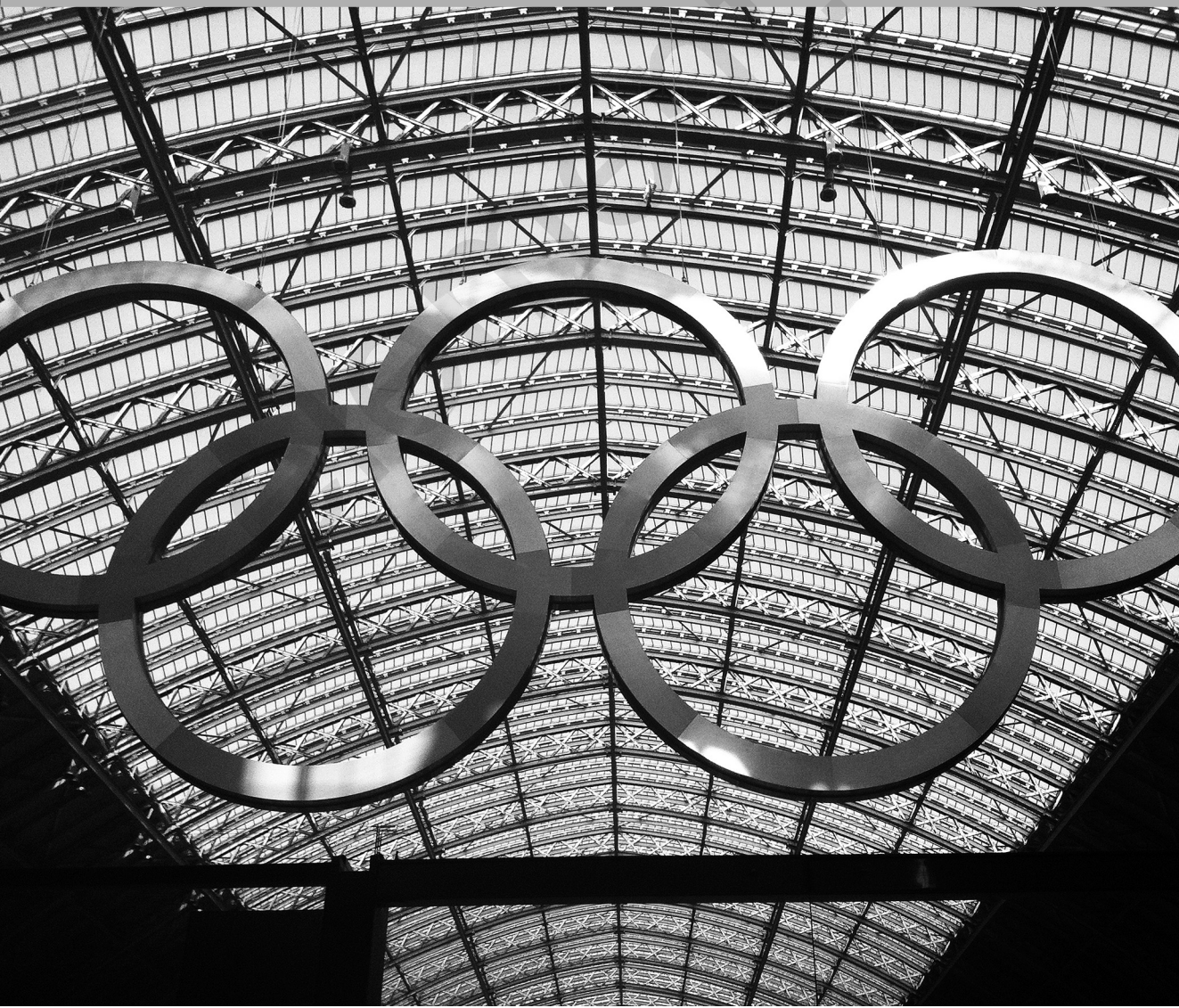
4. Skupovi



Svi se skupa skupimo u skup!

(osnovni pojmovi iz teorije skupova)

Uvod. Kad god čujem nešto o hrvatskom renesansnom piscu Marinu Držiću iz Dubrovnika i o njegovoj komediji koja se zove *Skup*, ne mogu si pomoći, moram pomisliti na matematički pojam skupa. To se valjda zove profesionalna deformacija. Tamo se smijemo starom škrcu Skupu, koji samo zbog novca udaje svoju mladu kćer, kao i bogatom starcu koji je pomislio da je dobro oženiti se mladom djevojkom. A ovdje je riječ o temeljnom matematičkom pojmu.

