

4 Proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost

Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- odnos dviju veličina prikazanih omjerom prikazati razlomkom
- prepoznati i opisati proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine
- u situacijama iz stvarnog života prepoznati i objasniti proporcionalnost i obrnuto proporcionalnost
- odrediti i tumačiti koeficijent proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti
- povezati koeficijent proporcionalnosti s omjerom dviju proporcionalnih veličina
- koristiti se svojstvima proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti pri rješavanju problemskih situacija
- preispitivati smislenost rješenja s obzirom na kontekst
- prepoznati i objasniti linearu ovisnost veličina iz stvarnog života
- oblikovati tablicu pridruženih vrijednosti linearno zavisnih podataka
- povezati zavisnu i nezavisnu veličinu u problemskoj situaciji
- zapisati linearu ovisnost formulom $y = ax + b$, gdje su a i b racionalni brojevi
- analizirati promjenu u linearnoj ovisnosti
- na istom grafu usporediti i analizirati prikaze dviju različitih linearnih ovisnosti
- linearom ovisnosti modelirati i rješavati probleme
- preračunavati mjerne jedinice za duljinu i masu
- odabrati odgovarajuću mjeru jedinicu pri rješavanju problema
- oblikovati svoje ideje i kreativno pristupati rješavanju problema
- primjenjivati inovativna i kreativna rješenja
- procjenjivati važnost pravednosti u društvu
- pratiti učinkovitost učenja i svoje napredovanje tijekom učenja.

Oni koji žele znati više moći će:

- povezati linearu ovisnost s linearom funkcijom.

U ovom ćeš poglavlju saznati što je:

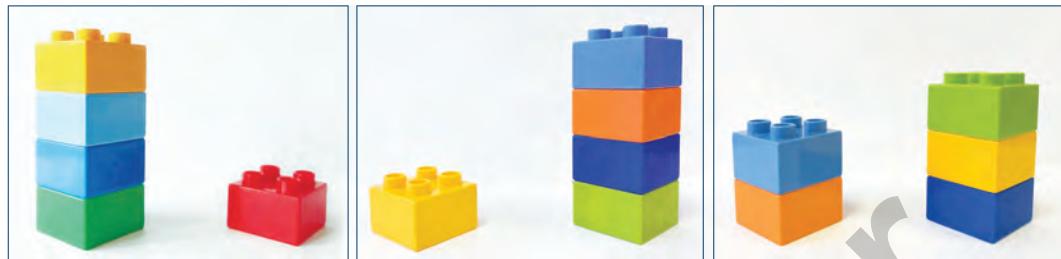
- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">▪ omjer▪ proporcionalnost▪ obrnuta proporcionalnost▪ koeficijent proporcionalnosti | <ul style="list-style-type: none">▪ koeficijent obrnute proporcionalnosti▪ linearu ovisnost▪ linearu funkciju. |
|---|--|



vodu u bazen dovode tri cijevi. Ako se voda dovodi samo prvom cijevi, tada bi se bazen napunio za 9 sati. Druga cijev puni bazen 12 sati, a treća 18 sati. Za koliko bi se sati napunio bazen ako se otvore sve tri cijevi?

4.1. Omjer

Promotrimo fotografije konstrukcija napravljenih od dječjih kockica i opišimo odnose njihovih visina.



Prva je konstrukcija četiri puta viša od druge.

Prva je konstrukcija četiri puta niža od druge.

Kako opisati odnos visina konstrukcija?

Na posljednjoj fotografiji visina prve konstrukcije jednaka je $\frac{2}{3}$ visine druge konstrukcije. Uočavamo da se prva konstrukcija sastoji od dva po visini jednaka dijela, a druga od tri po visini jednaka dijela. Kažemo da se visine konstrukcija odnose kao 2 naprema 3 i pišemo $2 : 3$. Navedeni zapis $2 : 3$ naziva se omjer brojeva 2 i 3. Omjer brojeva 2 i 3 jednak je količniku $2 : 3$, tj. vrijedi:

$$2 : 3 = \frac{2}{3}.$$

Omjer brojeva

Izraz oblika $a : b$, $a, b \neq 0$, nazivamo **omjerom brojeva** a i b . Broj a je **prvi član omjera**, a broj b je **drugi član omjera**.

