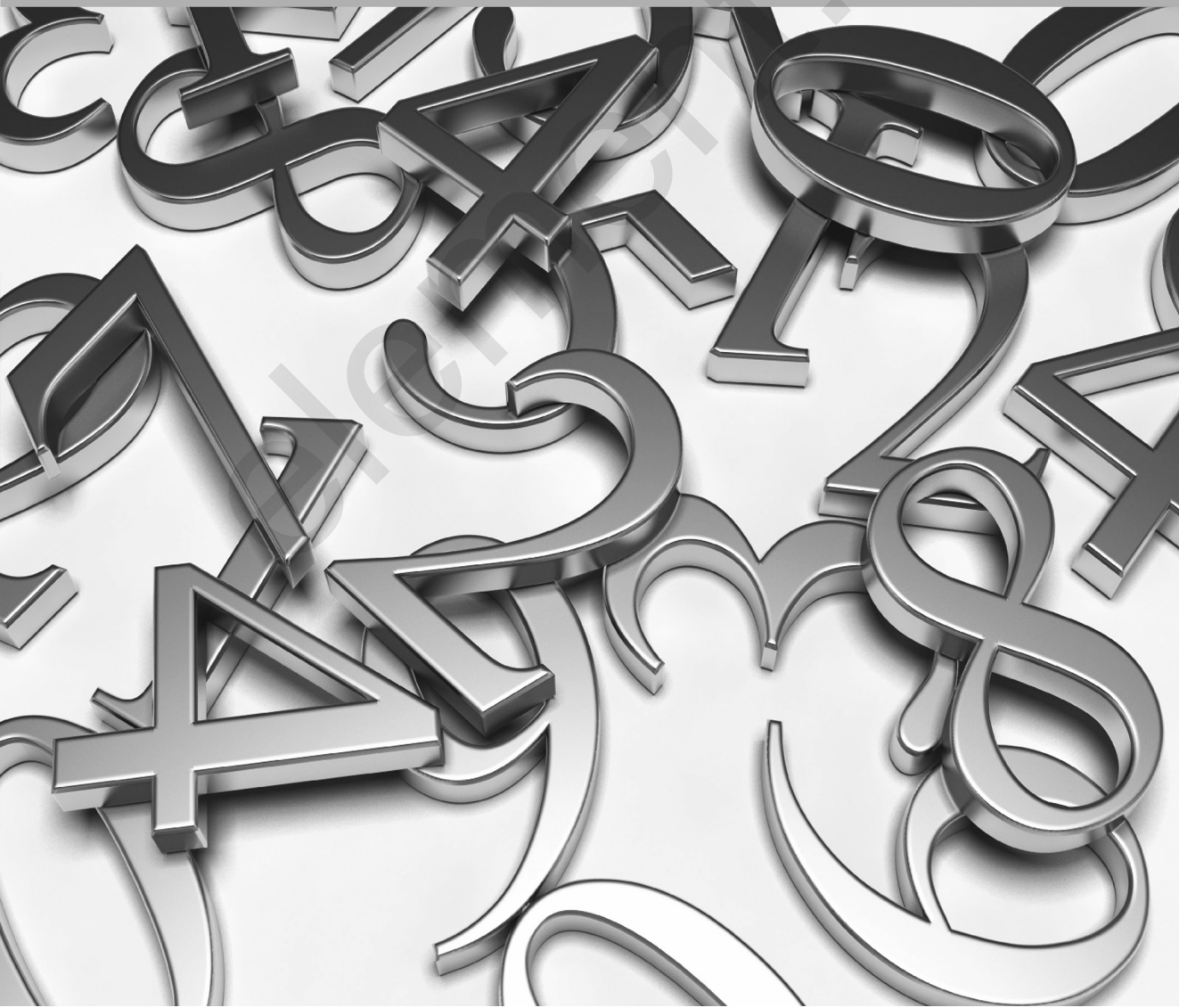
1. Brojevi



Olovku u ruku i računajte!