Definiranje skupa. Koji god udžbenik iz matematike uzmete, pojam skupa definira se slično. Najprije se kaže da je skup mnoštvo nekih objekata. Ponekad se rabe riječi kao *množina*, *kolekcija*, *hrpa* i sl. Svi takvi objekti elementi su tog skupa, a skup se sastoji od tih elemenata.

Nakon toga autori udžbenika pošteno priznaju da su riječi kao *množina* ili *kolekcija* samo sinonimi za riječ *skup* te da ne možemo skup definirati preko nečega što i samo nije definirano. Potom autori dolaze do zaključka da se skup uopće ne može definirati jer je on jedan od temeljnih pojmova matematike. Ne postoji nikakav općenitiji pojam od njega kojemu bi on bio nekakva podvrsta. A tom se zaključku pridružuje i autor ove knjige.

Pojam skupa, dakle, razumijemo samo intuitivno nakon što smo naveli nekoliko primjera, kao što su skup svih cijelih brojeva, skup svih učenika jednog razreda ili skup svih mačaka u gradu. Shvatili smo samo da je skup nešto što ima osobinu da se sastoji od izvjesnog broja nečeg drugog. Jasno? Otprilike kao u anegdoti o ruskoj carici koja je obilazila neku vojnu jedinicu i upitala tamošnjeg generala koja je razlika između topa i haubice. Zbunjeni general je odgovorio: “Pa, vidite, carice, top je jedno, a haubica je nešto sasvim drugo!”

O teoriji skupova. Početkom teorije skupova smatramo godinu 1874. kada je Nijemac Georg Cantor ([kantor]) objavio rad *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. Cantor je tamo definirao skup ovako: *Pod terminom skup smatramo bilo koje združivanje određenih, različitih objekata naše zamjedbe ili misli u jednu cjelinu.*.

Teorija skupova može se shvatiti kao osnova na kojoj je sagrađena čitava matematika. Dijelimo je na tzv. *naivnu teoriju skupova* i na *aksiomatsku teoriju skupova*. Ovdje se bavimo naivnom teorijom skupova. I sam je Cantor mnogo toga napravio bez čvrstog aksiomatskog temelja jer je današnji Zermelo-Fraenkelov sustav aksioma ugledao svijet tek tridesetak godina nakon Cantorova rada. Skraćeno taj sustav zovemo i ZF-sustav, a ime potječe od dvojice njemačkih matematičara: Ernst Zermelo i Abraham Fraenkel. Fraenkel se, kao uvjereni cionist, kasnije iselio u Izrael, pa ga smatramo i izraelskim matematičarom.

U šali bih mogao kazati, premda nije daleko od istine, kako ovaj ozbiljniji dio teorije skupova već pomalo počinje onda kada riječ "skup" više nije dovoljna za opisati objekte kojima se bavite, nego se javljaju i riječi "klasa" i "familija". Po tome se vidi da imate skupove čiji su elementi opet neki drugi skupovi. A ako je elementom nekog skupa čak i on sam, onda ste u teoriji skupova daleko dogurali. Pa još kad počnete razmišljati postoje li skupovi uopće i zatim to dokazivati s pomoću postojanja praznog skupa, onda ste sigurno prešli granicu između dviju teorija skupova i ušli u onu aksiomatsku!

Robert A. Ainsley u šaljivoj knjizi "Blefsikon-Matematika" rekao je kako razlikovati čovjeka koji se bavi čistom matematikom od onog koji se bavi primijenjenom. Čisti matematičar je onaj koji teoriju skupova voli više od seksa ☺ Tek toliko da vidite kako ima i veselijih matematičkih knjiga od ove koju upravo držite u rukama.