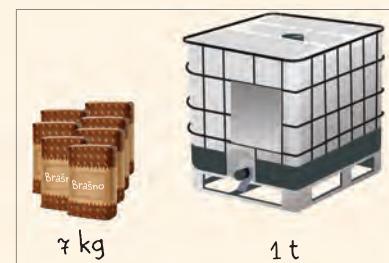
Primjer 1.

Izrazimo odnos masa

a) riječima



b) omjerom.



Rješenje:

Prva fotografija

Prva je masa deseterostruko manja od druge. Odnos masa zapisujemo omjerom:

$$1 : 10.$$

Druga fotografija

Mase moraju biti iskazane u istoj mjernoj jedinici. Prva je masa $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$ i ona je tisuću puta veća od druge. Odnos masa zapisujemo omjerom:

$$1000 : 1.$$

Treća fotografija

Budući da je $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$, zaključujemo da je prva masa jednaka $\frac{7}{1000}$ druge mase. Odnos masa zapisujemo omjerom:

$$7 : 1000.$$

Na fotografiji možemo uočiti da su gosti postigli dvostruko više koševa na utakmici.



Mogli bismo reći da je odnos

$$50 : 100 \quad \text{jednak odnosu} \quad 1 : 2.$$

Oba člana omjera podijelili smo s 50, tj. pomnožili s $\frac{1}{50}$ i vrijednost omjera nije se promjenila.

Vrijednost omjera neće se promjeniti ako oba člana omjera podijelimo ili pomnožimo istim racionalnim brojem različitim od nule.

Koristeći se upravo opisanim svojstvom omjera, svaki omjer možemo zapisati u **jednostavnjem** obliku u kojem su oba člana cijeli brojevi, a razlomak do kraja skraćen.

Primjer 2.

Pojednostavljimo omjere:

a) $\frac{3}{4} : \frac{6}{5}$

b) $0.4 : 0.06$.

► **Rješenje:**

a) Omjer dvaju brojeva jednak je količniku tih brojeva:

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{8} = 5 : 8.$$

b) Oba člana zadanog omjera množimo brojem 100, a oba člana novog omjera dijelimo brojem 2:

$$0.4 : 0.06 = \frac{4 \cdot 100}{6 \cdot 100} = \frac{40}{6} : 2 = 20 : 3.$$

Primjer 3.

Napišimo omjer $4 : 5$ tako da je prvi član omjera broj:

- a) 40 b) 80 c) 0.4 d) 2 e) 0.01.

► *Rješenje:*

- a) Očigledno je traženi prvi član 10 puta veći od broja 4, pa je drugi član broj koji je 10 puta veći od broja 5. Stoga je rješenje $40 : 50$.

$$\text{b) } 4 : 5 = 80 : 100$$

$$\text{c) } 4 : 5 = 0.4 : 0.5$$

$$\text{d) } 4 : 5 = 2 : 2.5$$

$$\text{e) } 4 : 5 = 0.01 : 0.0125.$$

Primjer 4.

Lana i Nina trebaju podijeliti 35 kuna u omjeru $2 : 3$. Koliko će kuna dobiti svaka devojčica?

► *Rješenje:*

Prvi način. Lanin iznos jednak je $\frac{2}{3}$ Ninina iznosa novaca. Ako Ninin iznos označimo sa x , tada je Lanin iznos $\frac{2}{3}x$. Ti iznosi zajedno iznose 35 kn, tj.

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}x &= 35 \\ \frac{5}{3}x &= 35 \\ x &= 35 \cdot \frac{3}{5} \\ x &= 21 \text{ kn.} \end{aligned}$$

Nina će dobiti 21 kn, a Lana $\frac{2}{3} \cdot 21 = 14$ kn.

Drugi način.



Lana će dobiti dva jednaka dijela, tj. $2k$.

Vrijedi:

$$2k + 3k = 35$$

$$5k = 35$$

$$k = 7 \text{ kn.}$$



Nina će dobiti tri takva jednaka dijela, tj. $3k$.

Lana će dobiti $2 \cdot 7 = 14$ kn, a Nina $3 \cdot 7 = 21$ kn.

