1

CIJELI BROJEVI

1.1. Skup cijelih brojeva

Ponovimo što znamo o skupu cijelih brojeva:

Skup cijelih brojeva

Skup svih cijelih brojeva označavamo sa $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Skup pozitivnih cijelih brojeva označavamo sa $\mathbf{Z}^+$:

$$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Skup negativnih cijelih brojeva označavamo sa $\mathbf{Z}^-$:

$$\mathbf{Z}^- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}.$$

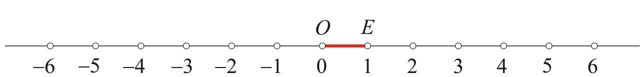
Nula *nije ni pozitivan ni negativan broj.*

Skup $\mathbf{Z}$ možemo zapisati ovako:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}^+.$$

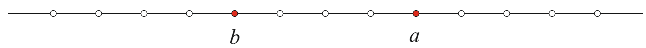
Za dva cijela broja reći ćemo da su **suprotni brojevi** ako su simetrični s obzirom na ishodište. Broj suprotan cijelom broju z bilježimo sa $-z$.

Cijele brojeve prikazujemo na brojevnom pravcu:



Brojeve lijevo od nule zovemo **negativni cijeli brojevi**, a brojeve desno od nule zovemo **pozitivni cijeli brojevi**.

Prisjetimo se kako uspoređujemo dva cijela broja:



Neka su a i b zadani cijeli brojevi.

1. Za cijeli broj a reći ćemo da je **manji** od cijelog broja b i pisati: $a < b$ ako je na brojevnom pravcu a **lijevo** od b.
2. Za cijeli broj a reći ćemo da je **veći** od cijelog broja b i pisati: $a > b$ ako je na brojevnom pravcu a **desno** od b.

Svakom cijelom broju možemo odrediti njegovu udaljenost od nule te definiramo sljedeći pojam:

Apsolutna vrijednost

Apsolutna vrijednost cijelog broja x jest udaljenost toga cijelog broja od nule. Označava se $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Primjer 1.

Uočimo da je po definiciji apsolutne vrijednosti:

$$\begin{array}{ll} |7| = 7 & \text{jer je } \ 7 > 0 \\ |0| = 0 & \text{jer je } \ 0 = 0 \\ |-6| = -(-6) = 6 & \text{jer je } \ -6 < 0, \end{array}$$

što upravo odgovara mjerenju udaljenosti cijelog broja od 0.

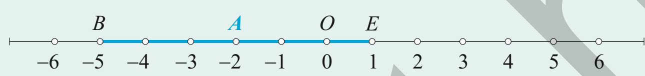
Primjer 2.

a) Odredimo sve cijele brojeve koji su od točke $A(-2)$ udaljeni za 3 jedinice.

b) Odredimo sve cijele brojeve koji su od točke $D(-3)$ udaljeni manje od 5 jedinica.

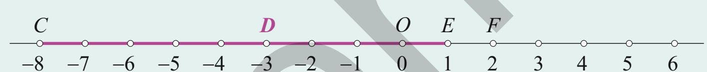
Riješimo zadatak na brojevnom pravcu:

a)

