.$$

Rješenje. 1) $8 - 2\sqrt{2x+3} = 6$

$$4 - \sqrt{2x+3} = 3$$

$$\sqrt{2x+3} = 1$$

$$2x+3 = 1$$

$$2x = -2$$

$$x = -1;$$

Provjerom potvrđujemo da je $x = -1$ uistinu rješenje jednađžbe.

$$2) 11 - 3\sqrt{x+3} = 2$$

$$3\sqrt{x+3} = 9$$

$$\sqrt{x+3} = 3$$

$$x+3 = 9$$

$$x = 6;$$

Provjerom potvrđujemo da je $x = 6$ uistinu rješenje jednađžbe.

$$3) 3 - \sqrt{3x+1} = 1$$

$$\sqrt{3x+1} = 2$$

$$3x+1 = 4$$

$$3x = 3$$

$$x = 1;$$

Provjerom potvrđujemo da je $x = 1$ uistinu rješenje jednađžbe.

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4} \\
 & 7x+1 = 4(x+4) \\
 & 7x+1 = 4x+16 \\
 & 3x = 15 \\
 & x = 5;
 \end{aligned}$$

Provjerom potvrđujemo da je $x = 5$ uistinu rješenje jednadžbe.

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \sqrt{3x+19} - \sqrt{5x-1} = 0 \\
 & \sqrt{3x+19} = \sqrt{5x-1} \\
 & 3x+19 = 5x-1 \\
 & 2x = 20 \\
 & x = 10;
 \end{aligned}$$

Provjerom potvrđujemo da je $x = 10$ uistinu rješenje jednadžbe.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \sqrt{4-9x^2} = \sqrt{2-3x} \\
 & 4-9x^2 = 2-3x \\
 & (2-3x)(2+3x) - (2-3x) = 0 \\
 & (2-3x)(1+3x) = 0 \\
 & x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{3};
 \end{aligned}$$

Provjerom potvrđujemo da su $x_1 = \frac{2}{3}$ i $x_2 = -\frac{1}{3}$ uistinu rješenja jednadžbe.

Zadatak 3. Riješi jednadžbe:

$$1) \sqrt{3 + \sqrt{x-3}} = 2;$$

$$2) \sqrt{2 - \sqrt{2x-1}} = 1;$$

$$3) \sqrt{7 - \sqrt{x+1}} = 2;$$

$$4) \sqrt{3 - \sqrt{2 + \sqrt{3x+1}}} = 1.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt{3 + \sqrt{x-3}} = 2 \\
 & 3 + \sqrt{x-3} = 4 \\
 & \sqrt{x-3} = 1 \\
 & x-3 = 1 \\
 & x = 4;
 \end{aligned}$$

Provjerom potvrđujemo da je $x = 4$ uistinu rješenje jednadžbe.

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \sqrt{2 - \sqrt{2x-1}} = 1 \\
 & 2 - \sqrt{2x-1} = 1 \\
 & \sqrt{2x-1} = 1 \\
 & 2x-1 = 1 \\
 & x = 1;
 \end{aligned}$$

Provjerom potvrđujemo da je $x = 1$ uistinu rješenje jednadžbe.

$$\begin{aligned} 3) \quad & \sqrt{7 - \sqrt{x+1}} = 2 \\ & 7 - \sqrt{x+1} = 4 \\ & \sqrt{x+1} = 3 \\ & x + 1 = 9 \\ & x = 8; \end{aligned}$$

Provjerom potvrđujemo da je $x = 8$ uistinu rješenje jednadžbe.

$$\begin{aligned} 4) \quad & \sqrt{3 - \sqrt{2 + \sqrt{3x+1}}} = 1 \\ & 3 - \sqrt{2 + \sqrt{3x+1}} = 1 \\ & \sqrt{2 + \sqrt{3x+1}} = 2 \\ & 2 + \sqrt{3x+1} = 4 \\ & \sqrt{3x+1} = 2 \\ & 3x + 1 = 4 \\ & x = 1; \end{aligned}$$

Provjerom potvrđujemo da je $x = 1$ uistinu rješenje jednadžbe.