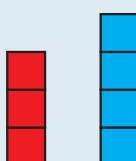
Zadaci 4.1.

1. Napiši omjere crveno i plavo obojenih dijelova prikazanih na sljedećim slikama.

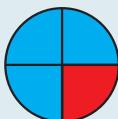
a)



b)



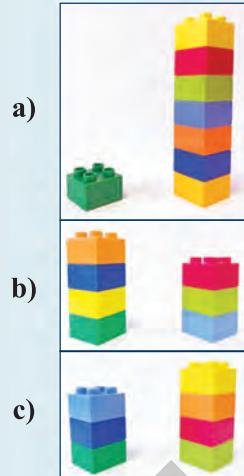
c)



d)



2. Odredi parove.



3. Na košarkaškoj utakmici rezultat je bio $64 : 48$. Pročitaj sljedeće novinarske izvještaje i u svakom od njih ispravi pogreške.

Odnos snaga na utakmici bio je $4:3$. Da su gosti postigli 16 koševa manje, rezultat bi bio izjednačen i odnos snaga bio bi $1:1$.

Bila je to vrhunска predstava domaćina. Dominirali su na parketu i postigli 25% više pogodaka od gostiju. Da su postigli 50% manje pogodaka od gostiju, tada bi odnos snaga bio $1 : 2$.

Briljantna utakmica odigrala se danas u ovoj predivnoj dvorani. Lako su gosti dominirali u prvoj četvrtini, utakmica je završila u korist domaćina. Završni omjer snaga $3:4$ zoran je prikaz nevjerojatnog obrata.

4. Odredi parove.



$$1) 2 : 3$$



$$2) 5 : 4$$



$$3) 2 : 1$$



$$4) 4 : 5$$

5. Sljedeće omjere zapiši u obliku razlomka koji zatim skrati do kraja:

- a) $12 : 40$ b) $45 : 25$
c) $150 : 21$ d) $22 : 77$.

6. Pojednostavni omjere:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $300 : 500$ | b) $2000 : 700$ |
| c) $0.04 : 0.003$ | d) $0.2 : 0.0008$ |
| e) $0.001 : 1.4$ | f) $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$ |
| g) $\frac{3}{7} : \frac{5}{7}$ | h) $2\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ |
| i) $\frac{5}{6} : 8\frac{1}{6}$ | j) $3 : \frac{1}{4}$ |
| k) $\frac{3}{5} : 5$ | l) $2.8 : 1\frac{1}{3}$ |
| m) $\frac{11}{7} : 1.21$ | n) $3\frac{4}{5} : 0.07$ |
| o) $0.75 : \frac{1}{2}$ | |

7. Na fotografiji su istaknute cijene 1 kg proizvoda. Napiši omjere cijena jednog kilograma proizvoda tako da svaki od omjera pojednostavniš:

- a) jabuke : marelice b) mrkva : krastavci
 c) kruške : salata d) marelice : kruške
 e) luk : salata f) krastavci : naranče.



8. Napiši omjere cijena zadanih količina proizvoda. Koristi se slikom iz prethodnog zadatka. Omjere pojednostavni.

- a) 25 dag krušaka : 2 kg luka
 b) 3 kg salate : 25 dag jabuka
 c) 70 dag krušaka : 6 kg krastavaca
 d) 500 g marelica : 1.2 kg mrkve.

9. Napiši nekoliko omjera koji su nakon pojednostavljenja jednaki omjeru $2 : 5$.

10. Napiši omjer $2 : 3$ tako da je prvi član omjera broj:

- a) 200 b) 2000 c) 1 d) 0.5.

11. Napiši omjer $4 : 3$ tako da je drugi član omjera broj:

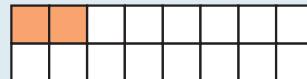
- a) 1 b) 12 c) 1.5 d) $\frac{3}{5}$ e) 2.

12. Odredi parove:

- | | |
|------------------|----------------|
| a) $8 : 1.6$ | 1) $1 : 0.02$ |
| b) $0.08 : 0.16$ | 2) $1 : 2$ |
| c) $8000 : 160$ | 3) $1 : 0.2$. |

13. Prouči crtež i napiši odnos obojenog dijela pravokutnika i cijelog pravokutnika na različite načine:

- a) kao omjer b) kao razlomak
 c) kao postotak.