Zadavanje skupova. Skupove obično označujemo velikim latiničnim slovima. Za neke često korištene skupove već imamo rezervirana slova: skup prirodnih brojeva $\mathbf{N}$, cijelih brojeva $\mathbf{Z}$, racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$, realnih brojeva $\mathbf{R}$ i kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Skupove možemo zadavati nabrajanjem elemenata ili opisivanjem pravila. Npr., skup A koji se sastoji od brojeva 1, 2, 7 i 23 toliko je malen da ga lako pišemo ovako: $A = \{1, 2, 7, 23\}$. Skup svih parnih prirodnih brojeva možemo doduše pokušati zadati nabrajanjem poput $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ gdje tri točkice znače da se skup nastavlja i da se nadamo kako je čitatelj shvatio na koji se način to nastavlja. Ali bolje je zadati opisom poput $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n \text{ je paran broj}\}$. To znači da se skup A sastoji od prirodnih brojeva n, a nakon okomite crte zapisano je koja dodatna svojstva trebaju imati ti prirodni brojevi koji će biti elementi od A.

Dva su skupa jednaka ako se sastoje od istih elemenata. Pritom je svejedno kojim ste redom elemente skupa nabrajali. Ipak elemente običavamo nabrajati po veličini ili na neki drugi pregledan način.

Nijedan se element u skupu ne može pojavljivati više od jedanput. Postoje, doduše, objekti koje zovemo *multiskupovima* i kod njih je to dozvoljeno, ali njima se u ovoj knjizi ne bavimo.

Osnovni pojmovi o skupu. Sada ćemo ukratko pokazati sve osnovne pojmove glede skupova i operacija s njima. Neka su zadani skupovi $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$, $C = \{3,4\}$, $D = \{3,4\}$, $E = \{8,9,10\}$.

Unija skupova nastaje združivanjem svega postojećega u novi skup: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Nijedan se element unije ne broji dvostruko, makar i došao iz oba skupa. Očigledno je $B \cup A$ ista stvar. *Presjek* skupova je ono što im je zajedničko: $A \cap B = \{3,4,5\}$. Skupovi A i E nemaju ništa zajedničko, pa kažemo da im je presjek prazan skup (oznaka $\emptyset$), a da su A i E disjunktni. *Razlika* prvog i drugog skupa je ono što prvi ima, a drugi nema. Dakle, $A \setminus B = \{1,2\}$. Vidimo da $B \setminus A$ nije ista stvar, nego $\{6,7\}$.

Skup je *podskup* nekog većeg skupa ako je u cijelosti u njemu sadržan. Dakle, C je podskup od A. To pišemo ovako: $C \subseteq A$. Izraz ovog tipa zovemo inkluzija. Znak $\subseteq$ dopušta i da podskup bude jednak nadređenom skupu. Jasno je da za sam skup A vrijedi $A \subseteq A$. Ali C je "pravi" podskup od A jer nije jednak njemu. Ako to naglašavamo, onda pišemo $C \subset A$. Jedan skup može imati više podskupova. Npr., podskupovi od E su $\emptyset$, $\{8\}$, $\{9\}$, $\{10\}$, $\{8,9\}$, $\{8,10\}$, $\{9,10\}$ i $\{8,9,10\}$. Sve podskupove od nekog skupa A možemo povezati u jedan novi skup koji zovemo *partitivni skup* od A ili $\mathcal{P}(A)$. Ako je A imao n elemenata, $\mathcal{P}(A)$ će ih imati 2^n.

Dokazivanje jednakosti skupova. Ovo dokazivanje nije uvijek matematičke prirode. Npr., jesu li međusobno jednaki skup svih stanovnika nekog sela starijih od 16 godina i skup svih stanovnika tog sela koji su završili osnovnu školu? Treba otići u selo i raspitati se. Nitko međutim ne zna je li "skup svih planeta, osim Zemlje, na kojima postoji život" prazan skup ili nije!

Često se za dokazivanje jednakosti dvaju skupova moramo koristiti nekim drugim granama matematike. Npr., jesu li skupovi $A = \{1,2,-3\}$ i $B = \{x \in R \mid x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\}$ jednaki? Da bismo na ovo odgovorili, moramo riješiti kubnu jednadžbu i vidjeti jesu li ovo rješenja. A kakav je skup svih četvorki prirodnih brojeva (a,b,c,n) za koje je $n > 2$ i $a^n + b^n = c^n$? Da se dokaže kako je taj skup prazan, trebalo je više od 350 godina rada brojnih matematičara! (Tzv. veliki Fermatov teorem.)

