9. Varke

Kako "zeznuti" studente matematike

(zadatci za napredne koji sadržavaju neke zamke)

U matematici ne vrijede izjave poput: "To je točno jer je tako rekao Marko ili Janko." Sve se mora provjeriti, odnosno dokazati, a dokaz mora biti svima dostupan. Istina mora biti na prvom mjestu! Ako vaš strogi profesor iz matematike napiše krivu formulu ili krivo računa, vi imate puno pravo (i dužnost) da mu to i kažete, pa makar inače bili među njegovim najlošijim učenicima. A on se ne bi smio naljutiti na vas ni na trenutak!

Ima jedna anegdota koju pamtim nejasno. Poznati matematičar podučavao je nekog plemića i trudio se objasniti mu jedan matematički dokaz, ali ovaj nikako nije htio prihvatiti argumente. Na kraju je matematičar izgubio strpljenje i rekao: "Ali to je zaista tako, ja vam to jamčim!!!" A plemić je sav ozaren uskliknuo: "Pa što niste odmah tako rekli, ta ja znam da ste vi častan čovjek!"

Ako nešto tvrdite ili dokazujete, najprije valja dobro objasniti što se to dokazuje, a sam postupak mora biti temeljit i bez žurbe. Inače se zaboravi neki važan detalj i cijeli dokaz ode u krivo.

Ovdje imate "koktel" zadataka iz različitih područja matematike, ali bez uvodnih objašnjenja, pa se nadam da čitatelj ta područja već bar malo poznaje. U svakom zadatku bit će neka varka, odnosno neka stvar koja je bitna, ali bi se u brzini moglo dogoditi da je preskočite. Posvećujem ovo poglavlje svim studentima matematike koji su brzopleti, ali i svima ostalima koji se osjećaju takvima!

17 = 1. Za "zagrijavanje" pogledajmo izraz $9+8-9-8$.

S jedne strane vrijedi:

$$9+8-9-8=(9+8)-(9+8)=(9+8)\cdot(1-1).$$

S druge strane vrijedi:

$$9+8-9-8=9-8-9+8=(9-8)-(9-8)=(9-8)\cdot(1-1).$$

Dakle,

$$(9+8)(1-1)=(9-8)(1-1).$$

Skratimo ovo sa $(1-1)$ i dobijemo

$$9+8=9-8,$$

ili, "po narodski rečeno", dobijemo $17=1$.

Da smo htjeli dobiti $111 = 1$, uzeli bismo 56 i 55 umjesto 9 i 8.

Drugi primjer glasi:

$$2^2 - 2^2 = (2+2)(2-2)$$

kao razlika kvadrata, a s druge strane možemo izlučiti 2 pa je

$$2^2 - 2^2 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2(2-2).$$

Dakle,

$$(2+2)(2-2) = 2(2-2),$$

što nakon kraćenja sa $(2-2)$ daje

$$2 + 2 = 2.$$

Možemo to i "generalizirati" za proizvoljan broj a:

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$$

pa je

$$a(a-a) = (a-a)(a+a),$$

što nakon kraćenja sa $(a-a)$ daje jednakost

$$a = a + a.$$

Kako je sve ovo moguće? Objašnjenje leži u tome da se brojeve ne može dijeliti s nulom. Uvijek možemo napisati za neka dva različita broja a i b da je $a \cdot 0 = b \cdot 0$, ali to ne znači da tu jednakost smijemo s nulom kratiti i dobiti $a = b$. Uostalom, o čemu mi ovdje govorimo?! Kraćenje je isto što i dijeljenje, a dijeliti s nulom je nemoguće!

Ako ste slušali viceve o Chucku Norrisu, najjačem i najmoćnijem čovjeku na svijetu, koji je u stanju sve učiniti, onda znate da je dijeljenje s nulom uspjelo jedino njemu. Kao, uostalom, i brojenje od 1 do plus beskonačno...