(jednostavnim računom do zanimljivih rezultata)

Svi smo mi u školi počeli učiti matematiku od brojeva i osnovnih računskih operacija. Cijele su nam bilježnice bile ispisane samim brojkama. Ali u nastavku školovanja brojeva je nekako bivalo sve manje, a slova sve više. Vještina računanja kao da je postala manje važna. Jedan je maturant čak izjavio: "Znam integrirati, ali više ne znam zbrajati!" A otkad su kalkulatori postali roba široke potrošnje, učenici čak i račune poput "12 puta 3" više ne rade bez njih. Uostalom, kao što bismo danas i do prvog uličnog ugla najradije išli automobilom... Ipak, zdravije je ponekad ići pješke, a ostaviti automobil da se ohladi. Isto tako, nije loše unatoč svim kalkulatorima i visokoj teoriji ponekada uzeti papir i olovku i sam nešto izračunati. Ovdje nudim nekoliko računskih zadataka popraćenih tekstom koji će vam osim rekreacije dati i vrlo zanimljive rezultate.

Kamen do kamena. Najveća piramida izgrađena u starom Egiptu je Keopsova piramida kod mjesta Giza (danas predgrađe Kaira). Njezina je osnovica kvadrat stranice $230\,\mathrm{m}$, a visina je oko $140\,\mathrm{m}$. Sve knjige kažu da je u njezinu izgradnju utrošena nevjerojatna količina kamena, ali može li se ta količina malo slikovitije izraziti? Npr., kad bismo od tog kamena sagradili zid visine $2\,\mathrm{m}$, dakle nešto viši od čovjeka, a širine $15\,\mathrm{cm}$, koliko bi on bio dugačak? $1\,\mathrm{km}$? $2\,\mathrm{km}$? Ili možda čak 10?

Volumen piramide je "baza puta visina kroz 3". Dakle,

$$V = (230 \cdot 230 \cdot 140) : 3 = 2{,}47 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^3\,.$$

Zid visine $2\,\mathrm{m}$ i širine $0{,}15\,\mathrm{m}$, a duljine samo $1\,\mathrm{km}$ ima volumen $2\,\mathrm{m} \cdot 0{,}15\,\mathrm{m} \cdot 1000\,\mathrm{m}$, tj. $300\,\mathrm{m}^3$. Dijelimo volumen piramide s volumenom kilometra zida: $2{,}47 \cdot 10^6 : 300 = 8{,}23 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$, tj. traženi zid bio bi dugačak 8230 kilometara. Šupljine u piramidi u ovom računu zanemarujemo.

Koliko daleko bi se taj zid protezao na istok? Valja znati da je Kairo na 30° sjeverne geografske širine i 31° istočne geografske dužine. Opseg Zemlje je na

ekvatoru $40\,000\,\mathrm{km}$, a na 30° je

$$40\,000 \cdot \cos 30^\circ = 40\,000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 34\,640\,\mathrm{km}\,.$$

Naših $8230\,\mathrm{km}$ je $\frac{273}{1000}$ opsega Zemlje na toj širini. Budući da puni krug ima 360°, onda $\frac{273}{1000}$ kruga ima $84{,}2^\circ$ i za toliko bismo stupnjeva geografske dužine morali ići od Kaira na istok. Tada bismo došli otprilike do mjesta koje ima koordinate 30° sjeverne širine i $31^\circ + 84{,}2^\circ = 115{,}2^\circ$ istočne dužine.

Pogledate li kartu svijeta, vidjet ćete da se do tog mjesta može stići isključivo kopnom (prijeđemo li Sueski kanal nekim mostom). Zanemarit ćemo u računu relativno sitne neravnine na površini zemaljske kugle kao što je Himalaja, pa dolazimo do zaključka da se tražena ciljna točka približno nalazi kod grada Xi'an [šian] u središtu Kine! Dakle, pošli bismo od egipatskih piramida starih 4500 godina i stigli do slavnog nalazišta kineske glinene vojske stare 2200 godina! Naime, riječ je o nekih 7000 realističkih figura od terakote u prirodnoj veličini.

Krhki Eiffelov toranj. U prethodnom primjeru imali smo građevinu koja je bila neočekivano masivna. Sada dolazi jedna neočekivano lagana! Slavni Eiffelov toranj u Parizu visok je približno $300\,\mathrm{m}$, a sastoji se od oko 7,3 milijuna kilograma željeza. Ovaj broj kilograma čini se prilično velikim, zar ne?

Kad se običan čovjek susretne s jako velikim brojevima, sve mu je nepojmljivo i sve mu je isto: bilo 8 milijuna kilograma, bilo 28, odnosno je li cijena neke autoceste 835 milijuna kuna ili samo 385... Brojevi nam zapravo kazuju mnogo, ali da bismo iz njih izvukli koristan zaključak, moramo se znati snaći i usporediti ih s nekim drugim, lakše shvatljivim brojevima. Kako bismo se snašli sa spomenutom težinom tornja?