Zanimljiv je zadatak dokazivanje neke jednakosti koja sadržava skupovne operacije. Ilustrirajmo to jednim primjerom. Dokažimo da je $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$!

Metoda dokazivanja ovakvih tvrdnji je sljedeća. Ako su dva skupa X i Y jednaka, onda vrijede obje tvrdnje: $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq X$, inače ne. Dokazujemo, dakle, obje inkluzije.

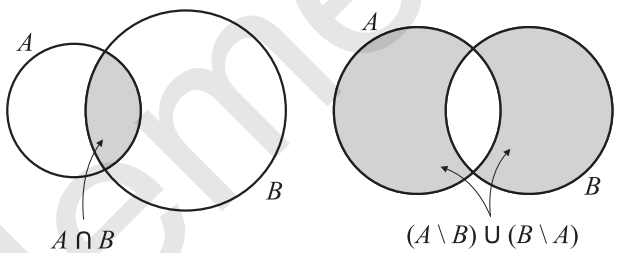
A kako se dokazuje pojedina inkluzija, npr., $A \subseteq B$? Tako da se "spustimo" s razine skupova na razinu njihovih elemenata. Uzmemo proizvoljan element iz A i nekako dokažemo da se on nalazi i u B. Budući da je izbor bio proizvoljan, "dignemo" se na razinu skupova i kažemo da se i cijeli skup A nalazi u skupu B.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \in A \setminus (B \cup C)$. Dakle, $x \in A$ i $x \notin (B \cup C)$. Slijedi $x \in A$ i $x \notin B$ i $x \notin C$. Znajući ove tri tvrdnje o elementu x, pogledajmo desnu stranu inkluzije. Vidimo izraz $(A \setminus B)$. Već znamo da je $x \in A$ i $x \notin B$ pa slijedi po definiciji da je $x \in (A \setminus B)$. S druge strane, budući da je $x \in A$ i $x \notin C$, slijedi po definiciji da je $x \in (A \setminus C)$. Onda je po definiciji presjeka $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Time je dokazana lijeva inkluzija $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Slijedi dokazivanje desne inkluzije: $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$.

Iz $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ slijedi da je istovremeno $x \in (A \setminus B)$ i $x \in (A \setminus C)$. Odatle je nužno da je $x \in A$ i $x \notin B$ i $x \notin C$. Iz $x \notin B$ i $x \notin C$ slijedi da $x \notin (B \cup C)$, a već smo prije rekli da je $x \in A$. Po definiciji razlike skupova onda je $x \in A \setminus (B \cup C)$. Time je dokazana i druga inkluzija pa prema tome i cijela jednakost.

Vennovi dijagrami. Skupove možemo slikovito prikazivati s pomoću geometrijskih likova, uglavnom onih zakrivljenih kao što su krugovi, elipse i sl. Unutar takvog lika možemo po potrebi upisati i elemente skupa. S pomoću ovih likova vrlo zorno predočujemo skupovne operacije (unije, presjeke, razlike i njihove kombinacije), kao i odnose među skupovima. Ti se likovi zovu Vennovi dijagrami. Vjerujem da vam nikada nije rečeno po kome su oni dobili ime. John Venn (1834. – 1923.) bio je britanski logičar i filozof.



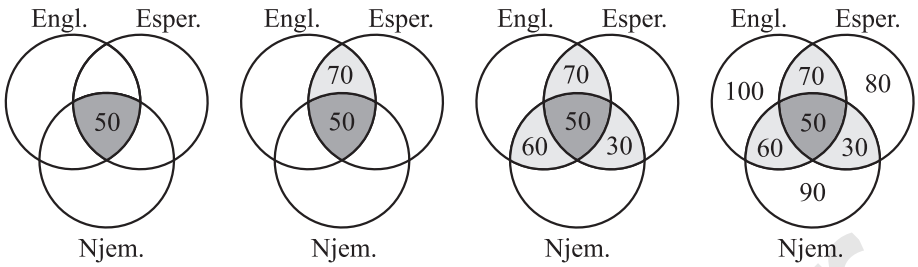
Na lijevoj slici krugovi A i B predstavljaju neke skupove A i B. Prostor sive boje pripada i jednom i drugom krugu, a predstavlja presjek skupova A i B.