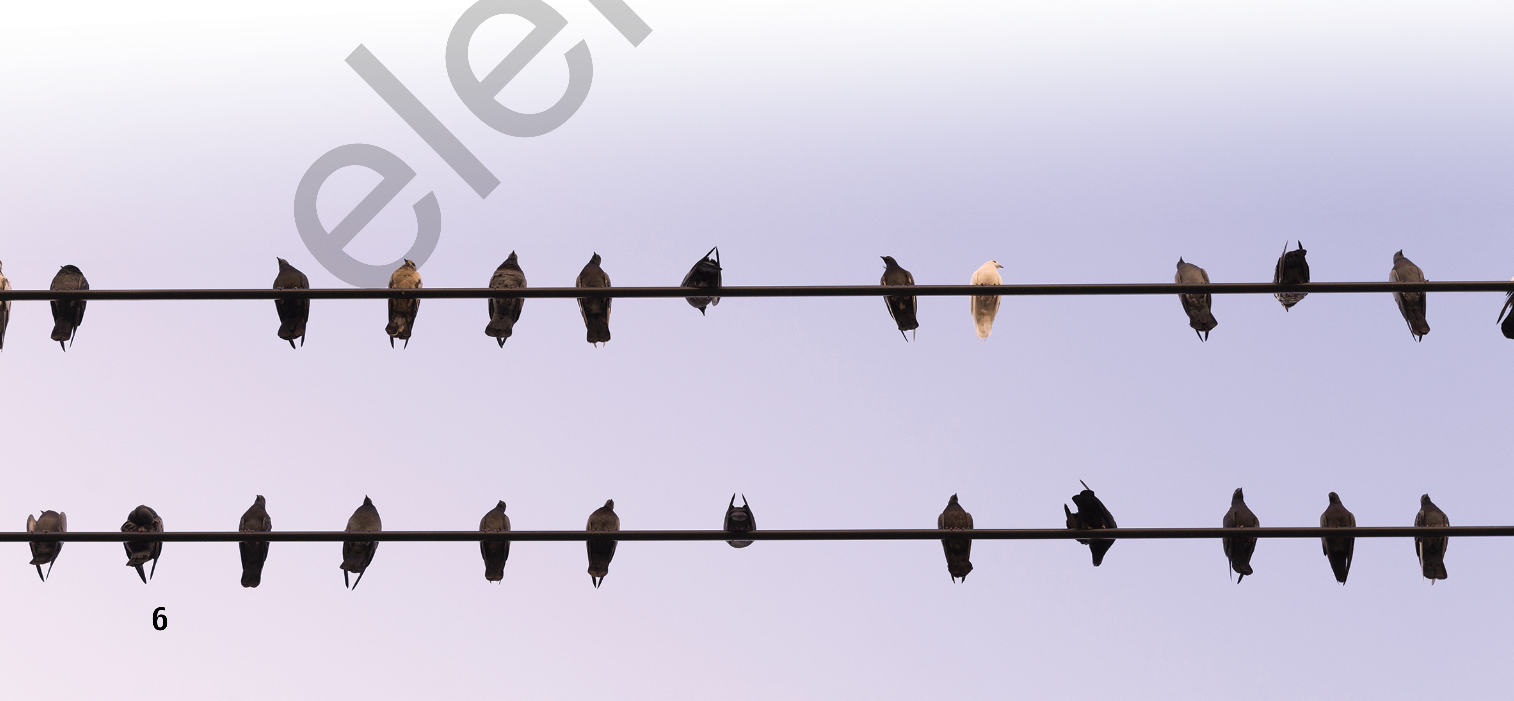


Cijeli brojevi udaljeni od $A(-2)$ za 3 jedinice pridruženi su točkama $B(-5)$ i $E(1)$ pa su to brojevi -5 i 1.

b)



Cijeli brojevi udaljeni od $D(-3)$ za manje od 5 jedinica nalaze se između točaka $C(-8)$ i $F(2)$. To su -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1.



Zadatci za vježbu 1.1.

1. Dopuni tablicu:

z	$-z$	$\lvert z\rvert$
-17		
	142	
		15
$-(-56)$		
	$-(-(-11))$	
		0

2. Dopuni tablicu:

prethodnik od z	z	sljedbenik od z
-17		
	-14	
		15
$-(-56)$		
	$-(-(-11))$	
		0

3. Dopuni tablicu:

z	d	cijeli brojevi koji su od z udaljeni za d
-17	4	
-5	14	
-8		$-4,\ -12$
-56		$-100,\ -12$
	11	$0,\ -22$
-26	30	

4. Odredi broj suprotan zbroju apsolutnih vrijednosti od:

a) -3 i 4

b) -7 i -9

c) 16 i -4.

5. Odredi broj suprotan razlici apsolutnih vrijednosti od:

a) 17 i -2

b) -49 i 15

c) -29 i -14.

6. Odredi apsolutnu vrijednost broja:

a) $-(-17)$

b) $-(-(-13))$

c) $-(-(-(-14)))$.

7. Ispiši sve cijele brojeve koji zadovoljavaju nejednadžbe:

a) $-5 < z < 4$

b) $-12 < z < -6$

c) $-3 \le z \le 4$

d) $\lvert z\rvert < 3$

e) $\lvert z\rvert < 5$

f) $\lvert z\rvert \le 4$.

1.2. Operacije s cijelim brojevima

Zbrajanje cijelih brojeva

Zbrajanje cijelih brojeva

1. Cijeli brojevi jednakih predznaka zbrajaju se tako da zbrojimo njihove apsolutne vrijednosti i rezultatu dodamo predznak koji imaju pribrojnici. Ako je $a \geq 0$, $b \geq 0$, tada je

$$(-a)+(-b)=-(a+b).$$

2. Cijeli brojevi različitih predznaka zbrajaju se ovako:

   a) odredimo apsolutne vrijednosti brojeva koji se zbrajaju
   b) od veće vrijednosti oduzmi manju apsolutnu vrijednost
   c) dobiveni zbroj ima predznak pribrojnika veće apsolutne vrijednosti.