Prvi trik je u prikazu umanjenim mjerilom. Zamislimo model Eiffelova tornja visok samo 1 m! Koliko bi željeza on sadržavao? Model bi bio 300 puta niži, pa prema tome i 300 puta manje dužine i širine. Volumen bi mu stoga bio $300 \cdot 300 \cdot 300$ puta manji. A toliko puta $(27 \cdot 10^6)$ bila bi manja i masa, odnosno težina. Za model bismo trebali željeza u količini $(7{,}3 \cdot 10^6) : (27 \cdot 10^6) = 7{,}3 : 27 \approx 0{,}27\,\mathrm{kg}$. Specifična gustoća ovog metala je $7{,}8\,\mathrm{kg/dm^3}$, pa bi volumen željeza potrebnog za model bio $0{,}27 : 7{,}8 \approx 0{,}0346\,\mathrm{dm^3} = 34{,}6\,\mathrm{cm^3}$. Zamislimo željeznu kockicu

stranice $\sqrt[3]{34{,}6} \approx 3{,}26\,\text{cm}$ – i od takve kockice napravljen model visine $1\,\text{m}$. Ne čini li vam se on prilično krhkim?

Drugi slikoviti pristup problemu je ovaj: toranj stoji na 4 "noge" smještene u vrhovima kvadrata stranice $120\,\text{m}$. Ako svo željezo od kojeg se toranj sastoji izlijemo u taj kvadrat, koliko bi bio visok taj sloj željeza?

Volumen željeza u sastavu tornja računamo tako da masu tornja podijelimo sa specfičnom gustoćom željeza. To je $(7{,}3 \cdot 10^6) : 7{,}8 \approx 935\,897{,}436\,\text{dm}^3$. Izliveno željezo činilo bi jednu kvadratnu prizmu toga volumena, s dvjema stranicama od po $120\,\text{m}$ (ili $1200\,\text{dm}$). Tražimo treću stranicu, a to je visina prizme. Ona iznosi $935\,897{,}436 : (1200)^2 \approx 0{,}65\,\text{dm}$. Drugim riječima, visina bi bila samo $6{,}5\,\text{cm}$!

Napominjem da je ukupna masa tornja oko 10 milijuna kilograma jer u nju ulaze i ne-metalni dijelovi, npr. čak i sama boja teži oko 50 tona! Da bi ova građevina uopće bila napravljena, a pogotovo da bi izdržala predvidive nalete vjetra, upotrijebljeno je jako mnogo matematike, i to ne samo obične aritmetike, nego i takvih teških stvari kao što su nelinearne integralne jednadžbe! Ipak je matematika korisna stvar, što god neki rekli...

More u vlastitom domu. Morska voda je ljekovita, oko toga se svi slažu. Ali što ako živite daleko od mora? Onda biste mogli napraviti morsku vodu metodom *sam svoj majstor*! Jednostavno kupite kilogram morske soli (to je standardna kutija u trgovinama) i, umjesto da je pojedete, otopite tu sol u velikoj posudi s vodom. Pitanje glasi: koliko je soli potrebno za jedan kubni metar vode? Kilogram ili čak dva? Hajdemo izračunati!

Prosječna slanost Jadranskog mora je 38 promila. To znači da $1000\,\text{kg}$ morske vode sadržava $38\,\text{kg}$ soli. Kocka veličine $1\,\text{m} \times 1\,\text{m} \times 1\,\text{m}$ isto je što i $10\,\text{dm} \times 10\,\text{dm} \times 10\,\text{dm}$, tj. $1000\,\text{dm}^3$. Litra nije ništa drugo negoli svakodnevna riječ za $1\,\text{dm}^3$. Dakle, kocka s bridom $1\,\text{m}$ sadržava 1000 litara, što i nije tako puno vode. Litra vode, bilo morske, bilo obične, ima masu od približno $1\,\text{kg}$. Znači, u toj kocki ima $1000\,\text{kg}$ morske vode, a to je $38\,\text{kg}$ soli. Morali bismo kupiti čak 38 kutija soli i sve to sasuti u tu kocku, a ostatak napuniti čistom vodom. Vjerujem da niste ni slutili u koliko se jakoj otopini kupate na ljetovanju!