Gubljenje rješenja. Riješimo jednadžbu $x^3 - 2x = x^2$.

Ovo je jednadžba 3. stupnja, ali svi su njezini dijelovi djeljivi sa x. Zato bi brzopleti učenik pojednostavnio stvar dijeljenjem jednadžbe sa x. Dobije se $x^2 - 2 = x$, odnosno $x^2 - x - 2 = 0$.

Ova jednadžba je kvadratna i njezina rješenja su $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. To je sve odlično, "sve pet". Ali početnu jednadžbu očito zadovoljava i $x = 0$. Kako to da onda nismo dobili i njega kao rješenje?

Problem je u tome što se ne smije olako dijeliti jednadžbu s izrazom koji sadržava nepoznanicu x. Mi bismo umjesto dijeljenja smjeli taj x izlučiti. Dobili bismo $x(x^2 - x - 2) = 0$. Dakle, umnožak dviju veličina koji daje nulu. Da bi se to ostvarilo, jedna od njih (bilo koja!) mora biti jednaka nuli. Ako je desni izraz

jednak nuli, dobijemo dva već spomenuta rješenja. Ali i onaj lijevi izraz mogao bi biti nula, a time se dobije i treće rješenje koje je nedostajalo.

Eto zašto kraćenje nije dopušteno: njime bismo potpuno obrisali lijevi izraz, kao da ga nije ni bilo. A on je mogao biti jednak nuli i dati jedno ili više novih rješenja.

Ali ako je taj djelitelj uvijek različit od nule, onda smijemo dijeliti bez straha od gubljenja rješenja! To će biti slučaj kad je djelitelj običan broj, npr., 2, jer broj kao takav ne sadržava u sebi nepoznanicu x. Isto tako, ako tražimo samo realna rješenja, smijemo dijeliti i s izrazima poput (x^2+1) jer on nije nula ni za jedan realni x.

Ponekad ipak kratimo jednadžbe čak i s izrazom koji sadržava x i koji može nositi neko rješenje, ali pod uvjetom da nam sva takva rješenja ionako ne odgovaraju. Npr., kad računamo površinu nekog geometrijskog lika i izražavamo je u varijabli x, tada nam neće trebati rješenja koja su negativna. Ako se pokaže npr., da možemo kratiti sa $(x+1)$, učinit ćemo to bez oklijevanja jer rješenje koje bismo time izgubili je $x=-1$, a ono nam u takvoj situaciji ionako ne odgovara!

I na koncu, ako baš moramo kratiti jednadžbu s nekim "zdravim" izrazom, onda ćemo na kraju pogledati koje smo kandidate tako izgubili i zatim njih pojedinačno provjeriti uvrštavanjem u početnu jednadžbu.

Pojava suvišnih rješenja. Riješimo jednadžbu $x=\sqrt{x}+2$.

Da se riješimo drugog korijena, prebacimo 2 na lijevu stranu jednadžbe i kvadriramo je. Dobijemo $x^2-4x+4=x$, odnosno $x^2-5x+4=0$. Rješenja su $x_1=4$ i $x_2=1$, u što se možemo uvjeriti njihovim uvrštavanjem u kvadratnu jednadžbu.

Međutim, kad uvrstimo ta dva rješenja u *polaznu* jednadžbu, vidimo da $x=4$ zadovoljava, ali za $x=1$ dobijemo $1=3$, što ne zadovoljava! Odakle ovo? Problematičan postupak je bilo kvadriranje jednadžbe. Znamo da npr., $(-5)^2=(+5)^2=25$, ali kad se računa $\sqrt{25}$, onda se, po dogovoru, uzima samo pozitivan korijen, tj. 5. Odbacuje se negativan korijen -5. Dogovor se morao uvesti jer "drugi korijen iz x" ne bi bio funkcija kad bi za isti argument dao čak dvije vrijednosti!