Na desnoj slici je tzv. simetrična razlika skupova A i B. To je sve ono što pripada bilo kojem od ta dva skupa, a ne pripada onom drugom.

Simetričnu razliku skupova A i B označujemo sa $A \Delta B$ i jednaka je $B \Delta A$.

Svaki učenik jedne škole uči barem jedan (a možda i više) od sljedećih stranih jezika: engleski, njemački i esperanto. Profesor iz engleskog jezika ima na svom popisu 280 učenika, profesor iz njemačkog 230, a profesor iz esperanta ima na popisu također 230 učenika. Engleski i esperanto (a možda i njemački) uči 120 učenika, engleski i njemački (možda i esperanto) 110, a njemački i esperanto (možda i engleski) 80. Čak 50 učenika može se pohvaliti da uči sva tri jezika.

Pitanje glasi: koliko u toj školi ima učenika?



Na gornje četiri slike imamo po tri kruga, a svaki predstavlja učenike koji uče određeni jezik. U sredini prve slike je malo obojeno područje koje pripada svim trima krugovima. Ono predstavlja učenike koji uče sva tri jezika, a njih ima 50.

Na drugoj slici imamo obojeno još jedno područje. Ta dva područja zajedno predstavljaju presjek krugova "engleski" i "esperanto", odnosno predstavljaju učenike koji uče ta dva jezika. Tamnije obojeno područje su oni učenici koji osim ta dva jezika uče još i treći (njemački), a svjetlije obojeno su oni učenici koji osim ta dva jezika ne uče njemački. Budući da engleski i esperanto uči 120 učenika, a 50 je u tamnijem području, onda za svjetlije preostaje 70.

Na trećoj slici smo na isti način popunili još dva svjetlije obojena područja. Budući da engleski i njemački uči 110 učenika, od čega 50 uči i esperanto, znači da njih 60 uči samo engleski i njemački. Isto tako, samo esperanto i njemački uči njih 30.

Konačno na četvrtoj slici popunjavamo preostala bijela područja. Engleski jezik npr., uči 280 učenika, pa kad odbijemo njegove presjeke s ostalim jezicima (50, 60, 70), preostaje točno 100 učenika koji uče jedino engleski. Tako dobivamo i 80 njih koji uče samo esperanto i 90 koji uče samo njemački.

Ukupan broj učenika ove škole dobijemo kad zbrojimo sve brojeve na zadnjoj slici, a to je 480.

Da malo skrenemo s teme – znate li kakav je jezik taj esperanto? On je planski napravljen koncem 19. stoljeća, ali živi i danas, a ima dva cilja. Prvi je da komunikacija među ljudima različitih nacija bude pravedna i ravnopravna jer bi se govorio jedan jezik koji je neutralan, a ne jezik koji bi jednog od sugovornika stavio u povlašten položaj. Esperanto ne bi niti jednu naciju stavio u povlašten položaj samo zato što je trenutačno bogatija ili jača od drugih. Drugi je cilj da ta komunikacija bude mnogostruko lakša i jeftinija jer je taj jezik upravo tako planski i napravljen da se mnogo lakše nauči. Dakle, štedio bi vrijeme, novac i energiju. Zato se zasniva na latiničnim slovima, internacionalnim riječima, kratkoj i pravilnoj gramatici i slobodnoj tvorbi riječi prefiksima i sufiksima. No budući da nema iza sebe neku državu ili multinacionalnu kompaniju, on zahtijeva mase pristalica koje bi ga naučile dobrovoljno i uglavnom bez profita, bilo radi opće kulture, dru-

ženja diljem svijeta ili zbog idealističkog doprinosa boljem svijetu u budućnosti. Hrvatski savez za esperanto ima stranicu `http://www.esperanto.hr`.

Navalite na kolače! Na igralištu velikog dječjeg vrtića igralo se 100 djece. Tada je došla kuharica i donijela im 4 vrste kolača. Svaku je vrstu složila na poseban stol. Na jednom se stolu tako našlo 70 krafni, na drugom 75 kocki pite od jabuka, na trećem 80 kiflica s pekmezom i na četvrtom 85 uštipaka.