Stara zvona moga grada. Često se dogodi da brojimo neku stvar više puta i da svaki put dobijemo drukčiji rezultat. Evo jednog takvog laganog, ali možda zabavnog primjera prebrojavanja.

U slavonskom gradu Đakovu postoji katedrala koja zvoni po ovom pravilu: svakih četvrt sata zvoni jednom, svakih pola sata dva puta, a svakih tri četvrt sata zvoni tri puta. U puni sat ona zvoni 4 puta i još onoliko puta koliko je sati. Npr.,

točno u 10 sati ujutro ona zvoni $4 + 10 = 14$ puta. Pritom se sati ne računaju od 1 do 24, nego od 1 do 12. To znači da se 22 sata tretira kao 10 sati, samo navečer. Pitanje glasi: koliko puta zazvoni đakovačka katedrala u jednom punom danu? Računajte najprije sami i recite pošteno jeste li dobili broj 318?

Niste? I dobro da niste. Točan odgovor je 396. Brojimo najprije one udarce zvona koji označuju je li četvrt, pola, tri četvrt ili puni sat. Njih u svakom satu ima $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, dakle u 24 sata ih ima $24 \cdot 10 = 240$. Zatim brojimo udarce koji označuju koliko ima punih sati. Punih sati ima od 1 do 12, i poslije podne još jednom tako od 1 do 12. Suma svih brojeva od 1 do n iznosi $\frac{n(n+1)}{2}$, dakle za $n = 12$ to bi bilo 78. U svakoj polovici dana dakle imamo 78 takvih udaraca, a dnevno ukupno 156. Sve zajedno je $240 + 156 = 396$.

Ljudi koji žive u blizini katedrale vjerojatno tu zvonjavu jedva i primjećuju, ali oni svaki dan poslušaju, htjeli to ili ne, 396 udaraca zvona!

Ova građevina svojom je ljepotom nadaleko proslavila inače neveliki grad Đakovo i očarala svakog posjetitelja. Papa Ivan XXIII., koji je i sam tu bio, rekao je da je to "najljepša crkva između Venecije i Istambula".

Svi na Kvarner. Kad bi se svi ljudi na svijetu stisnuli u jednu hrpu, koliku bi površinu ta hrpa zauzimala?

Na svijetu ima oko 6 milijardi ljudi (2010. godine). Pretpostavimo da na kvadratni metar može stati četvero ljudi. Tada bi svaki od njih imao $0{,}5 \times 0{,}5$ metara prostora. Površina bi bila

$$6\,000\,000\,000 : 4 = 1\,500\,000\,000\,\mathrm{m}^2.$$

$1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$, dakle

$$1\,\mathrm{km}^2 = 1000 \times 1000\,\mathrm{m}^2 = 1\,000\,000\,\mathrm{m}^2$$

Površina bi u km^2 bila $1\,500\,000\,000 : 1\,000\,000 = 1500\,\mathrm{km}^2$. To je otprilike $1/37$ površine Hrvatske $(56\,538\,\mathrm{km}^2)$ ili kvadrat nešto veći od $38 \times 38\,\mathrm{km}$.

Možete li zamisliti da bi se cijelo čovječanstvo moglo zgurati negdje na području između Osijeka, Đakova i Vinkovaca? Ne bismo njime popunili više od jedne Baranje ili Hrvatskog zagorja. Ili, da budem slikovitiji, sav ljudski rod mogao bi

se razmjestiti na kvarnerske otoke Krk, Cres, Lošinj, Rab i Pag. A ostatak našeg planeta bio bi nenaseljen!

Milijarda. Znate li koliko Kina ima stanovnika? Godine 2010. bilo ih je 1 300 000 000 (milijardu i tristo milijuna). Taj veliki broj pruža nam priliku za sljedeću zagonetku. Zamislimo situaciju da svi Kinezi, cijeli narod, moraju stati u jedan red i proći pored slike svog velikog vođe te mu se pokloniti. Ako bi svaki Kinez obavio taj postupak za 3 sekunde i zatim se brže-bolje maknuo da napravi mjesta sljedećem Kinezu, nakon koliko bi se godina čitav narod poklonio?