Tako npr. jednadžba $x=\sqrt{25}$ ima samo rješenje $x=5$. S druge strane, jednadžba $-x=\sqrt{25}$ ima samo rješenje $x=-5$.

Ali kad bismo obje jednadžbe kvadrirali, dobili bismo svaki put istu jednadžbu $x^2=25$ što znači da ona sama sadržava rješenja od *obje* polazne jednadžbe. Dakle, koju god polaznu jednadžbu rješavamo, kvadriranjem stvaramo jedno rješenje viška. A u našoj polaznoj jednadžbi $x=\sqrt{x}+2$ uvrštavanjem suvišnog $x=1$ dobije se $1=\sqrt{1}+2$. Kad bi ovdje $\sqrt{1}$ smio biti (-1), onda bi stvar valjala, ali to ne može biti, pa je 1 suvišno rješenje.

Budući da jednadžbe s korijenima moramo u postupku rješavanja prije ili kasnije kvadrirati, to ćemo hladnokrvno i napraviti. Ali nećemo smetnuti s uma da na kraju sva dobivena rješenja provjerimo pokusom, pa odbacimo ona koja ne zadovoljavaju polaznu jednadžbu!

Nula koja se ne vidi. Iz pretpostavke $a+b=c$ dobivamo redom:

$$\begin{aligned}(3a-2a)+(3b-2b)&=(3c-2c)\\ 3a+3b-3c&=2a+2b-2c\\ 3(a+b-c)&=2(a+b-c) \qquad /:(a+b-c)\\ 3&=2.\end{aligned}$$

Objasnite!

Za razliku od prethodnih primjera, ovdje ne dijelimo s brojem 0, nego s nekim algebarskim izrazom koji ne nalikuje nuli. Ali ipak, taj izraz je prema pretpostavci zadatka uvijek jednak nuli! Naime, iz $a+b=c$ slijedi $a+b-c=0$. Neki će pitati: "Pa dobro, to je ipak samo pretpostavka. A što da u zadatku nismo imali tu pretpostavku, kako bismo onda objasnili stvar?" Odgovor je da smo račun već od samog početka provodili držeći se te pretpostavke. Da nije bilo nje, ne bi bilo ni ovog računa.

Miš jednak slonu. Težinu slona označimo slovom s, a miša slovom m. Njihova ukupna težina neka bude $2v$. Iz činjenice $s+m=2v$ dobijemo dvije formule:

$$\begin{aligned}s-2v&=-m\\ s&=-m+2v.\end{aligned}$$

Množimo lijeve strane međusobno, a isto tako i desne:

$$s^2-2sv=m^2-2mv.$$

Dodajemo svakoj strani v^2 i imamo:

$$s^2-2sv+v^2=m^2-2mv+v^2,$$

odnosno:

$$(s-v)^2=(m-v)^2.$$

Iz toga slijedi:

$$s-v=m-v \implies s=m.$$

Q.E.D.

A može i M.J.S. – "Miš Jednak Slonu" ☺

Sjetimo se da za pozitivan broj x i negativan $(-x)$ vrijedi $x^2=(-x)^2$. Dakle, isti kvadrat dobijemo ne samo od dva jednaka broja, nego i od dva suprotna. Zato iz $(s-v)^2=(m-v)^2$ doduše dobijemo $s-v=m-v$, ali isto tako dobijemo i $s-v=-(m-v)$.

Koji je rezultat pravi, to odredimo pokusom. Odakle nam je onda stigao onaj drugi, krivi rezultat? Takvi rezultati često nastaju kvadriranjem jednadžbi. A mogu nastati i množenjem jednadžbe s bilo kakvim izrazom koji sadrži nepoznanicu, što je i ovdje bio slučaj.

Švicarski sir. Što je više sira, više je i rupa u njemu. S druge strane, što je više rupa, to je manje sira, zar ne? A kad ovo spojimo, dobijemo zaključak: "Što je više sira, to je manje sira!". Kako to?