Djeci je rečeno da svako pojedino dijete smije uzeti po jedan kolač sa svakog stola kod kojeg je stajala po jedna odgojiteljica i dijelila djeci po jedan kolač s tog stola. Nije se dakle moglo dogoditi da neko dijete uzme npr., 2 ili više krafni, ali se moglo dogoditi da neko dijete ne stigne na red jer je svake pojedine vrste bilo manje od 100. Budući da su se sva djeca gurala da dobiju što više kolača, neki su dobili po kolač od 2 ili 3 vrste, a neki i od sve 4.

Pitanje glasi: koliko je minimalno djece uspjelo pokupiti po kolač od sve 4 vrste?

Njih 70 dobilo je po krafnu, dakle 30 ih nije dobilo. Njih 75 je dobilo pitu. Želimo postići da što manje djece dobije sva 4 kolača, pa ćemo tih 75 rasporediti tako da ih 30 bude među onima što nisu dobili krafnu, dakle ostaje barem 45 koji su dobili i krafnu i pitu. Od 80 djece koji su dobili kiflice, rasporedimo njih 55 među one što nisu dobili oba prethodna kolača $(100 - 45 = 55)$. Ostaje nam $80 - 55 = 25$ koje moramo rasporediti među one koji su dobili oba prethodna kolača, dakle sigurno je barem 25 djece dobilo sve 3 dosadašnje vrste kolača: krafne, pitu i kiflice. Preostalih 75 djece su možda nešto dobili, ali svakako nisu dobili baš sve 3 vrste. Stoga među njih 75 rasporedimo one koji su dobili uštipak, ali još uvijek preostaje 10 njih s uštipkom koji moraju imati i prethodne 3 vrste kolača.

Stoga smo sigurni da je barem 10 djece dobilo sve 4 vrste kolača. Ipak, uz malo više sreće, taj broj mogao je biti i veći od 10. No nikako nije mogao dosegnuti 100 jer znamo da nije bilo nijedne vrste dovoljno za svakoga. Koliki je onda najveći broj djece koja su, uz najveću moguću sreću, dobila sva 4 kolača? Jednostavno, uzmemo najmanji od 4 broja iz skupa $\{70, 75, 80, 85\}$, a to je 70. Za njih 70 bilo bi dovoljno kolača da od svake vrste dobiju po jedan, ali za 71 učenika već bi jedan bio zakinut za svoju krafnu!

Imaš svojstva – nađi skupove! Odredimo skupove A i B takve da vrijede istovremeno ova četiri uvjeta:

a) $A \cup B = \{x \in \mathbf{N} | x \leqslant 6\}$

b) $A \cap B = \{x \in \mathbf{N} | x \leqslant 4\}$

c) $\{4, 6\} \not\subset A$

d) $\{5, 6\} \not\subset (B \setminus A)$

Iz uvjeta a) vidimo da je riječ o prirodnim brojevima i da ih ima samo šest. Samo još ne znamo koje od njih treba rasporediti u skup A, a koje u B. Iz uvjeta b) vidimo da se brojevi 1, 2, 3 i 4 nalaze kao elementi u oba skupa, pa još preostaje odrediti kamo spadaju 5 i 6.

Uvjet c) znači da skup $\{4,6\}$ nije podskup od A, što nam govori da brojevi 4 i 6 nisu oba istovremeno u A. Budući da je $4 \in A$ (prema uvjetu b)), onda ne smije biti $6 \in A$. Dakle, $6 \in B$. Iz $6 \notin A$ pak slijedi $6 \in (B \setminus A)$.

Uvjet d) kazuje nam da ne mogu biti oba broja 5 i 6 u $B \setminus A$. Kako broj 6 jest unutra, onda broj 5 nije. Ako 5 nije u $B \setminus A$, onda on ili uopće nije u B, ili je istovremeno i u B i u A. Ovo zadnje otpada jer bi onda 5 bio u presjeku A i B, što po drugom uvjetu nije ispunjeno. Dakle, $5 \notin B$.

Iz svega ovoga vidimo da je $A = \{1,2,3,4,5\}$ i $B = \{1,2,3,4,6\}$.

Asocijativnost presjeka. Provjerite valjanost skupovne jednakosti $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ na primjeru sljedećih skupova:

$A = \{$ nenegativni cijeli brojevi manji od $6\}$,

$B = \{$ parni prirodni brojevi manji od 9 i još broj $3\}$,

$C = \{$ jednoznamenkasti djelitelji od $105\}$.

