Gordana Gojmerac Dekanić
Petar Radanović
Sanja Varošanec

MATEMATIKA 8

udžbenik za 8. razred osnovne škole

2. dio

ELEMENT

Elektroničkom dijelu ovog udžbenika možete pristupiti na mrežnoj stranici:

ele-udzbenik.hr

Masa tiskanog dijela udžbenika:

$403 \pm 2\sigma$ g

Maloprodajna cijena:

67,00 kn

ISBN 978-953-197-052-5 (cjelina)
ISBN 978-953-197-051-8 (Dio 2)

Radna verzija, 2021-04-28

Gordana Gojmerac Dekanić
Petar Radanović
Sanja Varošanec

MATEMATIKA 8

udžbenik za 8. razred osnovne škole

2. dio

1. izdanje

Zagreb, 2021.

Urednica
Nataša Jocić, dipl. ing.

Recenzenti
prof. dr. sc. Andrea Aglić Aljinović
Ivan Maloča, učitelj savjetnik

Lektorica
Dunja Apostolovski, prof.

Fotografije
Petar Radanović, mag. educ. math.

Crteži, slog i prijelom
ELEMENT d.o.o., Zagreb

Dizajn
Lejla Bužinkić

Nakladnik
ELEMENT d.o.o., Zagreb, Menčetićeva 2
tel. 01/ 6008-700, 01/ 6008-701
faks 01/ 6008-799
www.element.hr
element@element.hr

Tisak
ELEMENT d.o.o., Zagreb

Predgovor

Drage učenice i dragi učenici!

Pred vama je 2. dio udžbenika za 8. razred osnovne škole. Dio je udžbeničkog kompleta koji se sastoji od dviju knjiga, a svaka je namijenjena jednom polugodištu. Udžbenik ima i elektronsku inačicu u kojoj se kao dodatni materijal nalazi cijeli spektar aktivnosti kojima se uvježbava, ponavlja gradivo, pa i vrednuje postignuti napredak.

U udžbeniku je svaka cjelina podijeljena na pojedine nastavne teme i jedinice koje sadrže uvodni problem, obradu matematičkog sadržaja, nekoliko primjera te zadataka. Svaki od tih elemenata istaknut je bojom koja označava različitosti matematičkog sadržaja. Tako su na svjetlosmeđoj podlozi dani primjeri, stranica zadataka je obojena, a prošireni je matematički sadržaj za one koji žele znati više dan na plavoj podlozi.

Tijekom cijele godine u svladavanju gradiva prate vas Ana, Darko, Lucija, Marin i Robotko.

U elektroničkoj inačici udžbenika svaki je primjer popraćen sličnim interaktivnim zadatkom kojemu je svrha procjena razumijevanja prethodnog sadržaja.

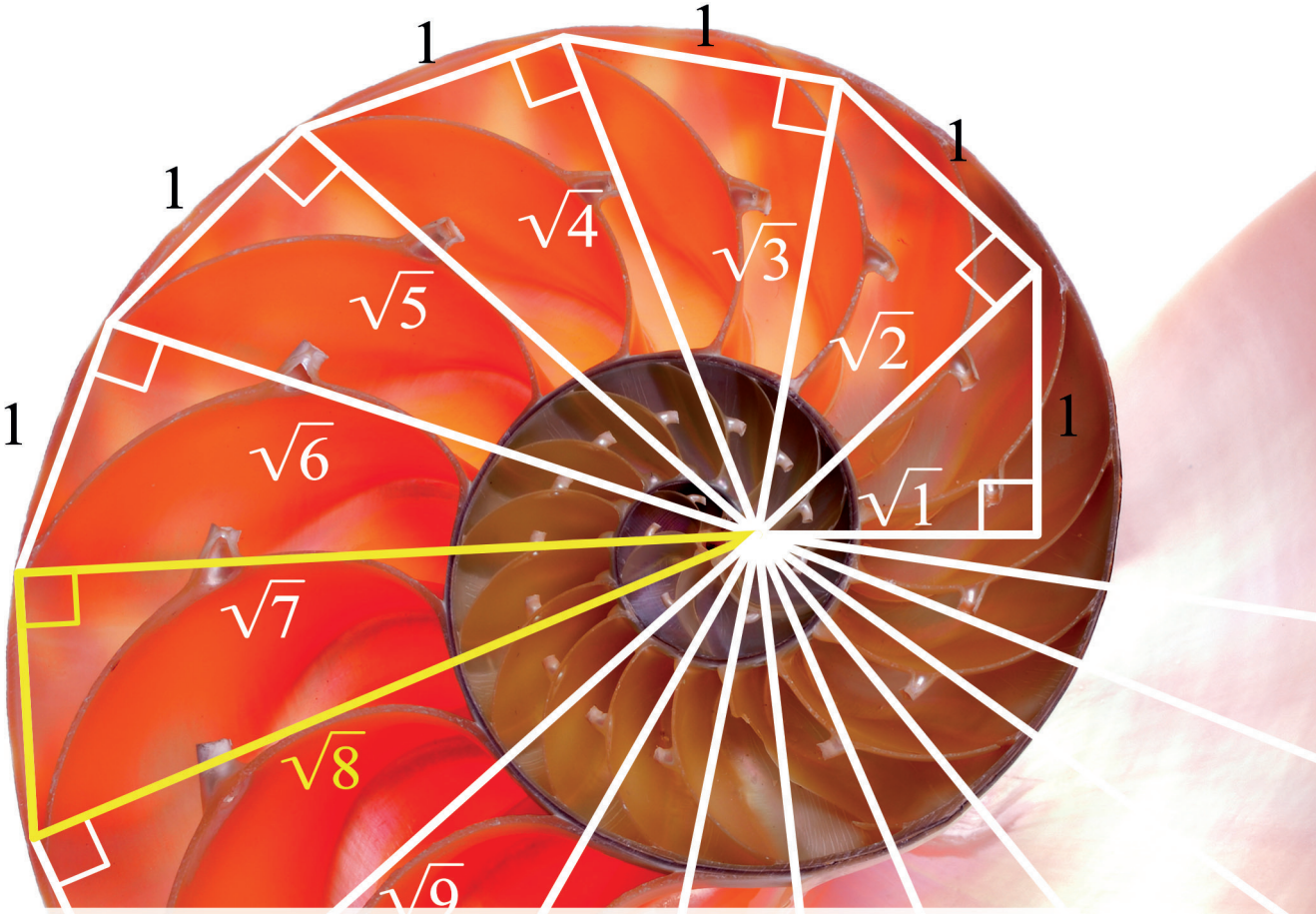
U tiskanom udžbeniku uputu na takve digitalne materijale potražite pod znakovima i .

U elektroničkoj ćete inačici udžbenika naći i križaljke, bojanke, kvizove, složenije zadatke i druge materijale koji pomažu ostvarivanju ishoda učenja. Ishodi i ključni pojmovi usko vezani za pojedinu nastavnu cjelinu nalaze se na početnoj stranici cjeline, a udžbenik je osmišljen tako da ćete moći odabrati važne informacije, bilježiti ih i organizirati te primijeniti u zadatcima, prepoznati i odrediti koji su pristupi rješavanju zadataka korisniji za ostvarivanje ciljeva. Moći ćete procijeniti koliko uspješno rješavate određeni zadatak te s lakoćom povezati sadržaje učenja sa svakodnevnim životom.