14. Nacrtaj dvije dužine čije se duljine odnose kao $2 : 5$.

15. Memorija Zvonkova računala ima 2 000 MB. Popunjeno je 800 MB. Zapiši s pomoću omjera odnos:

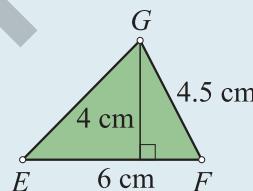
- a) popunjeno dijela i cijele memorije
 b) nepotpunjeno dijela i popunjeno dijela.

16. U 7.c razredu djevojčica je 18, a dječaka dvostruko manje. Zapiši s pomoću omjera sljedeće odnose:

- a) odnos broja djevojčica i svih učenika
 b) odnos broja dječaka i svih učenika.

17. U kojem je omjeru geografska karta ako 15 mm na karti predstavlja 3 km u prirodi?

18. Prouči crtež i zapiši tražene omjere u pojednostavljenom obliku:



- a) površina pravokutnika : površina trokuta
 b) trećina opsega pravokutnika : $|FG|$.

19. Vrpe duljine 720 cm podijeljena je na dva dijela čije se duljine odnose kao $5 : 7$. Kolika je duljina kraćeg dijela?

20. Sanja i Mario dijelili su vreću badema mase 24 kg u omjeru $1 : 11$. Koliko je svaki od njih dobio badema?

21. Marko i Vito imaju 420 sličica. Omjer broja sličica koje posjeduju je $3 : 4$. Koliko sličica ima Marko, a koliko Vito?

22. Pronadji površine kontinenata i zakruži ih na milijune kvadratnih kilometara. U kojem su omjeru površina najvećeg i najmanjeg kontinenta? U kojem su omjeru površine Europe i Azije?

4.2. Proporcionalne veličine

U svakodnevnom životu susrećemo se s raznim veličinama.



Svaka **veličina** ili **varijabla** poprima različite vrijednosti. Neke veličine su međusobno povezane na način da promjena vrijednosti jedne od njih utječe na promjenu vrijednosti druge veličine.

Promotrimo kako duljina stranice kvadrata utječe na njegov opseg.

duljina stranice kvadrata (m)	1	5	10	12	0.1	0.5	a
opseg kvadrata (m)	4	20	40	48	0.4	2	$4a$

Promatrajući brojeve u prvom i drugom stupcu uočavamo: ako se duljina stranice kvadrata poveća pet puta (s 1 m na 5 m) i opseg se povećao 5 puta (s 4 m na 20 m). Iz trećeg i petog stupca čitamo: ako se duljina stranice kvadrata smanjila deset puta, tada se i opseg smanjio deset puta. Slični se odnosi mogu uočiti i kod drugih stupaca.

Sve te zaključke možemo izreći ovako: ako se vrijednost jedne veličine (duljine stranice) povećala, odnosno smanjila n puta, tada se odgovarajuća vrijednost druge veličine (opseg kvadrata) povećala, odnosno smanjila n puta.

Veličine za čije pozitivne vrijednosti vrijedi upravo izrečeno svojstvo zovu se **proporcionalne ili razmjerne veličine**.

Pogledajmo još dva primjera.

Cijena 1 kg jabuka je 5.5 kn. U tablici je zapisano nekoliko vrijednosti mase jabuka i cijena te količine jabuka.

masa jabuka (kg)	cijena (kn)
1	5.5
2	11
3	16.5
0.5	2.75
10	55
c	$5.5c$

Vozilo se kreće stalnom brzinom 75 km/h. U tablici je zapisano nekoliko vrijednosti vremena vožnje i odgovarajući prijeđeni put.

vrijeme vožnje brzinom 75 km/h (h)	prijeđeni put (km)
1	75
2	150
3	225
0.5	37.5
10	750
t	$75t$

Jesu li masa jabuke i njezina cijena proporcionalne veličine? Jesu li vrijeme vožnje i prijeđeni put uz stalnu brzinu proporcionalne veličine? U oba je slučaja odgovor potvrđan.