Najprije odredimo koje elemente ima koji skup:

$A = \{0,1,2,3,4,5\}$,

$B = \{2,3,4,6,8\}$,

$C = \{1,3,5,7\}$.

Pogledajmo lijevu stranu jednakosti!

$$A \cap B = \{2,3,4\} \qquad (A \cap B) \cap C = \{2,3,4\} \cap \{1,3,5,7\} = \{3\}.$$

A evo što imamo na desnoj strani:

$$B \cap C = \{3\} \qquad A \cap (B \cap C) = \{0,1,2,3,4,5\} \cap \{3\} = \{3\}.$$

Skupovi su posvuda. Pojam *skup* i svi ostali pojmovi povezani s njim upotrebljavaju se kao univerzalni jezik s pomoću kojeg definiramo matematičke pojmove u gotovo svim granama matematike. Da bismo definirali pojam funkcije, trebaju nam skupovi koje zovemo domena i kodomena. U geometriji krivulje ili likove definiramo kao skupove točaka. Npr., parabola je skup svih točaka koje su jednako udaljene od zadanog pravca i neke čvrsto zadane točke izvan njega. Jednadžbe i nejednadžbe imaju svoje skupove rješenja. U sustavu od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice tražimo zapravo presjek dvaju skupova rješenja. U teoriji grafova, grafovi se sastoje od skupa vrhova i skupa bridova... Primjera je bezbroj!

Zadatci. Zadani su skupovi A i B. S pomoću skupovnih operacija Δ i $\cap$ izrazite uniju $A \cup B$.

Sjetimo se da je $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Kad bi A i B bili disjunktni, bilo bi $A\Delta B = A \cup B$. Nažalost, oni u općem slučaju ne moraju biti disjunktni. No postoje dva disjunktna skupa koja daju tu uniju, a to su npr., A i $(B \setminus A)$. Dakle, $A \cup B = A \cup (B \setminus A) = A\Delta(B \setminus A)$. Ali kako ovaj drugi član $(B \setminus A)$ prikazati s pomoću dopuštenih operacija?

Ako je nekakav skup X sav sadržan u B ($X \subseteq B$), onda vrijedi:

$$B\Delta X = (B \setminus X) \cup (X \setminus B) = (B \setminus X) \cup \emptyset = B \setminus X.$$

Naš traženi izraz $B \setminus A$ isto je što i $B \setminus (B \cap A)$, a spomenuti $(B \cap A)$ čitav je sadržan u B.

Stoga je $B \setminus A = B\Delta(B \cap A)$. Dakle, $A \cup B = A\Delta(B\Delta(B \cap A))$.

Postoji i drugo rješenje! Naime, $A \cup B$ je unija disjunktnih skupova $(A\Delta B)$ i $(A \cap B)$. Budući da je za disjunktne skupove simetrična razlika isto što i unija, imamo $A \cup B = (A\Delta B)\Delta(A \cap B)$.

Slijedi li iz $A \setminus B = C$ da je $A = B \cup C$?

Prva je formula definicija skupa C. Ako taj skup tako definiran uvrstimo u drugu formulu, pitanje bi zapravo glasilo je li točna skupovna jednakost $A = B \cup (A \setminus B)$.

Kad malo bolje pogledamo desnu stranu, vidimo da se traži da cijeli B bude uključen u A, a osim njega i još nešto drugo. No to drugo nas ne zanima. Naime, skup B može biti definiran proizvoljno i smije sadržavati i elemente koji nisu u A. Tada zadana skupovna jednakost ne bi bila ispravna. Dakle, u općem je slučaju odgovor negativan.

Skup A sastoji se od prirodnih brojeva djeljivih sa 4, skup B od onih djeljivih sa 10, a skup C od onih djeljivih sa 75. To su tri beskonačna skupa. Od kakvih se elemenata sastoji skup $A \cap B \cap C$? A kako stoji stvar sa $C \setminus B$?