Autori

Sadržaj

5 Skup realnih brojeva



U ovom ćeš poglavlju saznati što je:

- iracionalni broj
- realni broj
- skup realnih brojeva
- periodični broj
- slučajni događaj
- elementarni događaj
- vjerojatnost
- tečajna lista
- kamate na štednju i kredit.

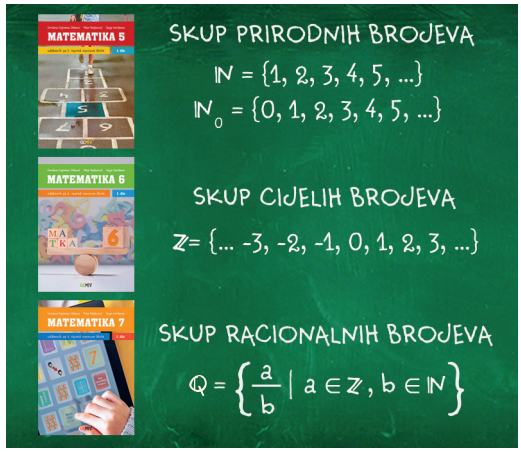
Oni koji žele znati više moći će:

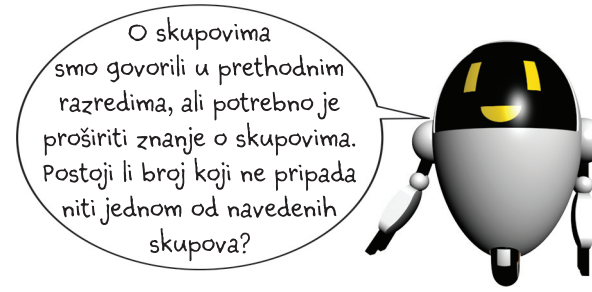
- istraživati vezu između nazivnika racionalnoga broja i njegova decimalnog zapisa.

Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- imenovati i opisati skupove brojeva **N**, **Z**, **Q**, **I** i **R** i njihove odnose (podskup, presjek, komplement)
- prikazivati odnose među skupovima Vennovim dijagramom
- navesti karakteristične primjere brojeva iz pojedinoga skupa, presjeka skupova ili njegova komplementa
- određivati pripadnost brojeva skupu
- određivati pripadnost rješenja jednadžbe pojedinom skupu brojeva
- pojednostavnjivati algebarske izraze u skupu R zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem primjenjujući svojstva računskih operacija
- opisivati vjerojatnost slučajnoga događaja
- razlikovati skup povoljnih događaja od skupa elementarnih događaja
- procjenjivati i računati vjerojatnost zadanoga događaja
- računajući vjerojatnost, donositi odluke
- koristiti se tečajnom listom
- interpretirati tečajnu listu (kupovni, srednji, prodajni tečaj)
- preračunavati valute
- opisivati pojam kamate na štednju i kamate na kredit na primjeru iz stvarnoga života
- uspoređivati i tumačiti kamate na stambeni i gotovinski kredit
- interpretirati otplatnu tablicu kredita preuzetu s mrežnih stranica banke za zadane rokove
- na temelju podataka s mrežnih stranica banke računati omjer (postotak) novčanoga iznosa vraćenog otplatom kredita i kreditnoga zaduženja
- upravljati osobnim financijama i prepoznati tijek novca
- prepoznati važnost odgovornog poduzetništva za rast i razvoj pojedinca i zajednice
- procijeniti i odabrati potrebne među pronađenim informacijama
- odgovorno upravljati prikupljenim informacijama
- donositi odluke na temelju analiziranih podataka.

5.1. Skupovi N, Z i Q





Primjer 1.

Kojem od skupova $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Q}$ pripadaju sljedeći brojevi:

$$-2, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{21}{3}, \quad 0 \quad \text{i} \quad -1.5?$$

Rješenje:

$-2 \notin \mathbf{N}$, $\quad -2 \notin \mathbf{N}_0$, $\quad -2 \in \mathbf{Z}$ $\quad -2 \in \mathbf{Q}$

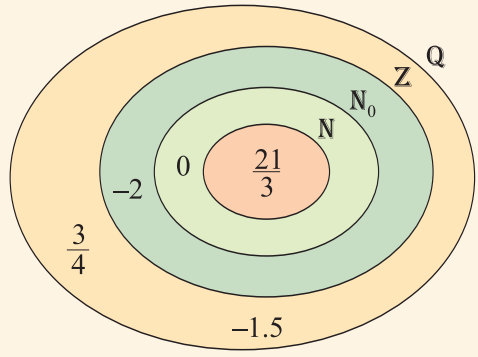
$\frac{3}{4} \notin \mathbf{N}$, $\quad \frac{3}{4} \notin \mathbf{N}_0$, $\quad \frac{3}{4} \notin \mathbf{Z}$ $\quad \frac{3}{4} \in \mathbf{Q}$

$\frac{21}{3} = 7 \in \mathbf{N}$, $\quad \frac{21}{3} = 7 \in \mathbf{N}_0$, $\quad \frac{21}{3} = 7 \in \mathbf{Z}$ $\quad \frac{21}{3} = 7 \in \mathbf{Q}$

$0 \notin \mathbf{N}$, $\quad 0 \in \mathbf{N}_0$, $\quad 0 \in \mathbf{Z}$ $\quad 0 \in \mathbf{Q}$

$-1.5 \notin \mathbf{N}$, $\quad -1.5 \notin \mathbf{N}_0$, $\quad -1.5 \notin \mathbf{Z}$ $\quad -1.5 \in \mathbf{Q}$.

Rješenje grafički prikazujemo Vennovim dijagramom.



Uočavamo da vrijedi:

$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$.

Također možemo zaključiti:

$\mathbf{N} \cap \mathbf{N}_0 = \mathbf{N}$, $\quad \mathbf{N} \cap \mathbf{Z} = \mathbf{N}$, $\quad \mathbf{N} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{N}$,

$\mathbf{N}_0 \cap \mathbf{Z} = \mathbf{N}_0$, $\quad \mathbf{N}_0 \cap \mathbf{Q} = \mathbf{N}_0$, $\quad \mathbf{Z} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$.

Primjer 2.

Kojem skupu pripadaju rješenja sljedećih jednadžbi:

a) $3 - 8x = 19$ **b)** $4 = -3(x-2) + 16$ **c)** $5 - \frac{4-y}{2} = 1 - \frac{y}{3}$?