Problematična je druga tvrdnja. Što je više rupa, ali u *istom* siru, to je manje sira. No ako i količina sira raste, onda to ne mora značiti ništa.

Nije sve linearno. Seljak s traktorom za 1 dan izore njivu oblika kvadrata stranice $100\,\mathrm{m}$. Za koliko bi dana izorao kvadratnu njivu stranice $300\,\mathrm{m}$? Nije za 3, kako bi neki pomislili, nego za 9. Naime, ne ore se jedna crta, nego cijela površina. A površina je proporcionalna s kvadratom stranice. Stranica veća 3 puta znači površinu veću 9 puta.

Gubitak novca. Evo dokaza da je $1 \text{ kuna} = 1 \text{ lipa}$!

$$1 \text{ kuna} = 100 \text{ lipa} = (10 \text{ lipa})^2 = (0{,}1 \text{ kuna})^2 = 0{,}01 \text{ kuna} = 1 \text{ lipa}.$$

Htio bih da ovaj primjer dobro prostudirate, nije nimalo trivijalan. Ako biste odmah pročitali odgovor, onda ne biste osjetili pravi doživljaj. Zato ću vam odgovor napisati, ali prikriven obrnutim poretkom!

!itsondejirv entibovrp unintots ončot elkad – 10,0 rotkaf iladod ets emiT .“apil 01” hivon atup en a ,“01 jorb” atup apil 01 ej “apil 001” rej itarirdavk okano ilejms etsiN

Rezultat je čista nula. Koliko je $\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}+\sqrt{3}-3$?

Naizgled tu nema nikakva problema. Kvadrat, pa korijen – to nas vraća na početak i dobili bismo

$$(\sqrt{3}-3)+\sqrt{3}-3 = 2\sqrt{3}-6.$$

Ali ipak oprez! Što bi bilo kad bismo kvadrirali negativan broj, recimo (-2)? Dobili bismo $(+4)$. A kad bismo iz ovoga vadili drugi korijen, ne bismo više dobili (-2), nego $(+2)$. Korijen, po dogovoru, ima samo pozitivno rješenje.

Broj $\sqrt{3}-3$ je negativan jer je $\sqrt{3}<3$. Stoga navedenim operacijama od njega dobijemo njemu suprotan broj, pa imamo:

$$-(\sqrt{3}-3)+\sqrt{3}-3 = -\sqrt{3}+3+\sqrt{3}-3 = 0.$$

Indukcijom do neistine? Dokažite matematičkom indukcijom da je $4^n - 1 + 3 \cdot 10^{n-1}$ djeljivo sa 6.

Za $n = 1$ imamo $4 - 1 + 3 = 6$, što je djeljivo sa 6.

Pretpostavimo da formula vrijedi za neki $n \in \mathbf{N}$ i dokažimo za $n + 1$.

Tada imamo

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 + 3 \cdot 10^n &= 4 \cdot 4^n - 1 + 30 \cdot 10^{n-1} \\ &= (3+1) \cdot 4^n - 1 + (3+27) \cdot 10^{n-1} \\ &= (4^n - 1 + 3 \cdot 10^{n-1}) + 3 \cdot 4^n + 27 \cdot 10^{n-1}. \end{aligned}$$

Izraz u zagradi djeljiv je sa 6 po pretpostavci indukcije. Kad bi i ostatak $3 \cdot 4^n + 27 \cdot 10^{n-1}$ bio djeljiv, dokazali bismo valjanost za $n + 1$.

Da je taj ostatak djeljiv sa 3, to vidimo jer oba pribrojnika sadrže faktor 3 (u koeficijentima 3 i 27). A uz to je djeljiv i sa 2 jer svaki pribrojnik sadrži i potenciju od parnog broja (4, odnosno 10). Stoga je spomenuti ostatak djeljiv sa 6, pa smo "dokazali" ono što se u zadatku tražilo.