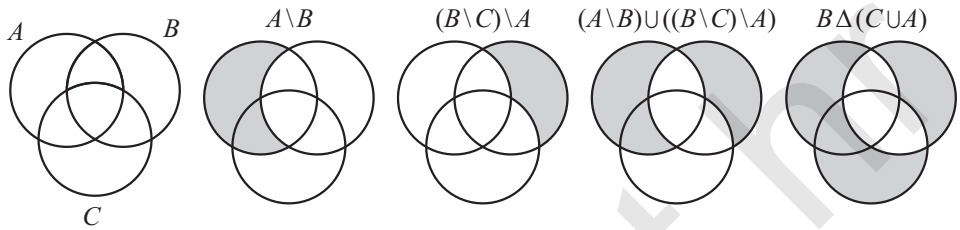
Skup $A \cap B \cap C$ sastoji se od brojeva koji imaju istovremeno sva tri svojstva, dakle djeljivi su s najmanjim zajedničkim višekratnikom od 4, 10 i 75. Od 4 i 10 najmanji zajednički višekratnik očigledno je 20, dok je od 20 i 75 najmanji 300. Stoga se skup $A \cap B \cap C$ sastoji od prirodnih brojeva djeljivih sa 300.

Skup $C \setminus B$ sastoji se od brojeva djeljivih sa 75 koji nisu djeljivi sa 10. Lako vidimo da je umnožak 75 s bilo kojim parnim brojem djeljiv sa 10, a s neparnim nije. Dakle, traženi skup su svi neparni višekratnici broja 75.

Matematika koju je moguće nacrtati. Zadani su proizvoljni skupovi A, B i C. Odredite odnos skupova X i Y ako vrijedi:

$$X = (A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A) \quad \text{i} \quad Y = B\Delta(C \cup A).$$

Drugim riječima, treba ustanoviti jesu li skupovi X i Y uvijek jednaki, disjunktni, imaju li djelomičan presjek ili je jedan od njih podskup drugoga. Zadana dva složena skupa nastala su od samo tri jednostavna koje zovemo A, B i C. Iako se problem može riješiti metodom "proizvoljan element i provjera dvostruke inkluzije", ovdje ćemo ga jednako dobro riješiti grafički. Nacrtat ćemo sva 3 jednostavna skupa, ali ne bilo kako. Da bismo predvidjeli sve moguće slučajeve, nacrtat ćemo ih kako se svaki siječe sa svakim, a postoji i zajednički presjek svih triju. To imate na prvom dijelu slike.



Drugi i treći dio slike su sastavni dijelovi skupa X, a on je u cijelosti prikazan na četvrtom dijelu slike. Na petom dijelu je skup Y. Vidimo da je općenito $X \subset Y$.

A da ipak pokušamo riješiti i onom drugom metodom, metodom "proizvoljni element i dvije inkluzije"? Hoćemo, radi vježbe i radi usporedbe.

Proizvoljni $x \in X$ nalazi se u barem jednom od skupova $(A \setminus B)$ i $((B \setminus C) \setminus A)$. Stoga vrijedi barem jedna od sljedećih složenih tvrdnji:
$(A1)$ $x \in A, x \notin B$ ili
$(A2)$ $x \in B, x \notin C, x \notin A$.
To je ustvari točno ono što vidimo na četvrtom dijelu slike. S druge strane $x \in Y$ ako vrijedi bar jedna od ove dvije tvrdnje:
$(B1)$ $x \in B, x \notin A, x \notin C$ ili
$(B2)$ $x \in A$ i/ ili $x \in C$, ali $x \notin B$.

Ako je $x \in X$ i vrijedi $(A1)$, onda za takav x sigurno vrijedi i $(B2)$, pa je $x \in Y$. Isto tako, ako vrijedi $(A2)$, onda vrijedi i identična tvrdnja $(B1)$, pa je i tada $x \in Y$. Stoga je $X \subseteq Y$.

Vrijedi li i obrat $Y \subseteq X$? Ne, jer neki x može zadovoljavati $(B2)$ na način da je $x \in C$, $x \notin A$ i, naravno, $x \notin B$. Takav, međutim, ne zadovoljava niti $(A1)$ (zbog $x \notin A$), niti $(A2)$ (zbog $x \in C$).

Primjeri za vježbu. S pomoću Vennovih dijagrama možete sami za vježbu dokazati sljedeće skupovne jednakosti:

a) $(C \cup A) \cap (C \cup B) = (A \cap B) \cup C$

b) $(C \cup A) \setminus (B \cup C) = A \setminus (C \cup B$

c) $[B \cap (C \cup A)] \setminus C = (B \cap A) \setminus C$.