Nađimo najprije broj sekundi u godini. Broj dana (365) množimo s brojem sekundi u danu (86 400) i dobijemo 31 536 000. Svaki Kinez potroši 3 sekunde pa u jednoj godini pored slike prođe $31\,536\,000 : 3 = 10\,512\,000$ ili više od deset milijuna njih. Znamo brojno stanje Kineza, podijelimo ga s ovih desetak milijuna i dobijemo oko 123 godine. Ali tu je "kvaka"! Za te 123 godine rodit će se nove četiri generacije Kineza, a one također trebaju stati u red! Zapravo bi procesija trajala do vječnosti, a čini se da bi se red k tome još i povećavao, umjesto da se smanji!

Savijanje papira. Sjetite se one neugodne pojave kad se stol počne ljuljati čim se na njega malo naslonite! To je zato što njegove četiri noge nisu jednako izrađene. Čak i u toj situaciji nailazimo na matematičku priču, dapače dvije!

Prije svega, da je stol imao tri noge, on bi stajao stabilno. To je stoga što za svake tri točke u prostoru postoji jedna ravnina koja ih sadržava. Da je tako, vidimo kad spojimo te tri točke u trokut i popunimo ga iznutra, a zatim ga proširimo na sve strane i tako dobijemo jednu ravninu. Kad su tako vrhovi prvih triju nogu definirali jednu ravninu, onda četvrti vrh može, ali i ne mora biti baš u toj istoj ravnini. A ako nije, stol se može zaljuljati!

Što učiniti kad mu vrh četvrte noge ostane u zraku nekoliko milimetara iznad tla? Da bi postao stabilnim, treba između te noge i tla podmetnuti neki predmet točno tolike visine. Najlakše je uzeti komad papira i presaviti ga po pola nekoliko puta dok ne postane debeo točno toliko koliko treba. Tu nastaje druga matematička priča!

Koliko puta treba presaviti list papira da postane debeo 1 cm? List papira debeo je oko 0,2 mm. Ako ga presavijemo po pola, dobivamo papir debljine 0,4 mm. Tako presavijen papir i drugi put presavijemo, pa mu se debljina udvo-

struči na $0{,}8\,\mathrm{mm}$, a treći put postane $1{,}6\,\mathrm{mm}$. Dovoljno je, dakle, tri puta ga presaviti da bude nešto deblji od $1\,\mathrm{mm}$ (ali i površine manje $2^3 = 8$ puta).

Budući da je $1\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{mm}$, pitamo se za koji x je $0{,}2 \cdot 2^x = 10$. Dobivamo $2^x = 50$, odnosno logaritmiranjem po bazi 10 da je $x = \log 50 / \log 2 = 5{,}64$. Dakle, papir treba presaviti šest puta da dosegne (i malo premaši) $1\,\mathrm{cm}$.

Što bi se dogodilo da papir presavijemo 41 put? To ne izgleda mnogo više od šest puta, ali sada više ne savijamo list, nego snop papira koji postaje sve deblji i deblji! Papir bi nakon 41 presavijanja bio debeo $0{,}2 \cdot 2^{41}\,\mathrm{mm}$. Izrazimo to u potencijama broja 10. Kako je

$$\log(0{,}2 \cdot 2^{41}) = \log 0{,}2 + 41 \log 2 = 11{,}64,$$

onda je

$$0{,}2 \cdot 2^{41} = 10^{11{,}64}.$$

Dakle, debljina snopa papira bila bi oko $10^{11{,}64}\,\mathrm{mm} = 10^{11} \cdot 10^{0{,}64}\,\mathrm{mm} = 4{,}3 \cdot 10^{11}\,\mathrm{mm} = 4{,}3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m} = 4{,}3 \cdot 10^{5}\,\mathrm{km} = 430\,000\,\mathrm{km}$. Snop papira bio bi deblji negoli je udaljenost od Zemlje do Mjeseca, koja iznosi $380\,000\,\mathrm{km}$! Dakle, nema šanse da list papira presavijemo 41 put, čak i 10 puta je već previše. Autor ovog teksta uspio je list papira formata A4 presaviti samo 6 puta...

Prohujalo s vihorom. Kutija cigareta u Hrvatskoj u 2012. stoji oko $20\,\mathrm{kn}$. Ako netko popuši dvije kutije dnevno, koliko će on novca potrošiti za 15 godina? (Zanemarimo inflaciju i poskupljenja.)