Pogledamo li prvu tablicu, možemo uočiti kako za svaki red vrijedi da su vrijednosti opsega četiri puta veće od vrijednosti duljine stranice.

Označimo li sa x duljinu stranice, a sa y opseg kvadrata, možemo zapisati:

$$y = 4 \cdot x.$$

U drugoj tablici možemo uočiti da je cijena jabuka vrijednost koja je 5.5 puta veća od mase jabuka.

Označimo li sa x masu jabuke, a sa y cijenu, možemo zapisati:

$$y = 5.5 \cdot x.$$

Vrijednosti dane u trećoj tablici mogli bismo proučavati na istovjetan način i zaključiti da je vrijednost vezana uz prijeđeni put 75 puta veća od vrijednosti vezane za vrijeme putovanja.

Ako sa x označimo vrijeme putovanja u satima, a sa y duljinu prijeđenog puta u km, pišemo:

$$y = 75 \cdot x.$$

Dakle, odnos proporcionalnih veličina zapisujemo s pomoću prepoznatljive jednakosti.

Proporcionalne veličine

Veličina y proporcionalna je veličini x ako postoji neki broj k ($k > 0$) takav da vrijedi $y = k \cdot x$.

Broj k naziva se **koeficijent proporcionalnosti**. Kažemo da je veličina y **proporcionalna** veličini x s **koeficijentom proporcionalnosti** k .

Primjer 1.

Ako je veličina y proporcionalna veličini x s koeficijentom 7, je li tada veličina x proporcionalna veličini y ?

► **Rješenje:** Budući da je veličina y proporcionalna veličini x s koeficijentom 7, tada vrijedi:

$$\begin{aligned} y &= 7 \cdot x \quad \text{ili} \quad 7 \cdot x = y / : 7 \\ x &= \frac{1}{7} \cdot y. \end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti zaključujemo da je veličina x proporcionalna veličini y s koeficijentom proporcionalnosti $\frac{1}{7}$.

Možemo izvesti i općenit zaključak.

Ako je veličina y proporcionalna veličini x s koeficijentom proporcionalnosti k , tada je veličina x proporcionalna veličini y s koeficijentom proporcionalnosti $\frac{1}{k}$.

Primjer 2.

Odredimo koje su veličine proporcionalne.

a)	x	y
8	-4	
6	-3	
2	-1	
1	$-\frac{1}{2}$	
a	$-\frac{1}{2} \cdot a$	

b)	x	y
7	1	
14	2	
8	$\frac{8}{7}$	
a	$\frac{a}{7}$	

c)	x	y
1	2	
2	3	
3	4	
4	5	
a	$a + 1$	

d)	x	y
1	1	
2	4	
3	9	
a	a^2	

U primjeru **a)** broj k je negativan pa veličina y nije proporcionalna veličini x .

U primjeru **b)** vrijedi da je $y = \frac{1}{7} \cdot x$ iz čega zaključujemo da su veličine proporcionalne.

Primjer **c)** opisuje dvije veličine za koje vrijedi da povećanje vrijednosti jedne veličine "uzrokuje" povećanje vrijednosti druge veličine, ali ne postoji broj k takav da vrijedi $y = k \cdot x$ nego je $y = x + 1$ i te veličine nisu proporcionalne.

Primjer **d)** nam prikazuje sljedeće jednakosti $1 = 1 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$ i $a^2 = a \cdot a$ te ne postoji broj k takav da vrijedi $y = k \cdot x$. Stoga u primjeru **d)** nisu zadane proporcionalne veličine.

Primjer 3.

Dopunimo tablicu.

U kojem su odnosu veličine y i x ?

Čemu je jednak omjer $y : x$?

Rješenje:

x	$y = 7 \cdot x$	$y : x$
3	21	$21 : 3 = 7 : 1$
0.3	2.1	$2.1 : 0.3 = 21 : 3 = 7 : 1$
$\frac{4}{5}$	$\frac{28}{5}$	$\frac{28}{5} : \frac{4}{5} = 28 : 4 = 7 : 1$
$\frac{2}{70}$	0.2	$0.2 : \frac{2}{70} = \frac{2}{10} : \frac{2}{70} = \frac{70}{10} = 7 : 1$

x	$y = 7 \cdot x$	$y : x$
3		
		2.1
$\frac{4}{5}$		
		0.2

Veličina y proporcionalna je veličini x s koeficijentom proporcionalnosti 7.