Prije nego li odemo proslaviti obavljen posao, provjerimo tvrdnju za $n = 3$. Dobije se

$$4^3 - 1 + 3 \cdot 10^{3-1} = 64 - 1 + 300 = 363,$$

a taj broj nije djeljiv sa 6. Otkud sad ovo???

Sjetimo se kako glasi korak indukcije. Zahtijeva se da za svaki, baš svaki n formula vrijedi i za njegov $n + 1$. Naglasak je na "baš svaki". A navedeni dokaz ima "rupu" za prelazak sa $n = 1$ na njegov $n + 1$ (tj. na broj 2). Zaključili smo da je u izrazu $3 \cdot 4^n + 27 \cdot 10^{n-1}$ onaj drugi pribrojnik djeljiv sa 3 i sa 2. Faktor 3 nije sporan, ali faktor 2 jest. Jer za $n = 1$ se dobije $10^{n-1} = 10^{1-1} = 10^0 = 1$, a to nije djeljivo sa 2. Vidite kako lijepe priče mogu imati tužan kraj!

Ako bismo skup prirodnih brojeva usporedili sa stepeništem, mogli bismo opisati naš problem ovako: na prvu smo stepenicu mogli stati, ali zbog "rupe" se nismo mogli s prve popeti na drugu. Zato nam ništa ne koristi to što bismo inače s druge lako mogli na treću, s ove pak na četvrtu, i sa svake daljnje na njenu sljedeću.

Nastavak priče. Ako trebate još primjera "rupe između prve i druge stepenice", evo jednoga koji se nekad davno stvarno pojavio na jednom pismenom ispitu! "Dokažite" indukcijom da je $3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 7$ djeljivo sa 6 za svaki prirodni n. Ovo je netočna tvrdnja, a njen "dokaz" prepuštam čitatelju! (I baš se pitam kako je asistent ocjenjivao studente u tim okolnostima?!) A jedan još ljepši (i malo maštovitiji) primjer te vrste imate u dijelu "Brojevi", poglavlje o indukciji.

Najveći prirodan broj. "Dokažimo" da je broj 1 najveći prirodni broj!

Za gotovo svaki prirodni broj n vidimo da je n^2 još veći od njega. Stoga takav n nije najveći. Jedino kod broja 1 nije tako. Njegov kvadrat nije veći od njega. Stoga najveći broj ne može biti nijedan drugi broj nego 1.

Ovdje je pogreška u tome što smo uopće uzeli kao sigurno da najveći prirodni broj postoji. Kad bi postojao, i kad svaki drugi osim jedinice ne bi mogao biti najveći, onda bismo ispravno zaključili da jedinica, kao jedini preostali, jest najveći. Ali ako je pretpostavka o postojanju takvog broja kriva, onda se ovaj dokaz ruši i postaje beskoristan. A upravo to i jest slučaj.

A sada mala provjera jeste li pažljivo čitali ovu knjigu. Ovaj primjer je od riječi do riječi napisan na još jednom mjestu u knjizi jer se tamo dobro uklapao. Gdje se on nalazi?

Minimum i maksimum funkcije. Zadana je funkcija $f(x) = -4x^3 + 18x^2 - 24x + 10$. Nađite njezinu najveću i najmanju vrijednost na segmentu $[0, 3]$!

Vrijedan i pošten matematičar ovu bi funkciju derivirao i derivaciju izjednačio s nulom i tako dobio minimume i maksimume funkcije f. A funkcija je polinom, i to ne previsokog stupnja, pa će biti sasvim lako derivirati je i riješiti jednadžbu. Čini se veoma lagan zadatak, čisti "prolaz" na ispitu. Pa hajde da i mi to sve napravimo!