Dnevno dvije kutije stoje $40\,\mathrm{kn}$, godišnje $365 \cdot 40 = 14\,600\,\mathrm{kn}$ ili oko 2000 eura. Za 15 godina to je $30\,000$ eura ili ekvivalentne valute. Po današnjim cijenama kvadrata stambenog prostora (koji u Osijeku možemo procijeniti na 1000 eura, a u Zagrebu na 1500), to bi bio manji jednosoban stan od $30\,\mathrm{m}^2$. A već za 10 godina to bi bila jedna garsonijera od $20\,\mathrm{m}^2$ u Osijeku ili manjem mjestu. Sve to jedan pušač pretvori u dim!

A koliko za tih 10 godina popijemo vode? Ako jedan čovjek dnevno popije 2 litre, to je godišnje 730 litara ili $0{,}73\,\mathrm{m}^3$. Godišnje ne popijemo niti jednu jedinu kocku stranice $1\,\mathrm{m}$! Kubni metar vode u gradskim vodovodima može danas stajati oko 2 eura. Zato godišnje popijete vode u iznosu od $1{,}46$ eura, a za spomenutih 10 godina, dok ste na cigaretama izgubili cijeli stan, na vodu za piće ste dali samo petnaestak eura! Manje nego što stoji ova knjiga!

Najsavršeniji stroj. Ljudsko srce u prosjeku kuca 72 puta u minuti. Taj se broj smanji kad spavamo, a poveća kad se bavimo sportom ili fizičkim poslom. Uzmimo da je ovo ipak prosjek. Koliko onda otkucaja srce napravi tijekom života ako on traje 70 godina?

Da bismo doznali broj minuta u životu, moramo pomnožiti broj godina (70) s brojem dana u prosječnoj godini $(365{,}25)$, s brojem sati u danu (24) i još s brojem minuta u satu (60). A sve to skupa s prosječnim brojem otkucaja po minuti (72). Rezultat je

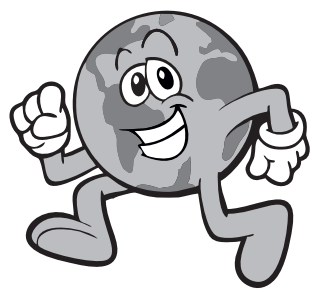
$$70 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 72 = 2\,650\,838\,400 \text{ otkucaja.}$$

Preko dvije milijarde!

Kad bismo ga uspoređivali s mehaničkim uređajima, srce bi bilo jedna crpka, ili "po hrvatski" pumpa. Ono u minuti protjera 5 litara krvi dok spavamo, a 20 dok naporno radimo. Recimo da je nekakav prosjek 10 litara po minuti. Kako dan ima 1440 minuta, to vam je $14\,400$ litara na dan, odnosno $14{,}4$ kubnih metara te tekućine! Koliko je to litara u cijelom životu? Mogli bismo ponoviti ono veliko množenje, s time da umjesto broja 72 (otkucaja po minuti) uzmemo 10 (litara po minuti). Ipak, lakše je gotov rezultat podijeliti sa 72 i pomnožiti sa 10. A to znači podijeliti ga sa $7{,}2$. Dobijemo $2\,650\,838\,400 : 7{,}2 = 368\,172\,000$ litara, odnosno $368\,172\ \mathrm{m}^3$.

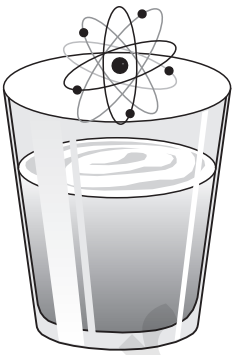
To je kao kocka stranice $71{,}67\ \mathrm{m}$. Odakle nam taj broj? Volumen kocke je "stranica na kub". Stoga je stranica "treći korijen iz volumena", a $\sqrt[3]{368\,172} \approx 71{,}67$. Zamislite si tu kocku ako možete i promislite kako sav taj posao odradi pumpa veličine šake! Stoga odbacite cigarete, alkohol... i sve drugo što joj šteti, a potom kupite onaj stan iz prethodnog zadatka!

Brzina naša svagdašnja. Zemaljska kugla giba se oko Sunca po putanji koja je otprilike kružnog oblika, a polumjer tog kruga je $149{,}6$ milijuna kilometara. Taj put Zemlja obiđe za godinu dana. Pitanje glasi: koja je prosječna brzina Zemlje? Ide li naš planet sporo kao puž ili juri kao metak?