Rješenje:

a)

$$\begin{aligned} 3 - 8x &= 19 \\ -8x &= 19 - 3 \\ -8x &= 16 \ / \ :(-8) \\ x &= -2 \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4 &= -3(x-2) + 16 \\ 4 &= -3x + 6 + 16 \\ 4 + 3x &= 22 \\ 3x &= 22 - 4 \\ 3x &= 18 \ / \ :3 \\ x &= 6 \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 5 - \frac{4-y}{2} &= 1 - \frac{y}{3} \ / \ \cdot 6 \\ 30 - 3(4-y) &= 6 - 2y \\ 30 - 12 + 3y &= 6 - 2y \\ 18 + 3y &= 6 - 2y \\ 18 + 3y + 2y &= 6 \\ 18 + 5y &= 6 \\ 5y &= 6 - 18 \\ 5y &= -12 \ / \ :5 \\ y &= -\frac{12}{5} \in \mathbf{Q} \end{aligned}$$

Broj $-\frac{12}{5}$ mogli smo zapisati i u decimalnom zapisu:

$$-\frac{12}{5} = -12 : 5 = -2.4 \qquad \begin{array}{l} 12 : 5 = 2.4 \\ \ \ 20 \end{array}$$

Broj -2.4 je broj koji ima jednu decimalu, tj. ima konačan broj decimala.

Ako želimo broj $\frac{1}{3}$ zapisati u decimalnom zapisu, računamo:

$$
\begin{array}{l}
1:3 = 0.333\ldots \\
10 \\
\ \ 10 \\
\ \ \ \ 10 \\
\ \ \ \ \ \ \ldots
\end{array}
$$

Broj $0.333\ldots$ ima beskonačno mnogo decimala koje se stalno ponavljaju.

Kažemo da je broj $0.333\ldots$ **periodičan decimalan broj**. Decimala koje se ponavlja je znamenka 3. Ta znamenka je **period** broja $0.333\ldots$ koji kraće zapisujemo $0.\dot{3}$.

Period može biti i skupina znamenaka.

Proučimo decimalni zapis razlomka $\frac{15}{11}$.

$$
\begin{array}{l}
15:11 = 1.3636\ldots = 1.\dot{3}\dot{6} \\
40 \\
\ \ 70 \\
\ \ \ \ 40 \\
\ \ \ \ \ \ 70 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ldots
\end{array}
$$

Broj $1.\dot{3}\dot{6}$ je također periodičan decimalan broj.

Pogledajmo još decimalni zapis razlomka $\frac{17}{7}$.

$$
\begin{array}{l}
17:7 = 2.4285714\ldots = 2.\dot{4}2857\dot{1} \\
30 \\
\ \ 20 \\
\ \ \ \ 60 \\
\ \ \ \ \ \ 40 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 50 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 10 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ldots
\end{array}
$$

Period broja $2.\dot{4}2857\dot{1}$ je skupina znamenaka 428571.

Brojevi $0.\dot{3}$, $1.\dot{3}\dot{6}$ i $2.\dot{4}2857\dot{1}$ nazivaju se i **čisto periodični decimalni brojevi**.

Proučimo li decimalni zapis broja $\frac{25}{6}$, možemo uočiti decimalni zapis koji je beskonačan, ali nije čisto periodičan.

$$
\begin{array}{l}
\frac{25}{6} = 25:6 = 4.1666\ldots = 4.1\dot{6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \swarrow\ \searrow \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pretperiod}\ \ \text{period} \\
\qquad 10 \\
\qquad\ \ 40 \\
\qquad\ \ \ \ 40 \\
\qquad\ \ \ \ \ \ 40 \\
\qquad\ \ \ \ \ \ \ \ldots
\end{array}
$$

Broj $4.1\dot{6}$ je primjer **mješovito periodičnog decimalnog broja**.

U broju $4.1\dot{6}$ ponavlja se znamenka 6, a znamenka 1 koja je decimala ispred perioda naziva se **pretperiod**.

Uočimo da u mješovitom periodičnom decimalnom broju može postojati jedna ili više decimala koje se ne ponavljaju i jedna ili više decimala koje se ponavljaju.

Primjer 3.

Spojimo parove.

0.00000001	čisto periodični decimalni broj
$-104.\dot{5}$	broj ima konačni decimalni zapis
$2.\dot{2}60\dot{3}$	mješovito periodični decimalni broj
$-35.478\dot{1}\dot{2}$	

Rješenje:

0.00000001	čisto periodični decimalni broj
$-104.\dot{5}$	broj ima konačni decimalni zapis
$2.\dot{2}60\dot{3}$	mješovito periodični decimalni broj
$-35.478\dot{1}\dot{2}$	

Proučimo sljedeće tri tablice.

razlomak	decimalni broj
$\frac{11}{2}$	5.5
$\frac{19}{5}$	3.8
$\frac{7}{4}$	1.75
$\frac{32}{25}$	1.28
$\frac{37}{10\,000}$	0.0037
$\frac{9}{40}$	0.075
$2 = 2$ $5 = 5$ $4 = 2^2$ $25 = 5^2$ $10\,000 = 2^4 \cdot 5^4$ $40 = 2^3 \cdot 5$ $\downarrow$ samo faktori 2 i / ili 5	$\downarrow$ konačni decimalni zapis

razlomak	decimalni broj
$\frac{8}{9}$	$0.\dot{8}$
$\frac{5}{7}$	$0.\dot{7}1428\dot{5}$
$\frac{34}{11}$	$3.\dot{0}\dot{9}$
$\frac{128}{63}$	$2.\dot{0}3174\dot{6}$
$\frac{400}{117}$	$3.\dot{4}1880\dot{3}$
$9 = 3^2$ $7 = 7$ $11 = 11$ $63 = 3^2 \cdot 7$ $117 = 3^2 \cdot 13$ $\downarrow$ nema ni faktora 2 ni faktora 5	$\downarrow$ čisto periodični decimalni brojevi

razlomak	decimalni broj
$\frac{31}{15}$	$2.0\dot{6}$
$\frac{5}{12}$	$0.4\dot{6}$
$\frac{9}{44}$	$0.20\dot{4}\dot{5}$
$\frac{503}{300}$	$1.67\dot{6}$
$\frac{185}{72}$	$2.569\dot{4}$
$15 = 5 \cdot 3$ $12 = 2^3 \cdot 3$ $44 = 2^4 \cdot 11$ $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $\downarrow$ barem jedan od faktora je 2 ili 5	$\downarrow$ mješovito periodični decimalni brojevi

U decimalnom prikazu neskrativog razlomka $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{N})$ moguće je da je taj zapis:

- konačan
- beskonačan i čisto periodičan
- beskonačan i mješovito periodičan.

Bit će konačan ako rastav nazivnika b na proste faktore sadrži samo faktore 2 i / ili 5 ili ako je $b = 1$. Ako rastav nazivnika b, $b \neq 1$, ne sadrži niti faktor 2 niti faktor 5, prikaz razlomka $\frac{a}{b}$ u decimalnom zapisu bit će čisto periodičan decimalan broj.

Preostaje situacija kada rastav broja b osim faktora 2 i / ili 5 sadrži još neki prosti faktor različit od 2 i 5. Tada je decimalni zapis razlomka $\frac{a}{b}$ beskonačan i mješovito periodičan.

Primjer 4.