Zadatak 4. Riješi jednadžbe:

$$1) \quad \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} = 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2}; \quad 2) \quad \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ & \sqrt{x}-1 = 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ & 2\sqrt{x}-2 = 8 + \sqrt{x}-1 \\ & \sqrt{x} = 9 \\ & x = 81; \end{aligned}$$

Provjerom potvrđujemo da je $x = 81$ uistinu rješenje jednadžbe.

$$\begin{aligned} 2) \quad & \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \\ & \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1 - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ & 2\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1 \\ & 2(\sqrt{x}-1) = x-1 \\ & 2\sqrt{x}-2 = x-1 \\ & 2\sqrt{x} = x+1 \end{aligned}$$

$$4x = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = 1;$$

Za $x = 1$ razlomak $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ nije definiran, pa jednadžba nema rješenja.

Zadatak 5. Riješi jednadžbe:

- 1) $\sqrt{6+x} \cdot \sqrt{6-x} = x$; 2) $\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{2x-3} = 4$;
 3) $\sqrt{5x-6} \cdot \sqrt{5x+6} = 8$; 4) $\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{2x-1} = 2x$;
 5) $\sqrt{3x-2} \cdot \sqrt{x+2} = x+2$.

Rješenje.

1) $\sqrt{6+x} \cdot \sqrt{6-x} = x$ 2) $\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{2x-3} = 4$

$$\sqrt{36-x^2} = x$$

$$36-x^2 = x^2$$

$$x^2 = 18$$

$$x = \sqrt{18}$$

$$x = 3\sqrt{2};$$

$$\sqrt{4x^2-9} = 4$$

$$4x^2-9 = 16$$

$$4x^2 = 25$$

$$x^2 = \frac{25}{4}$$

$$x = \frac{5}{2};$$

3) $\sqrt{5x-6} \cdot \sqrt{5x+6} = 8$ 4) $\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{2x-1} = 2x$

$$\sqrt{25x^2-36} = 8$$

$$25x^2-36 = 64$$

$$25x^2 = 100$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2;$$

$$\sqrt{(2x+3)(2x-1)} = 2x$$

$$4x^2+4x-3 = 4x^2$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4};$$

5) $\sqrt{3x-2} \cdot \sqrt{x+2} = x+2$

$$\sqrt{(3x-2)(x+2)} = x+2$$

$$3x^2+4x-4 = x^2+4x+4$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2.$$

Provjerom potvrđujemo da su sva dobivena rješenja uistinu rješenja zadanih jednadžbi.

Zadatak 6. Riješi jednadžbe:

- 1) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{5-x} = \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4-x}$;
 2) $\sqrt{3x-1} \cdot \sqrt{4x+3} = \sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{6x-5}$;
 3) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+3} = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x+4}$.

Rješenje. 1) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{5-x} = \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4-x}$
 $(x+1)(5-x) = (x+3)(4-x)$
 $-x^2 + 4x + 5 = -x^2 + x + 12$
 $3x = 7$
 $x = \frac{7}{3};$

2) $\sqrt{3x-1} \cdot \sqrt{4x+3} = \sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{6x-5}$
 $(3x-1)(4x+3) = (2x+3)(6x-5)$
 $12x^2 + 5x - 3 = 12x^2 + 8x - 15$
 $-3x = -12$
 $x = 4;$

3) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+3} = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x+4}$
 $(x+1)(x+3) = (x+2)(x+4)$
 $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 6x + 8$
 $2x = -5$
 $x = -\frac{5}{2};$

Uvrštavanjem se vidi da $x = -\frac{5}{2}$ nije rješenje. Jednadžba nema rješenja.

Zadatak 7. 1) $\sqrt{2x+5} = x+1;$ 2) $2\sqrt{x+5} = x+2;$
 3) $x-2 = \sqrt{4+2x-x^2};$ 4) $\sqrt{2x^2-3x+1} = x+1.$

Rješenje. 1) $\sqrt{2x+5} = x+1$
 $2x+5 = x^2 + 2x + 1$
 $x^2 - 4 = 0$
 $(x-2)(x+2) = 0$
 $x = \pm 2;$

Za $x = -2$ izraz pod korjenom je negativan pa $x = -2$ nije rješenje, $x = 2$ jest rješenje jednadžbe.

2) $2\sqrt{x+5} = x+2$
 $4x+20 = x^2 + 4x + 4$
 $x^2 = 16$
 $x = \pm 4;$

Uvrštavanjem dobijemo da je rješenje $x = 4$.