3. Zbroj cijelog broja i njemu suprotnog broja jednak je 0.

$$a+(-a)=0.$$

Primjer 1.

Izračunajmo: $-3+5+(-7)+(-19)+15+(-26)+24+(-5)$.

Najlakše nam je zbrajati cijele brojeve istog predznaka, pa zato u zadatcima s više pribrojnika združimo pribrojnike istog predznaka i prvo njih zbrajamo.

$$\begin{aligned}
&-3+5+(-7)+(-19)+15+(-26)+24+(-5)\\
&\quad=[-3+(-7)+(-19)+(-26)+(-5)]+(5+15+24)\\
&\quad=-60+44\\
&\quad=-16.
\end{aligned}$$

Primjer 2.

Navedimo koja svojstva vrijede za zbrajanje cijelih brojeva.

1. **Komutativnost** – zbroj se neće promijeniti ako pribrojnici zamijene mjesta:

$$\text{za } a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{Z} \implies a + b = b + a.$$

2. **Asocijativnost** – zbroj se neće promijeniti ako združujemo pribrojnike:

$$\text{za } a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{Z},\ c \in \mathbf{Z} \implies (a + b) + c = a + (b + c).$$

3. **Neutralni element** – zbroj se neće promijeniti ako pribrojniku dodamo 0:

$$\text{za } a \in \mathbf{Z} \implies a + 0 = a.$$

4. **Suprotni broj** – zbroj svakog cijelog broja i njemu suprotnog broja jednak je neutralnom elementu:

$$\text{za } a \in \mathbf{Z} \implies a + (-a) = 0.$$

Oduzimanje cijelih brojeva

Oduzimanje cijelih brojeva

Cijele brojeve oduzimamo tako da umanjeniku dodamo broj suprotan umanjitelju. Pišemo:

$$a - b = a + (-b).$$

$a + (-a) = 0$

$+ (a + b) = a + b$

$- (a + b) = - a - b$

Uočimo da smo operaciju oduzimanja sveli na pribrajanje suprotnog broja. Oduzeti neki broj isto je što i dodati suprotan broj.

Primjer 3.

Izračunajmo:

$$-3+5-9-(-11)+3-16-(-50)-14.$$

Računsku operaciju oduzimanja svest ćemo na zbrajanje suprotnog broja i zatim zbrojiti tako dobivene pribrojnike

$$\begin{aligned}
&-3+5-9-(-11)+3-16-(-50)-14\\
&\quad=-3+5+(-9)+11+3+(-16)+50+(-14)\\
&\quad=[-3+(-9)+(-16)+(-14)]+(5+11+3+50)\\
&\quad=-42+69\\
&\quad=27.
\end{aligned}$$

Množenje cijelih brojeva

Množenje cijelih brojeva

Cijele brojeve množimo ovako:

Pomnožimo apsolutne vrijednosti faktora i rezultatu dodamo predznak:

- pozitivan – ako su faktori istog predznaka (oba pozitivna ili oba negativna)
- negativan – ako su faktori različitog predznaka.

Primjer 4.

Kakav predznak ima umnožak 5 negativnih faktora i 3 pozitivna faktora?

Umnožak 3 pozitivna faktora ima pozitivan predznak, to je isto kao množenje pozitivnih brojeva. Dakle, na predznak umnoška utječu samo negativni faktori. Neka su a, b, c, d, $e<0$ tada je: a, $b<0$ pa je $a\cdot b>0$ i c, $d<0$ pa je $c\cdot d>0$.

Iz toga proizlazi: $$a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e=\underbrace{\underbrace{[\underbrace{(a\cdot b)}_{>0}\cdot\underbrace{(c\cdot d)}_{>0}]}_{>0}\cdot\underbrace{e}_{<0}}_{<0}$$

Dakle, umnožak 5 negativnih faktora negativan je broj. Zato je umnožak 5 negativnih i 3 pozitivna faktora negativan broj. Ako je bilo koji faktor jednak nuli, tada je čitav umnožak jednak nuli.