Ispravi pogrešku u tablici koja povezuje razlomak s vrstom njegovog decimalnog zapisa.

razlomak	broj ima konačni decimalni zapis	čisto periodični decimalni broj	mješovito periodični decimalni broj
$\frac{123}{128}$		+	
$\frac{3}{85}$	+		
$\frac{230}{93}$			+
$\frac{15}{60}$			+

Rješenje:

razlomak	broj ima konačni decimalni zapis	čisto periodični decimalni broj	mješovito periodični decimalni broj
$\frac{123}{128}$	+		
$\frac{3}{85}$			+
$\frac{230}{93}$		+	
$\frac{15}{60}$	+		

$\underbrace{128 = 2^7}$ $\underbrace{85 = 5 \cdot 17}$ $\underbrace{93 = 3 \cdot 31}$ $\underbrace{60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5}$

$\frac{a}{128}$ ima konačan decimalan zapis ako je $D(a, 128) = 1$

$\frac{a}{85}$ je mješovito periodičan decimalan broj ako je $D(a, 85) = 1$

$\frac{a}{93}$ je čisto periodičan decimalan broj ako je $D(a, 93) = 1$

$\frac{a}{60}$ je mješovito periodičan decimalan broj ako je $D(a, 60) = 1$

Brojevi $\frac{123}{128}$, $\frac{3}{85}$ i $\frac{230}{93}$ su neskrativi razlomci i rastav nazivnika na proste faktore nam daje točno rješenje. Broj $\frac{15}{60}$ je skrativ i prije proučavanja nazivnika moramo ga skratiti $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$, a $4 = 2^2$ te $\frac{1}{4}$ ima konačan decimalan zapis.

Zadatci 5.1.

1. Kojemu od skupova pripadaju brojevi:

$$-3,\ \frac{5}{2},\ -4.3,\ \frac{-70}{-14},\ -2.67,\ 4.\dot{5}\ \text{ i }\ 0?$$

2. Prepiši u bilježnicu točne tvrdnje:

a) $\mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$ **b)** $\mathbf{Q} \cap \mathbf{N} = \mathbf{N}_0$

c) $\mathbf{Z} \cap \mathbf{N} = \mathbf{N}$ **d)** $\mathbf{Q}^- \cup \mathbf{Q}^+ = \mathbf{Q}$

e) $\mathbf{N} \cup \mathbf{N}_0 = \{0\}$ **f)** $\mathbf{Z} \cap \mathbf{Q} = \emptyset$

g) $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$ **h)** $\emptyset \cup \mathbf{Q} = \mathbf{Q}$.

3. Prepiši u bilježnicu i umetni neki od znakova $\in$, $\notin$, $\cap$, $\subseteq$ ili $\cup$ tako da tvrdnje budu točne:

a) $0 \ \square\ \mathbf{N}$ **b)** $-\frac{7}{1} \ \square\ \mathbf{Z}$

c) $\mathbf{N}_0 \ \square\ \mathbf{N} = \mathbf{N}$ **d)** $\mathbf{N}_0 \ \square\ \mathbf{N} = \mathbf{N}_0$

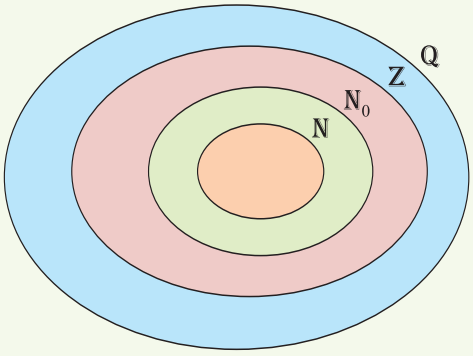
e) $\mathbf{Q}^- \ \square\ \mathbf{Q}$ **f)** $\mathbf{Q}^- \ \square\ \mathbf{Q}^+ = \emptyset$

g) $2.4 \ \square\ \mathbf{Z}$ **h)** $-1.4 \ \square\ \mathbf{Q}$.

4. U bilježnicu nacrtaj Vennov dijagram te upiši brojeve

$$\frac{-9}{-5},\ -\frac{-100}{-25},\ 4.0,\ \frac{0}{-2},\ -0.702,\ \frac{5}{3}\ \text{ i }\ 0.\dot{4}$$

na odgovarajuće mjesto.



5. Napiši jedan:

a) cijeli broj koji je ujedno i element skupa $\mathbf{N}_0$

b) racionalni broj koji je cijeli, ali nije prirodan

c) prirodni broj koji nije racionalan.

6. Ima li jednadžba

$$3x - 11 = 5(x - 8) + 26$$

rješenje u skupu cijelih brojeva?

7. Kojem skupu brojeva pripadaju rješenja sljedećih jednadžbi:

a) $x + 14 = 72$ **b)** $-2x = 11$

c) $3 - (x + 4) = 3x$

d) $-1 + 2x = 4 + (8x - 11)$

e) $2(x + 8) = 14$

f) $-8 = 3(x - 9) - 11x$

g) $5 - 2(x - 8) = 4x + 15$

h) $-7x = 11 - 4(2x + 7)$?

8. Imaju li zadane jednadžbe rješenje u skupu prirodnih brojeva:

a) $\frac{5}{6}x = x - \frac{2}{3}$

b) $4x - \frac{1}{5} = 2.5x$

c) $3 - \frac{x+1}{2} = \frac{1}{4}x$

d) $0.7 = \frac{1}{3} - \frac{5-2x}{2}$?

9. Je li jednadžba rješiva u skupu $\mathbf{Z}$:

a) $(x + 3)(x + 4) = x^2$

b) $14 - 7x(x + 2) = -7(x + 2)^2$

c) $|x| = 21$ **d)** $2|x| = 3$

e) $2(x - 5)^2 + x^2 = 8 + 3x^2$

f) $-2(x - 8)(2x + 4) = -8 - 4x^2$?

10. Riješi jednadžbe:

a) $x^2 = 9$ **b)** $x^2 = \frac{25}{36}$

c) $x^2 + 400 = 0$ **d)** $x^2 - 0.36 = 1$

e) $(x - 5)^2 = 16$ **f)** $\frac{3}{4}x^2 = \frac{4}{27}$.

U bilježnici popuni tablicu.

	jednadžba je rješiva u skupu $\mathbf{N}$	jednadžba je rješiva u skupu $\mathbf{Z}$	jednadžba je rješiva u skupu $\mathbf{Q}$
naziv jednadžbe			

11. Zapiši sljedeće razlomke kao decimalne brojeve i napiši koje je vrste napisani decimalni broj:

a) $\frac{73}{10}$ **b)** $\frac{-9}{100}$ **c)** $-\frac{11}{10}$

d) $-\frac{5\,317}{1\,000}$ **e)** $\frac{-417}{-10}$ **f)** $\frac{9}{2}$

g) $\frac{91}{5}$ **h)** $\frac{29}{20}$ **i)** $\frac{311}{25}$ **j)** $\frac{-19}{4}$.

12. Zapiši zadane brojeve u decimalnom obliku i napiši koje je vrste napisani decimalni broj:

a) $\frac{-19}{3}$ **b)** $\frac{172}{9}$ **c)** $-\frac{5}{7}$

d) $\frac{13}{11}$ **e)** $-\frac{48}{13}$ **f)** $8\frac{4}{11}$

g) $\frac{4}{99}$ **h)** $-\frac{81}{7}$ **i)** $\frac{2}{21}$ **j)** $-2\frac{3}{101}$.