Derivacija glasi:

$$f'(x) = -12x^2 + 36x - 24.$$

Izjednačimo je s nulom i dobijemo kvadratnu jednadžbu:

$$-12x^2 + 36x - 24 = 0,$$

koju dijelimo sa (-12) i dobijemo

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Rješenja su $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. U točki 1 vrijednost funkcije je $f(1) = 0$, a druga derivacija $f''(x) = -24x + 36$ je pozitivna pa funkcija ima minimum. U točki 2 vrijednost funkcije je $f(2) = 2$, a druga derivacija je negativna pa funkcija ima maksimum.

Sada bi spomenuti vrijedni student zaključio da je minimum 0, a maksimum 2. I pao bi na ispitu! Zašto? Zato što metodom "derivacija jednako nula" doznajemo tek *lokalni* minimum i maksimum, ali ne i apsolutni (globalni). Funkcija doduše u $x = 1$ ima lokalni minimum koji iznosi 0, a nakon toga raste sve do lokalnog maksimuma $x = 2$, ali poslije $x = 2$ ona opada, pa će možda na kraju segmenta u $x = 3$ opasti čak i ispod lokalnog minimuma. Zaista,

$$f(3) = -108 + 162 - 72 + 10,$$

tj. $f(3) = -8$, a to je manje od lokalnog minimuma $f(1) = 0$.

Isto tako, $f(0) = 10$, što je veće od lokalnog maksimuma $f(2) = 2$. Dakle, najmanja vrijednost funkcije na $[0, 3]$ je -8, a najveća 10. Student je trebao pažljivije čitati što se od njega traži. Tada bi on pogledao ne samo lokalne ekstreme, nego i rubne točke segmenta!

Osim rješenja jednadžbe $f'(x) = 0$ (koja se nazivaju stacionarne točke funkcije f), te osim rubova zadanog područja, valjalo bi još provjeriti i točke u kojima prva derivacija uopće nije ni definirana. Naime, sama funkcija u njima *može* biti definirana i čak tamo imati i ekstrem! Na takve se primjere jako rijetko nailazi, pa se to u školama rijetko i spominje.

Ako piješ, ne vozi! Ako je točna tvrdnja da 40 % svih prometnih nesreća prouzrokuju pijani vozači, što iz toga možemo zaključiti? Kao prvo, to znači da su ostalih 60 % nesreća prouzročili oni trijezni. Budući da je 60 % veći broj nego 40 %, znači li to da su trijezni vozači opasniji? Tj., da prije vožnje obavezno trebate popiti alkoholno piće jer ćete tako smanjiti mogućnost nesreće?

Ovdje je pogreška u definiciji pojma sigurnosti. Ne trebamo gledati koliko nesreća otpada na pojedinu od te dvije skupine vozača. One se znatno razlikuju po svojoj brojnosti pa trebamo gledati koliko nesreća otpada na istu količinu pojedinaca iz svake od tih skupina!

Naime, od 1000 vozača koji su u jednom trenutku na cesti možda je svega 10 njih s većim postotkom alkohola od dopuštenog. Ako je nastalo 10 nesreća i ako su 40 % tih nesreća prouzrokovali pijani vozači, to bi bile ukupno 4 nesreće. A preostalih 6 prouzrokovali su trijezni vozači. U takvom bi slučaju naša tvrdnja o 40 % bila točna, ali što to govori o sigurnosti?

To znači da je 10 pijanih vozača uzrokovalo 4 nesreće, a njih čak 990 trijeznih uzrokovalo je preostalih 6 nesreća. Dakle jedan je pijani vozač u prosjeku napravio 0,4 nesreće, a jedan trijezni 0,00606 nesreća. Radi bolje vidljivosti uzmimo uzorak ne od 1 osobe, nego od 1000. To znači da bi u prosjeku 1000 pijanih osoba uzrokovalo 400 nesreća, a 1000 trijeznih samo 6 nesreća. A kad bi takvi hipotetski podatci bili točni, ne samo da trijezni ne bi bili opasniji, nego bi pijani bili opasniji $400 : 6 \approx 66$ puta!