Omjer **y : x** uvijek je $7 : 1$, tj. broj 7 koji je ujedno i koeficijent proporcionalnosti.

Ako je veličina y proporcionalna veličini x s koeficijentom k , tada za svake dvije odgovarajuće vrijednosti vrijedi

$$y : x = k,$$

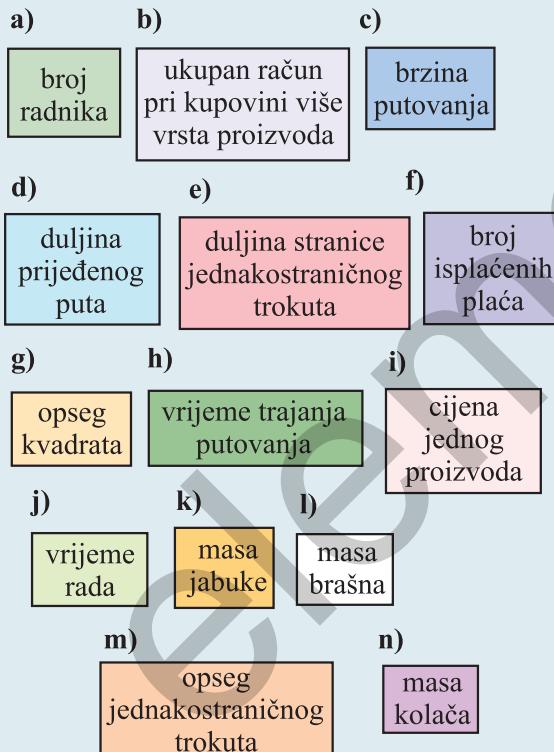
tj. omjeri dviju odgovarajućih vrijednosti uvijek su jednaki.

Zadatci 4.2.

- 1.** U bilježnicu prepiši samo veličine.



- 2.** Otkrij bar pet parova proporcionalnih veličina.



- 3.** Prepiši i dopuni rečenice u bilježnicu.

Za neke dvije veličine x i y vrijedi $x = \frac{1}{8} \cdot y$. Znači da je _____ —
_____ — proporcionalna _____ —_____ — s
_____ —_____ —_____ —_____ —. Ta-
kođer vrijedi i $y = \underline{\hspace{2cm}} \cdot x$ iz čega zaključuje-
mo da je veličina y _____ —_____ — s
_____ —_____ —_____ —.

- 4.** Dopuni tablicu u svojoj bilježnici.

x	$y = 4 \cdot x$	$y : x$
8		
10		
1.4		
$3\frac{2}{5}$		
	12	

Je li veličina y proporcionalna veličini x i ako jest, koliki je koeficijent proporcionalnosti?

5. Napisan je recept za pitu od jabuka. Dopuni recept vrijednostima koje nedostaju.

300 g oštrog brašna	<input type="checkbox"/>	žumanjka
100 g maslaca	<input type="checkbox"/>	1 vanilin šećer
3 žlice šećera	<input type="checkbox"/>	1 limun
prstohvat soli	<input type="checkbox"/>	600 g jabuka
1 žlica vrhnja	<input type="checkbox"/>	

Masa maslaca proporcionalna je masi brašna s koeficijentom proporcionalnosti $\frac{1}{2}$. Broj žlica šećera proporcionalan je broju žlica vrhnja, koeficijent proporcionalnosti je $\frac{3}{2}$. Broj žumanjaka proporcionalan je broju limuna s koeficijentom proporcionalnosti 2.

- 6.** Luka svaki dan pojede 80 dag voća. Jesu li mase voća koje Luka pojede i broj dana proporcionalne veličine? Objasni svoj odgovor.

- 7.** Dopuni tablicu u svojoj bilježnici.

x	$y = \frac{2}{3} \cdot x$	$y : x$
2		
6		
3.4		
$2\frac{1}{2}$		
	5	

Je li veličina x proporcionalna veličini y i ako jest, koliki je koeficijent proporcionalnosti?