13. Zapiši zadane brojeve u decimalnom obliku i napiši koje je vrste napisani decimalni broj:

a) $\frac{7}{30}$ **b)** $3\frac{5}{6}$ **c)** $-\frac{53}{12}$ **d)** $\frac{4}{15}$

e) $-2\frac{3}{14}$ **f)** $\frac{-3}{26}$ **g)** $\frac{29}{18}$

h) $-\frac{-15}{22}$ **i)** $\frac{307}{26}$ **j)** $\frac{-59}{28}$.

14. Ispravi pogreške u sljedećim rečenicama.

Razlomak $\frac{7}{125}$ možemo zapisati kao decimalni broj s konačno mnogo decimala jer je nazivnik djeljiv s brojem 5, a razlomak $\frac{16}{44}$ možemo zapisati kao mješovito periodičan decimalni broj jer broj 44 u rastavu na proste faktore ima broj 2 kao faktor, a uz to i faktor 11.

15. Odredi 105. znamenku broja:

a) $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{-5}{11}$ **c)** $\frac{-8}{9}$ **d)** $\frac{9}{22}$.

16. Sljedeće decimalne brojeve zapiši kao neskrative razlomke:

a) 2.47 **b)** −30.008

c) −8.4 **d)** 21.000001

e) 302.4 **f)** −25.02

g) −6.703 **h)** 0.00021

i) −51.8 **j)** 2.2222.

17. Usporedi brojeve:

a) $3.\dot{4}$ i 3.4 **b)** −0.72 i $-0.7\dot{2}$

c) −0.012 i $-0.0\dot{2}$ **d)** $2.1\dot{3}$ i 2.9

e) $-100.5\dot{6}$ i −100.1 **f)** $312.\dot{4}$ i $312.\dot{4}10\dot{3}$.

18. Poredaj po veličini brojeve:

$34.\dot{8}$, 34.083, 34.9, 34.51 i 34.8

počevši od najvećeg.

19. Poredaj po veličini brojeve:

$-11.\dot{4}$, −114, −11.0999, −11.9, −11.44, −11.409

počevši od najmanjeg.

20. Prepiši u bilježnicu i spoji broj s vrstom zapisa.

$4.\dot{2}$	broj ima konačni decimalni zapis
−0.000134	
$2.70\dot{1}$	čisto periodični decimalni broj
−0.49	
725.438105	mješovito periodični decimalni broj
$-27.\dot{1}123\dot{4}$	

21. Koji od brojeva: $\frac{27}{4}$, $\frac{-71}{25\,000}$, $\frac{4}{19}$, $\frac{-1}{18}$ i $\frac{-9}{18}$ imaju konačni decimalni zapis?

22. Izračunaj i rješenje zapiši kao decimalni broj:

a) $3 - 2 : 4 + 7 : (-3)$

b) $4.51 - 3 \cdot 0.17 + 4.207$

c) $26 + 0.8 \cdot 2 - (-3) : 2$.

23. Izračunaj i rješenje zapiši kao decimalni broj:

a) $1\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 5$

b) $-14.2 + 0.2 : \left(1 - \frac{3}{5}\right)$

c) $\frac{21}{5} - 2\frac{1}{9} : \frac{1}{27}$.

24. Izračunaj i rješenje zapiši kao decimalni broj:

a) $46 - \frac{1}{7} : (-2)$ **b)** $-\frac{8}{3} + \frac{2}{5} : 3$

c) $-5\frac{4}{9} - \frac{7}{9} \cdot (-7)$.

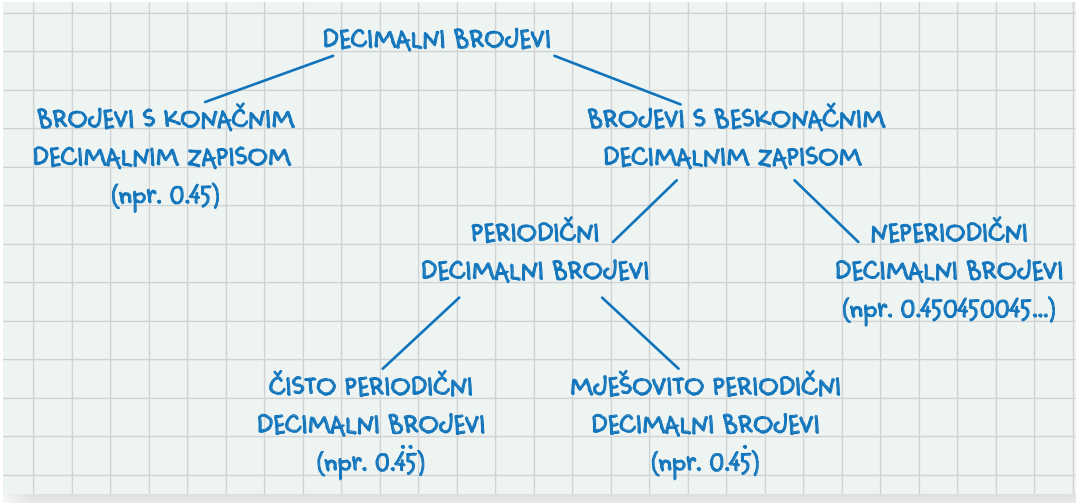
5.2. Skup iracionalnih brojeva

Racionalni broj je svaki broj koji se može zapisati kao razlomak čiji je brojnik cijeli, a nazivnik prirodni broj.

Proučavali smo nazivnike neskrativih razlomaka i zaključili:

- ako je nazivnik broj koji je djeljiv samo s 1, 2 i / ili 5, tada je decimalni zapis tog razlomka konačan
- ako je nazivnik broj (različit od broja 1) koji nije djeljiv niti s 2 niti s 5, tada je decimalni zapis tog razlomka beskonačan i čisto periodičan
- ako je nazivnik broj koji je djeljiv s 2 i / ili 5, ali je djeljiv s još nekim prostim prirodnim brojem različitim od brojeva 2 i 5, tada je decimalni zapis tog razlomka beskonačan i mješovito periodičan.

Dakle, decimalni zapis svakog racionalnog broja je ili konačan ili beskonačan periodičan.



Neperiodični decimalni brojevi su brojevi koji se ne mogu zapisati kao neskrativi razlomci oblika $\frac{a}{b}$, pri čemu je a cijeli, a b prirodni broj.

Kada bi to bilo moguće, tada bi broj b bio ili djeljiv samo s 1, 2 i/ili 5 ili ne bi bio djeljiv niti s 2, niti s 5 ili bi bio djeljiv s 2 i/ili 5, ali i s još nekim prostim prirodnim brojem različitim od 2 i 5.

Ali, tada bi decimalni zapis bio ili konačan ili beskonačan čisto periodičan ili beskonačan mješovito periodičan, a to nije slučaj.

Dakle, brojevi s beskonačnim neperiodičnim decimalnim zapisom **ne mogu** se zapisati razlomkom $\frac{a}{b}$, pri čemu je a cijeli, a b prirodni broj. Neperiodični decimalni brojevi tada ne pripadaju skupu racionalnih brojeva, tj. ne pripadaju skupu $\mathbf{Q}$.

Kažemo da oni čine skup iracionalnih brojeva.