Statistika naša svagdašnja. Nakon primjera s vozačima pogledajmo još neke primjere gdje je o statističkim rezultatima potrebno jako pažljivo promisliti!

Klasičan je primjer sljedeći vic: “Ja jedem kupus, on jede meso, a u prosjeku nas dvojica jedemo sarmu!” Smisao bi bio: ja sam siromašan, on je imućan, a statistika sve to izjednači i prikrije. Naime, sarma je jelo načinjeno od mesa i kupusa. Matematika je tu jasna: jedna te ista aritmetička sredina može se postići tako da su svi zadani brojevi u blizini te sredine, ali i tako da pola njih bude mnogo veće, a pola mnogo manje od te sredine. Da bi se vidjela prava slika stvari, potrebna je neka mjera za sva ta pojedinačna odstupanja od sredine, a ona se u statistici zove *varijanca*.

To je kao da od 20 studenata na nekom ispitu njih 18 dobije ocjenu 1 (nedovoljan), 1 student (naš Marko) ocjenu 2 i još jedan student ocjenu 5. Prosjek je $25 : 20 = 1{,}25$. Biste li rekli da je Marko sa svojom dvojkom natprosječno dobar student?

Ako neki ministar izjavi da je opala stopa inflacije, je li to dobra vijest? Ne baš osobito. To znači da inflacija i dalje postoji, samo je malo manja nego prije. Cijene, dakle, i dalje rastu (samo nešto sporije). I još uvijek su visoke jer bi inače ministar dao mnogo jasniju izjavu (i usput pohvalio rad svoje vlade)!

Zamislite grafikon koji na vodoravnoj osi prikazuje vrijeme, recimo u mjesecima, dok okomita os prikazuje broj nezaposlenih u državi. Pritom okomita os ne počinje od nule, nego od nekog velikog broja, recimo od $300\,000$. Ako je broj nezaposlenih u Hrvatskoj u siječnju bio $320\,000$, a u veljači $310\,000$, to će na grafikonu izgledati kao da se broj prepolovio. A da je okomita os počela od nule, to bi dalo vizualan dojam da je stanje tek neznatno promijenjeno – kao što i jest!

Reklama. U današnjem je svijetu teško pobjeći od reklama. No možemo ih barem uzeti "sa zrnom soli". Recimo da nam vele: "Našu zubnu pastu *Zubosjaj* preporučuje $80\,\%$ stomatologa!" Odmah nesvjesno pomislimo da sve ostale zubne paste zajedno vrijede tek $20\,\%$ pa je svaka od njih jako loša. Ali nije to tako!

Nitko vam ne otkriva da su zubari ustvari dobili i druge paste, te da su odobrili mnoge od njih. Možda i s višim postotkom! A pastu *Zubodent* bi možda preporučilo i $99\,\%$ njih, ali im slučajno nije ni pokazana...

Nemojmo misliti tablično! Koliko je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x+1)}{x+1}$? Student će brže-bolje reći da je limes 1. Pritom se on ravnao po poznatoj tvrdnji $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Ona je inače točna i za slučaj $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin nx}{nx}$ jer pomoćna varijabla $u = nx$ također teži u 0 kad x teži u 0. Stoga imamo $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$. Ali primjer iz zadatka samo vizualno nalikuje na naš "tablični" limes. Ovdje je $u = x+1$ i zadani se razlomak zaista pretvara u $\dfrac{\sin u}{u}$, samo što sada nije $u \to 0$, nego za $x \to 0$ vrijedi $u \to 1$. Dakle, ništa od "tabličnog" limesa. Pravo rješenje je $\dfrac{\sin 1}{1} = 0{,}8414\ldots$ A naš tablični limes dobili bismo uz malu prepravku $x \to -1$, naime $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{x+1} = 1$.

Kad smo već kod ovog tipa zadataka, koliko je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$? Jednostavno, brojnik je omeđen, nikad nije veći od 1, niti manji od -1. Kako nazivnik raste u beskraj, limes je 0.