3) $x-2 = \sqrt{4+2x-x^2}$
 $x^2 - 4x + 4 = 4 + 2x - x^2$
 $2x^2 - 6x = 0$
 $2x(x-3) = 0;$

Za $x = 0$ lijeva strana jednadžbe je negativna, a desna pozitivna, pa $x = 0$ nije rješenje jednadžbe. Rješenje je $x = 3$.

$$\begin{aligned} 4) \quad & \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = x + 1 \\ & 2x^2 - 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 \\ & x^2 - 5x = 0 \\ & x(x - 5) = 0; \end{aligned}$$

Rješenje je $x = 0$ ili $x = 5$, što se provjeri uvrštavanjem.

Zadatak 8. Riješi jednadžbe:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4; & 2) \quad & \sqrt{3x+1} + \sqrt{16-3x} = 5; \\ 3) \quad & \sqrt{x-4} + \sqrt{3-x} = 1; & 4) \quad & \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2; \\ 5) \quad & \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x-6} = 5; & 6) \quad & \sqrt{x+1} + \sqrt{2x} = \sqrt{3x+1}. \end{aligned}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4 \quad \text{uvjet: } x \geq -5, \quad x \leq 5 \\ & \sqrt{x+5} = 4 - \sqrt{5-x} \quad /^2 \\ & x+5 = 16 - 8\sqrt{5-x} + 5 - x \\ & 8\sqrt{5-x} = 16 - 2x \\ & 4\sqrt{5-x} = 8 - x \quad /^2 \\ & 16(5-x) = 64 - 16x + x^2 \\ & 80 - 16x = 64 - 16x + x^2 \\ & x^2 = 16 \end{aligned}$$

Rješenja jednadžbe su $x = -4$ i $x = 4$.

$$\begin{aligned} 2) \quad & \sqrt{3x+1} + \sqrt{16-3x} = 5 \quad \text{uvjet: } x \geq -\frac{1}{3}, \quad x \leq \frac{16}{3} \\ & 5 - \sqrt{3x+1} = \sqrt{16-3x} \\ & 25 - 10\sqrt{3x+1} + 3x+1 = 16 - 3x \\ & 6x+10 = 10\sqrt{3x+1} \\ & 3x+5 = 5\sqrt{3x+1} \\ & 9x^2 + 30x + 25 = 75x + 25 \\ & 9x^2 - 45x = 0 \\ & 9x(x-5) = 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ i $x = 5$ su rješenja zadane jednadžbe.

$$\begin{aligned} 3) \quad & \sqrt{x-4} + \sqrt{3-x} = 1 \\ & \text{uvjet: } x-4 \geq 0, \quad 3-x \geq 0 \\ & x \geq 4, \quad x \leq 3 \end{aligned}$$

Jednadžba nema rješenja.

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2 \quad \text{uvjet: } x \geq -5, \quad x \geq 3 \\
 & \sqrt{x+5} = 2 + \sqrt{x-3} \quad /^2 \\
 & x+5 = 4 + 4\sqrt{x-3} + x-3 \\
 & 5-4+3 = 4\sqrt{x-3} \\
 & 4 = 4\sqrt{x-3} \quad / :4 \\
 & 1 = \sqrt{x-3} \quad /^2 \\
 & 1 = x-3 \\
 & x = 4
 \end{aligned}$$

$x = 4$ je rješenje zadane jednadžbe.

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x-6} = 5 \quad \text{uvjet: } x \geq \frac{1}{2}, \quad x \geq 3 \\
 & \sqrt{2x-1} = 5 - \sqrt{2x-6} \quad /^2 \\
 & 2x-1 = 25 - 10\sqrt{2x-6} + 2x-6 \\
 & 10\sqrt{2x-6} = 25 + 1 - 6 \\
 & 10\sqrt{2x-6} = 20 \quad / :10 \\
 & \sqrt{2x-6} = 2 \quad /^2 \\
 & 2x-6 = 4 \\
 & 2x = 4 + 6 = 10 \\
 & x = 5
 \end{aligned}$$

$x = 5$ je rješenje zadane jednadžbe.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \sqrt{x+1} + \sqrt{2x} = \sqrt{3x+1} \quad /^2 \quad \text{uvjet: } x \geq -1, \quad x \geq 0 \\
 & x+1 + 2\sqrt{(x+1)(2x)} + 2x = 3x + 2\sqrt{3x+1} \\
 & 2\sqrt{2x(x+1)} = 2\sqrt{3x+1} \quad /^2 \\
 & 2x(x+1) = 3x+1 \\
 & 2x^2 + 2x - 3x - 1 = 0 \\
 & 2x^2 - x - 1 = 0 \\
 & x(2x-1) = 0 \\
 & x = 0, \quad x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$x = 0$ i $x = \frac{1}{2}$ su rješenja zadane jednadžbe.