Računajmo ovo za početak u kilometrima po sekundi. Astronomska godina ima oko $365{,}25$ kalendarskih dana, dan 24 sata, sat 60 minuta, a minuta 60 sekundi. Ukupno sekundi u godini ima $365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,557\,600$. Opseg kruga u kilometrima je $2 \cdot 149\,600\,000 \cdot 3{,}1415 = 939\,936\,800\,\mathrm{km}$. Podijelimo ovo s vremenom, pa dobijemo prosječnu brzinu $29{,}78\,\mathrm{km/s}$. Dakle, naša velika kugla zajedno s nama juri 30 kilometara u svakoj sekundi. To je brzina kojom biste od Osijeka do Zagreba ili od Splita do Zagreba stigli za oko 10 sekundi! A kad bismo je izrazili u kilometrima na sat, dobili bismo strahovit broj od $3600 \cdot 29{,}78 = 107\,208\,\mathrm{km/h}$. Radi usporedbe sjetimo se da je brzina zvuka $330\,\mathrm{m/s}$ ili $330 \cdot 3{,}6 = 1188\,\mathrm{km/h}$. Mi jurcamo po svemiru oko 90 puta brže od zvuka! Što drugo reći nego: "Drž'mo se dobro da ne ispadnemo!"

Kratko i jasno. Koliko atoma ima u čaši vode?



Ne mislim na staklo od kojeg je čaša napravljena, nego na vodu koja je unutra. Volumen standardne čaše je 2 "deci", tj. 2 decilitra ili 0,2 litre ili $0{,}2\,\mathrm{dm}^3$. Da bismo znali kolika je to masa, moramo znati specifičnu gustoću vode. U školskim udžbenicima iz fizike postoje tablice gustoće za razne tvari, od kojih je vodu bilo najlakše zapamtiti. To je $1\,\mathrm{g/cm}^3$ ili $1\,\mathrm{kg/dm}^3$ ili $1000\,\mathrm{kg/m}^3$. Ovaj drugi broj je najpraktičniji jer lijepo i jasno kaže da je litra vode kilogram. Dakle, $0{,}2\,\ell$ je $0{,}2\,\mathrm{kg}$ ili $200\,\mathrm{g}$.

Sljedeći korak obuhvaća malo kemije. Kemijski simbol za vodu je H_2O, što znači da molekula vode ima dva atoma vodika (H) i jedan atom kisika (O). Periodni sustav elemenata, koji je temelj cjelokupne kemije, sadržava i podatke o masama atoma, izražene u tzv. atomskim jedinicama. Za vodik ta masa iznosi 1, a za kisik 16. Stoga molekula vode ima masu od $1 \cdot 2 + 16 = 18$ atomskih jedinica.

Mol je jedinica za količinu tvari. Jedan mol je onoliko grama neke tvari koliko brojčano iznosi njezina molekulska masa izražena u atomskim jedinicama. To znači da 1 mol vode zapravo predstavlja 18 grama vode. (Da nije u pitanju voda, nego nešto drugo, onda 1 mol te druge tvari ne bi bio 18 grama, nego neki drugi broj.) U spomenutih 200 grama ima $200 : 18 = 11{,}111$ molova vode.

Mol je tako definiran da u jednom molu tvari ima $6{,}022 \cdot 10^{23}$ molekula te tvari. Ta se konstanta zove Avogadrov broj. Sada znamo da u molekuli vode ima tri atoma, znamo koliko tih molekula ima u molu, a znamo i koliko molova ima u čaši. Obavimo još samo završno množenje:

$$3 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot 11{,}111 = 200{,}7 \cdot 10^{23} \approx 2 \cdot 10^{25}\,.$$

To je 20 kvadrilijuna atoma.

Zemlja i Jupiter. Masa planeta Zemlje je $6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, a Jupitera $2 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$. Kad ovo pročitate u astronomskom priručniku i istoga zaklopite, mislim da od svega upamtili niste ništa. Ali okrenimo stvar drukčije: koliko je puta Jupiter masivniji od naše Zemlje, izraženo najbližim cijelim brojem?

Broj $6 \cdot 10^{24}$ zapisan je u eksponencijalnom obliku koji se sastoji od broja 6 (tzv. mantisa), baze 10 i eksponenta 24. U praksi gotovo uvijek imamo bazu 10. Isti smo broj mogli i drukčije zapisati, npr. kao $60 \cdot 10^{23}$ ili čak $6000 \cdot 10^{21}$. Kažemo da je zapis *normiran* ako za mantisu M vrijedi $0{,}1 \leqslant M < 1$, u našem slučaju $0{,}6 \cdot 10^{25}$.