Skup iracionalnih brojeva

Skup iracionalnih brojeva je skup svih brojeva čiji je decimalan zapis beskonačan i neperiodičan. Skup iracionalnih brojeva označavamo sa $\mathbf{I}$.

Primjer 1.

Navedimo nekoliko brojeva s beskonačnim neperiodičnim decimalnim zapisom, tj. navedimo nekoliko iracionalnih brojeva. Koliko je elemenata u skupu $\mathbf{I}$?

Rješenje: To su na primjer sljedeći brojevi:

$$
\begin{aligned}
&0.123456789101112131415161718\ldots\\
&0.102030405060708090100110120130140150160\ldots\\
&0.112233445566778899101011112121313141415151616\ldots\\
-&0.123456789101112131415161718\ldots\\
-&0.102030405060708090100110120130140150160\ldots\\
-&0.112233445566778899101011112121313141415151616\ldots\\
&1.123456789101112131415161718\ldots\\
&2.123456789101112131415161718\ldots\\
&3.123456789101112131415161718\ldots\\
&4.123456789101112131415161718\ldots\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Očigledno je da je **u skupu $\mathbf{I}$ beskonačno mnogo elemenata** (zaključak možemo temeljiti već samo na činjenici da je i prirodnih brojeva beskonačno mnogo te ako proučimo posljednja četiri broja koja smo naveli i koji se nastavljaju bez kraja).

Prisjetimo li se gradiva 7. razreda, uočit ćemo da smo rekli kako je broj π beskonačan neperiodičan decimalan broj.

Dakle, broj $\pi = 3.14159265358979323846264338 2\ldots$ je iracionalan broj.

Također, $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ u svojem decimalnom zapisu imaju beskonačno mnogo decimala i taj je zapis neperiodičan. Stoga su $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ iracionalni brojevi.

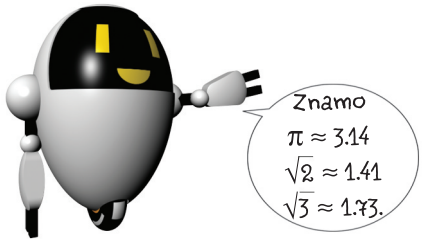
Primjer 2.

Vrijedi li $\sqrt{a} \in \mathbf{I}$, pri čemu je a bilo koji nenegativan racionalan broj?

Rješenje: Ne vrijedi, npr. $\sqrt{4} = 2 \notin \mathbf{I}$. Također $\sqrt{9} = 3 \notin \mathbf{I}$, $\sqrt{16} = 4 \notin \mathbf{I}$.

Vrijedit će $\sqrt{a} \in \mathbf{I}$ samo ako broj a nije kvadrat nekog racionalnog broja.

Dakle, $\sqrt{\frac{5}{4}} \in \mathbf{I}$, ali $\sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3} \notin \mathbf{I}$.



Budući da brojevi π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}\ldots$ imaju beskonačno mnogo decimala koje se ne ponavljaju, mi ćemo pri računanju s njima često koristiti njihove približne vrijednosti.

Primjer 3.

Je li broj $2\sqrt{2}$ iracionalan broj?

Rješenje: Kada bi broj $2\sqrt{2}$ bio racionalan broj, tada bi vrijedilo

$$2\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad a \in \mathbf{Z}, \quad b \in \mathbf{N},$$

ali podijelimo li tu jednakost s brojem 2, tada vrijedi

$$\sqrt{2} = \frac{a}{2b}, \quad a \in \mathbf{Z}, \quad 2b \in \mathbf{N}.$$

To bi značilo da je $\sqrt{2}$ racionalan broj, što nije točno.

Zaključujemo da je broj $2\sqrt{2}$ iracionalan broj.

Primjer 4.

Koji su od sljedećih brojeva iracionalni:

a) $3\sqrt{3}$ **b)** $4 + \pi$ **c)** $2.5070070007\dot{7}$

d) $(\sqrt{11} - 5)(\sqrt{11} + 5)$ **e)** $(\sqrt{7} + 1)^2$ **f)** $\sqrt{1\frac{1}{4} + 1}$?

Rješenje:

a) $3\sqrt{3} \in \mathbf{I}$ jer je $\sqrt{3} \in \mathbf{I}$

b) $4 + \pi \in \mathbf{I}$ jer je $\pi \in \mathbf{I}$ i njegov decimalni zapis je beskonačan i neperiodičan te broj za 4 veći ima također beskonačan neperiodičan decimalan zapis

c) $2.5070070007\dot{7}$ je mješovito periodičan decimalan broj te vrijedi $2.5070070007\dot{7} \notin \mathbf{I}$

d) $(\sqrt{11} - 5)(\sqrt{11} + 5) = 11 - 25 = -14 \notin \mathbf{I}$

e) $(\sqrt{7} + 1)^2 = 7 + 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 1 + 1 = 8 + 2\sqrt{7} \in \mathbf{I}$

f) $\sqrt{1\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \notin \mathbf{I}$.

Zadatci 5.2.

1. Koji su brojevi iracionalni?

2. Napiši tri iracionalna broja.

3. Koji su od sljedećih brojeva racionalni:

a) $-2.5\dot{4}$

b) $3.01020304\ldots$

c) $5\,074\,211\,078\,999.\dot{9}$

d) $-0.56575859510511\ldots$

e) $101.01001000100001\ldots$?

4. Koji su od sljedećih brojeva elementi skupa $\mathbf{I}$:

a) $\sqrt{25}$ **b)** $-\sqrt{19}$ **c)** $\sqrt{21}$ **d)** $\sqrt{20}$

e) $\sqrt{\frac{50}{2}}$ **f)** $-\sqrt{\frac{100}{5}}$ **g)** $\sqrt{3\frac{1}{16}}$?

5. U bilježnicu nacrtaj Vennov dijagram za skupove $\mathbf{I}$ i $\mathbf{Q}$ te smjesti zadane brojeve u jedan od tih dvaju skupova:

$$\sqrt{7},\ -0.56\dot{7},\ \frac{8}{7},\ -31.\dot{4},\ \sqrt{\frac{600}{24}}\ \text{ i }\ -\sqrt{50}.$$

6. U kojem su odnosu skupovi $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{I}$?

7. U bilježnici dopuni brojeve tako da budu racionalni i veći od broja 1:

a) $\sqrt{\frac{20}{\square}}$ **b)** $\sqrt{\frac{32}{\square}}$

c) $\sqrt{2\frac{\square}{4}}$ **d)** $\sqrt{4\frac{\square}{25}}$.

Napiši sva rješenja.

8. U bilježnicu prepiši samo točne tvrdnje.

a) Broj $-\sqrt{2}$ je iracionalan.

b) Broj $\sqrt{17}$ je racionalan.

c) Broj $17\sqrt{2}$ je iracionalan.

d) Broj 8π je racionalan.

e) Broj $2.4\sqrt{3}$ je iracionalan.

9. Može li umnožak racionalnog i iracionalnog broja biti racionalan broj?

10. Koji su brojevi racionalni:

a) $-3+\pi$ **b)** $\sqrt{2}+\sqrt{4}$

c) $-\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ **d)** $2\sqrt{4}$

e) $7\pi-8\pi+\pi$?