Zadatak 9. Riješi jednadžbe:

- 1) $\sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} = \sqrt{8x} + \sqrt{2x+3}$;
- 2) $\sqrt{3x+2} - \sqrt{2x} = \sqrt{2x+3} - \sqrt{3x-1}$;
- 3) $\sqrt{3x-1} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} = \sqrt{8x} + \sqrt{2x+3} \\
 & 10x + 3 + 2\sqrt{6x+1}\sqrt{4x+2} = 10x + 2\sqrt{8x}\sqrt{2x+3} + 3 \\
 & \sqrt{6x+1}\sqrt{4x+2} = \sqrt{8x}\sqrt{2x+3} \\
 & 24x^2 + 16x + 2 = 16x^2 + 24x \\
 & 8x^2 - 8x + 2 = 0 \\
 & 4x^2 - 4x + 1 = 0 \\
 & (2x - 1)^2 = 0 \\
 & x = \frac{1}{2};
 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem utvrđujemo da je $x = \frac{1}{2}$ uistinu rješenje jednadžbe.

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x} = \sqrt{2x+3} - \sqrt{3x-1} \\
 & 3x + 2 - 2\sqrt{(3x+2)2x} + 2x = 2x + 3 - 2\sqrt{2x+3}\sqrt{3x-1} + 3x - 1 \\
 & \sqrt{(3x+2)2x} = \sqrt{2x+3}\sqrt{3x-1} \\
 & 6x^2 + 4x = 6x^2 + 7x - 3 \\
 & 3x = 3 \\
 & x = 1;
 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem utvrđujemo da je $x = 1$ uistinu rješenje jednadžbe.

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \sqrt{3x-1} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} \\
 & 3x - 1 - 2\sqrt{3x-1}\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x + 1 - 2\sqrt{2x+1}\sqrt{2x-1} + 2x - 1 \\
 & \sqrt{3x-1}\sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1}\sqrt{2x-1} \\
 & 3x^2 - 2x - 1 = 4x^2 - 1 \\
 & x^2 + 2x = 0 \\
 & x(x+2) = 0
 \end{aligned}$$

Moguća rješenja su $x = 0$ i $x = 2$. Uvrštavanjem dobijemo da je jedino rješenje $x = 2$.

Zadatak 10.

Riješi jednadžbe:

- 1) $\sqrt[3]{6 + \sqrt{x+1}} = 1$;
- 2) $\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt{x+3}$;
- 3) $\sqrt[3]{25 + \sqrt{x^2+3}} = 3$;
- 4) $\sqrt{7 + \sqrt[3]{x^2+7}} = 3$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt[3]{6 + \sqrt{x+1}} = 1 \quad /^3 \\
 & 6 + \sqrt{x+1} = 1 \\
 & \sqrt{x+1} = 1 - 6 \\
 & \sqrt{x+1} = -5;
 \end{aligned}$$

Drugi korijen ne može biti negativan broj pa ova jednadžba nema rješenja.

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt{x+3} \quad /^2 \\
 & x+1 + \sqrt[3]{2x-1} = x+3 \\
 & \sqrt[3]{2x-1} = 2 \quad /^3 \\
 & 2x-1 = 8 \\
 & 2x = 9 \\
 & x = \frac{9}{2};
 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem utvrđujemo da je $x = \frac{9}{2}$ uistinu rješenje jednadžbe.

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \sqrt[3]{25 + \sqrt{x^2 + 3}} = 3 \quad /^3 \\
 & 25 + \sqrt{x^2 + 3} = 27 \\
 & \sqrt{x^2 + 3} = 2 \quad /^2 \\
 & x^2 + 3 = 4 \\
 & x^2 = 1 \\
 & x = \pm 1
 \end{aligned}$$

Jednadžba ima dva rješenja: $x = -1$ i $x = 1$ (provjerimo uvrštavanjem).

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \sqrt{7 + \sqrt[3]{x^2 + 7}} = 3 \quad /^2 \\
 & 7 + \sqrt[3]{x^2 + 7} = 9 \\
 & \sqrt[3]{x^2 + 7} = 2 \quad /^3 \\
 & x^2 + 7 = 8 \\
 & x^2 = 1; \\
 & x = \pm 1.
 \end{aligned}$$

Jednadžba ima dva rješenja: $x = -1$ i $x = 1$ (provjerimo uvrštavanjem).