Ako i ne znamo da je Jupiter veći, vidimo to kad ujednačimo eksponente: $2 \cdot 10^{27} = 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{24} = 2000 \cdot 10^{24} > 6 \cdot 10^{24}$. Podijelimo mase:

$$\frac{2 \cdot 10^{27}}{6 \cdot 10^{24}} = \frac{2 \cdot 10^3}{6} = 0{,}3333 \cdot 1000 \approx 333{,}3\ldots \approx 333.$$

Masa Jupitera veća je čak 333 puta. Ovo se već lako pamti i nakon zatvaranja knjige. Eto kako je korisno kad se podatke barem malo analizira! A svakako upamtite i da se ne kaže *planeta*, nego *planet*.

Pa ipak, s računom ne treba žuriti! Da nismo planetima mase zaokružili na "cijeli broj puta deset na nešto", nego uzeli bar jednu decimalu, već bi se omjer malo promijenio. Nakon dovoljno decimala dobili bismo točni omjer $317 : 1$ umjesto lijepog $333 : 1$.

Kako to zbog neke decimale rezultat može biti toliko različit? Pokušajte npr. podijeliti milijun sa 3, a zatim sa bliskim $3{,}01$. Prvi kvocijent ima cjelobrojni dio $333\,333$, a drugi $332\,225$, dakle razlika je više od 1000. To je poznati problem same operacije dijeljenja, ona pokazuje tzv. nestabilnost kad se veliki broj dijeli s mnogo manjim. U ovom slučaju razlika je $0{,}01$, tj. $0{,}33\ \%$ od djelitelja 3, ali odstupanje je znatno. (Za razliku od dijeljenja, operacija zbrajanja nema posebnih problema: ako pribrojnik ima odstupanje $\pm 0{,}001$, toliko je odstupanje i u rezultatu.)

O stabilnosti računskih operacija moramo voditi računa u praksi kad su ulazni podatci nastali nekim mjerenjem pa samim tim mogu sadržavati određenu nepreciznost. A i sama računala doprinose ovom problemu! Tamo zapis realnog broja podliježe tzv. greški zaokruživanja, tj. decimalni broj je "odrezan" na nekoj decimali, doduše dalekoj, ali ipak... Navedene stvari mogu rezultate računa pokvariti, tim više čim je račun složeniji.

Atomi i praznine. Koliko je zapravo jedan atom velik? Veličina atoma je promjenjiva stvar, a zavisi i od toga kako je definiramo. Isto se može reći i za atomsku jezgru. Osim toga, ti podatci ovise i o vrsti kemijskog elementa i o vezi u kojoj se atom nalazi. Ali može se reći da jezgra vodika (jedan proton) ima polumjer od nekih $0{,}87\,\mathrm{fm}$ (femtometara), odnosno $0{,}87 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{pm}$ (pikometara). Tzv. Van der Waalsov polumjer atoma vodika je $120\,\mathrm{pm}$. Stoga je atom vodika širi od svoje jezgre $120/0{,}87 \cdot 10^3 = 140\,000$ puta! Navodno je kod urana (najteži prirodni atom) taj omjer minimalan i iznosi "samo" $1 : 23\,000$.

Vidimo da je ispravna ova školska usporedba: kad bi atom bio poput nogometnog igrališta, jezgra bi bila kao zrno graha u sredini, a elektroni (njih od 1 do 92, ovisno o kemijskom elementu) bili bi glavice pribadača koje bi kružile po vrhu tribina. Sve ostalo u atomu bila bi praznina!

Stari grčki filozof Demokrit (460. pr. n. e. – 370. pr. n. e.) smatrao je da je svijet izgrađen od vrlo sitnih i nedjeljivih atoma (grč. *atomos* – nedjeljiv). On je i prvi čovjek koji je shvatio da je Mliječni put na nebu zapravo udružena svjetlost mnogobrojnih zvijezda. Ali najviše je zapamćen po svojem atomizmu. Čuven je njegov citat: "...po mnijenju slatko, po mnijenju gorko, po mnijenju vruće, po mnijenju hladno, po mnijenju boja, a uistinu atomi i praznina."