11. Može li zbroj dvaju racionalnih brojeva biti iracionalan?

12. Može li zbroj racionalnog i iracionalnog broja biti iracionalan broj?

13. Može li zbroj dvaju iracionalnih brojeva biti element skupa $\mathbf{Q}$?

14. Koji su od sljedećih brojeva iracionalni:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ **b)** $(\sqrt{3}-1)^2$

c) $(3\sqrt{2})^2+\sqrt{7}^2$ **d)** $3\pi-\frac{9}{3}\pi$

e) $\frac{1}{2}\sqrt{17}-0.5(1+\sqrt{17})$

f) $(9-\pi)(9+\pi)$

g) $(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})$

h) $2\sqrt{12}-4\sqrt{3}$

i) $(5+2\sqrt{2})^2$

j) $(3-\sqrt{8})(3+2\sqrt{2})$

k) $(1-\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})$

l) $17+2\sqrt{19}$

m) $\sqrt{576}+1.4$

n) $2-\sqrt{40}$?

15. Pojednostavni izraze:

a) $3\sqrt{2}a+4\sqrt{2}a$

b) $7\sqrt{3}b-11\sqrt{3}b$

c) $-2\sqrt{3}a+\sqrt{5}-7\sqrt{3}a-4\sqrt{5}$

d) $8\sqrt{7}+2\sqrt{7}x-\sqrt{7}+11\sqrt{7}x$

e) $3\sqrt{11}-1+\sqrt{11}a-2\sqrt{11}a$

f) $4\sqrt{2}+2\sqrt{8}b-\sqrt{2}b-2\sqrt{8}$.

16. Pojednostavni izraze:

a) $2\sqrt{2}a\cdot 4\sqrt{3}b$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{5}x\cdot 8\sqrt{10}$

c) $\sqrt{3}\cdot(2\sqrt{3}a+1)$

d) $2\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{7}x)$

e) $(\sqrt{2}a+1)\cdot(\sqrt{2}a-1)$

f) $(3\sqrt{7}+1)(-2+\sqrt{7}y)$.

5.3. Skup realnih brojeva

Do osmog razreda učili smo sljedeće skupove brojeva.

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots\}$ **skup prirodnih brojeva**

$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots\}$ **skup prirodnih brojeva s nulom**

$\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$ **skup cijelih brojeva** i

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{N} \right\}$ **skup racionalnih brojeva**.

Svi prirodni i cijeli brojevi mogu se zapisati kao razlomci čiji je brojnik cijeli, a nazivnik prirodni broj. Dakle, $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$.

Svi racionalni brojevi mogu se prikazati u decimalnom zapisu. Tada je taj zapis ili konačan ili čisto periodičan ili mješovito periodičan.

Brojevi koji su beskonačni neperiodični decimalni brojevi nisu racionalni. Oni se ne mogu zapisati razlomkom čiji je brojnik cijeli, a nazivnik prirodni broj. Ti brojevi čine novi skup brojeva, a to je **skup iracionalnih brojeva** koji označavamo slovom $\mathbf{I}$.

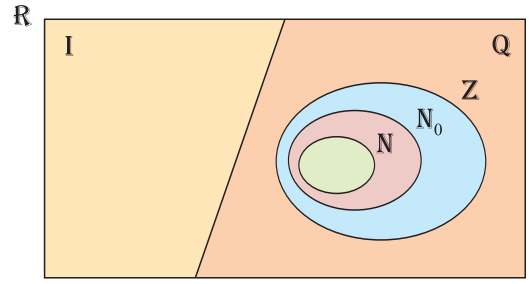
Vrijedi

$$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset.$$

Skup realnih brojeva

Svi racionalni i svi iracionalni brojevi čine **skup realnih brojeva** koji označavamo s $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}.$$



Primjer 1.

Koji su od sljedećih brojeva realni:

a) 3.478 **b)** $7\sqrt{3}$ **c)** $12 - \sqrt{8}$ **d)** $2.76\dot{8}3\dot{3}$?

Rješenje: Brojevi navedeni u primjerima **a)** i **d)** su racionalni, a preostali su iracionalni.

Svi brojevi su realni.

Primjer 2.

U kojem su odnosu:

a) skup racionalnih i skup realnih brojeva

b) skup iracionalnih i skup realnih brojeva?

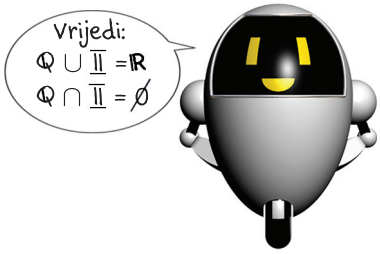
Rješenje:

a) $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$ **b)** $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$.

U skupu realnih brojeva kažemo da je skup iracionalnih brojeva **komplement (dopuna) skupa** racionalnih brojeva i zapisujemo:

$$\mathbf{Q}^c = \mathbf{I}.$$

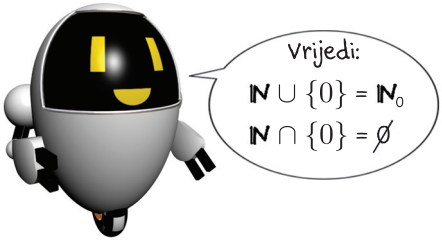
komplement skupa **Q** u skupu **R**



U skupu $\mathbf{N}_0$ je skup $\{0\}$ komplement kupa $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N}^c = \{0\}.$$

komplement skupa **N** u skupu $\mathbf{N}_0$



Označimo li s A skup svih parnih prirodnih brojeva i s B skup svih neparnih prirodnih brojeva, tada je u skupu svih prirodnih brojeva komplement skupa svih parnih prirodnih brojeva upravo skup svih neparnih prirodnih brojeva:

$$A^c = B.$$

U skupu **N** možemo proučavati skup svih prostih prirodnih brojeva. Komplement navedenog skupa je skup čiji su elementi broj 1 i svi složeni prirodni brojevi.

Primjer 3.

Koje su od sljedećih tvrdnji točne:

a) $\mathbf{N}_0^c = \mathbf{Z}^-$ u skupu **N**

b) $\mathbf{I}^c = \mathbf{Q}$ u skupu **Q**

c) presjek nekog skupa i komplementa tog skupa uvijek je prazan skup?

Rješenje: Točna je samo tvrdnja **c)**.

Tvrdnja u primjeru **a)** točna je u skupu **Z**, a tvrdnja navedena u primjeru **b)** točna je ako proučavamo skup realnih brojeva.

Zadatci 5.3.

1. Prepiši u bilježnicu samo točne tvrdnje:

a) $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \mathbf{I}$ **b)** $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{Q}$
c) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{I}$ **d)** $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R}$
e) $\mathbf{R} = \mathbf{I} \cup \mathbf{Q}$ **f)** $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$.

2. Prepiši i umetni odgovarajući znak tako da tvrdnje budu točne:

a) $\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{Q}$
b) 3π ____ $\mathbf{I}$
c) $\mathbf{Z}$ ____ $\mathbf{I}$
d) ____ $\cap \mathbf{Q} = \emptyset$
e) $\mathbf{I}$ ____ $\mathbf{R}$
f) $\mathbf{Z} \cap \mathbf{R} =$ ____ .