Možemo općenito zaključiti:

Množenje negativnih brojeva

Umnožak parnog broja negativnih faktora je pozitivan broj, a umnožak neparnog broja negativnih faktora je negativan broj.

Dijeljenje cijelih brojeva

Za dijeljenje cijelih brojeva vrijede slična pravila kao za množenje.

Dijeljenje cijelih brojeva

Cijele brojeve dijelimo ovako:

Podijelimo apsolutne vrijednosti djeljenika i djelitelja, a rezultatu dodamo predznak:

- pozitivan – ako su brojevi istog predznaka (oba pozitivna ili oba negativna)
- negativan – ako su brojevi različitog predznaka.

Primjer 5.

Izračunajmo vrijednost ovog brojevnog izraza:

$$-3-\{-2+3\cdot[6-17+5-4\cdot(3-4\cdot5)-3]-[-12-2\cdot(3-6)]\}.$$

U skupu **Z** također vrijede poznata nam pravila o redoslijedu računskih operacija:

Ako nema zagrada, prvo se množi i dijeli, a onda se zbraja i oduzima. Prvo se oslobađamo okruglih, zatim uglatih i na kraju vitičastih zagrada.

$$\begin{aligned}
&-3-\{-2+3\cdot[6-17+5-4\cdot(3-4\cdot5)-3]-[-12-2\cdot(3-6)]\}\\
&\quad=-3-\{-2+3\cdot[6-17+5-4\cdot(3-20)-3]-[-12-2\cdot(-3)]\}\\
&\quad=-3-\{-2+3\cdot[6-17+5-4\cdot(-17)-3]-[-12+6]\}\\
&\quad=-3-\{-2+3\cdot[6-17+5+68-3]-[-6]\}\\
&\quad=-3-\{-2+3\cdot59+6\}\\
&\quad=-3-\{-2+177+6\}\\
&\quad=-3-181\\
&\quad=-184.
\end{aligned}$$

Pridruži zadatku točan rezultat!

$-4-7+19\cdot(-2)=$	-4
$-7\cdot(-16+6)=$	-49
$-96:(37-7\cdot3)=$	70
$56:(-7)+56:14=$	-6

Pronađi pogrešku!

$$64-16\cdot4=51-17\cdot3$$
$$16\cdot4-16\cdot4=17\cdot3-17\cdot3$$
$$16\cdot(4-4)=17\cdot(3-3)$$
$$16=17$$

Primjer 6.

Dokažimo da vrijede sljedeće veze operacija množenja i dijeljenja s operacijom uzimanja apsolutne vrijednosti:

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, tj. apsolutna vrijednost umnoška jednaka je umnošku apsolutnih vrijednosti faktora.
2. Za $b \neq 0$ vrijedi $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, tj. apsolutna vrijednost količnika jednaka je količniku apsolutnih vrijednosti djeljenika i djelitelja.

Dokaz.

1. Ako je $a = 0$ ili $b = 0$, tada je $|a \cdot b| = |0| = 0$.

   Ako je $a = 0$, tada je $|a| = 0$ pa je $|a| \cdot |b| = 0 \cdot |b| = 0$ te vrijedi $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

   Ako je $b = 0$, tada je $|b| = 0$ pa je $|a| \cdot |b| = |a| \cdot 0 = 0$ te vrijedi $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

   Promotrimo sada slučajeve kada su a i b različiti od 0.

   a) $a > 0, b > 0$
   Sada je $a \cdot b > 0$ pa je $|a \cdot b| = a \cdot b$. Međutim, $|a| = a$ i $|b| = b$ pa je $|a| \cdot |b| = a \cdot b$. Znači, vrijedi $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

   b) $a < 0, b < 0$
   Sada je $a \cdot b > 0$ pa je $|a \cdot b| = a \cdot b$. Međutim, $|a| = -a$ i $|b| = -b$ pa je $|a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$. Znači, vrijedi $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

   c) $a < 0, b > 0$
   Sada je $a \cdot b < 0$ pa je $|a \cdot b| = -(a \cdot b)$. Međutim, $|a| = -a$ i $|b| = b$ pa je $|a| \cdot |b| = -a \cdot b = -(a \cdot b)$. Znači, vrijedi $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

   d) $a > 0, b < 0$
   Sada je $a \cdot b < 0$ pa je $|a \cdot b| = -(a \cdot b)$. Međutim, $|a| = a$ i $|b| = -b$ pa je $|a| \cdot |b| = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. Znači, vrijedi $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.