3. Usporedi zadane racionalne brojeve:

a) $\frac{3}{4}$ i 0.706
b) -23.076 i $-\frac{117}{5}$
c) $-\frac{2}{3}$ i -0.6607
d) $5.0\dot{9}$ i 5.1.

4. Usporedi sljedeće parove realnih brojeva:

a) $\sqrt{3}$ i 1.73
b) -2.82 i $-2\sqrt{2}$
c) -1.41 i $-\sqrt{2}+0.1$
d) -0.711 i $-\sqrt{3}+1$.

5. Usporedi racionalne brojeve:

a) $3\frac{10}{71}$ **b)** $\frac{60}{19}$
c) $3\frac{1}{7}$ **d)** $\frac{55}{17}$

s približnom vrijednošću broja $\pi \approx 3.14159$.

6. Usporedi racionalne brojeve:

a) $1\frac{5}{8}$ **b)** $\frac{53}{31}$
c) $\frac{1\,351}{780}$ **d)** $1\frac{17}{20}$

s približnom vrijednošću broja $\sqrt{3} \approx 1.732050808$.

7. Poredaj po veličini zadane realne brojeve:
$1.42,\ \sqrt{2},\ 2\sqrt{2}-2,\ -\sqrt{2}+3,\ 1.414.$

8. Poredaj po veličini zadane realne brojeve:
$-2\sqrt{3},\ -3.46,\ -3\sqrt{2},\ -\sqrt{3}-2,\ -\pi.$

9. Koja je od sljedećih nejednakosti točna:

a) $3\sqrt{3}+\sqrt{2} > 4\sqrt{2}$
b) $-7 < -5\sqrt{2}+4$
c) $3\pi - 4 < 4$
d) $0.1^2 < (3-2\sqrt{2})^2$?

10. Odredi tri realna broja x za koje vrijedi:

a) $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$
b) $\sqrt{2} < x < 1.42$
c) $-\sqrt{3} < x < -1.72$.

11. Dopuni rečenice u svojoj bilježnici.
U skupu realnih brojeva komplement skupa _____ brojeva je skup iracionalnih brojeva. Možemo zapisati $\square^C = \mathbf{I}$.

12. U skupu racionalnih brojeva odredi komplement sljedećih brojeva:

a) $\mathbf{Q}^-$ **b)** $\mathbf{Q}^+$ **c)** $\{0\}$.

13. U skupu cijelih brojeva odredi komplement sljedećih brojeva:

a) $\mathbf{N}$ **b)** $\mathbf{N}_0$ **c)** $\mathbf{Z}^-$ **d)** $\mathbf{Z}$.

14. U skupu realnih brojeva odredi komplement skupa:

a) racionalnih **b)** iracionalnih brojeva.

15. Neka je zadan skup C tako da je $C = A \cup B$ pri čemu su A i B disjunktni skupovi, tj. vrijedi $A \cap B = \emptyset$. Čemu je u skupu C jednako:

a) A^c **b)** B^c **c)** C^c?

16. S pomoću Vennovih dijagrama prikaži odnos skupova:

a) $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{Z}$ **b)** $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$
c) $\mathbf{I}$ i $\mathbf{R}$ **d)** $\mathbf{I}$ i $\mathbf{Q}$.

5.4. Realni brojevi i brojevni pravac

Koordinatni sustav na pravcu uvodimo tako da na njemu odaberemo točku O i desno od nje točku E. Točka O pridružena je broju 0, a točka E broju 1.

Točka O naziva se **ishodište**, točka E **jedinična točka**, a dužina $\overline{OE}$ **jedinična dužina**.

Svakom racionalnom broju možemo pridružiti točno jednu točku na brojevnom pravcu.

Primjer 1.

Na brojevnom pravcu prikažimo točke pridružene brojevima:

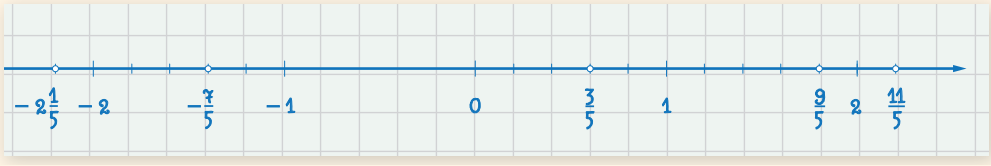
a) $\frac{3}{5}$, $-2\frac{1}{5}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{11}{5}$ i $-\frac{7}{5}$

b) $\frac{3}{4}$, $-\frac{7}{6}$, $2\frac{1}{4}$ i $-3\frac{2}{3}$

c) -2.7, $\frac{3}{2}$, $-5\frac{2}{5}$ i 0.7.

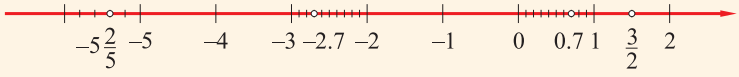
Rješenje:

a) Za duljinu jedinične dužine odaberemo npr. 25 mm jer 25 mm lagano dijelimo brojem 5.



b) Uočimo $V(3,4,6) = 12$ i za duljinu jedinične dužine odaberemo npr. 12 mm.

c) Za jediničnu dužinu odaberemo 1 cm jer su zadani brojevi decimalni brojevi s jednom decimalom ili se kao takvi mogu zapisati.

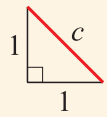


Osim racionalnih brojeva na brojevnom se pravcu mogu prikazati i iracionalni brojevi.

Primjer 2.

Nacrtajmo pravokutni trokut s katetama duljine 1 cm. Kolika je duljina hipotenuze tog trokuta?

Rješenje:



Prema Pitagorinu poučku vrijedi:

$$c^2 = 1^2 + 1^2$$
$$c^2 = 2$$
$$c = \sqrt{2}\text{ cm}.$$

Duljina hipotenuze je $\sqrt{2}\text{ cm}$.

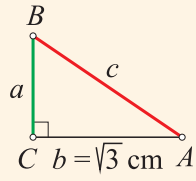
Primjer 3.

Nacrtajmo pravokutni trokut takav da je $\sqrt{3}\text{ cm}$ duljina jedne njegove:

a) katete **b)** hipotenuze.

Rješenje:

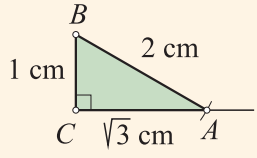
a) *Skica*



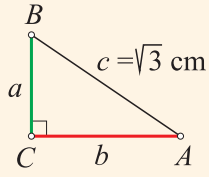
Prema Pitagorinu poučku vrijedi:

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$\sqrt{3}^2 = c^2 - a^2$$
$$3 = c^2 - a^2.$$

Jedno od mogućih rješenja je $c = 2\text{ cm}$ i $a = 1\text{ cm}$ jer $3 = 2^2 - 1^2$.



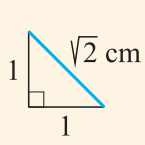
b) *Skica*

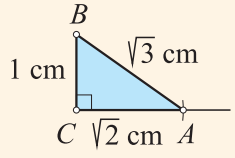


Prema Pitagorinu poučku vrijedi:

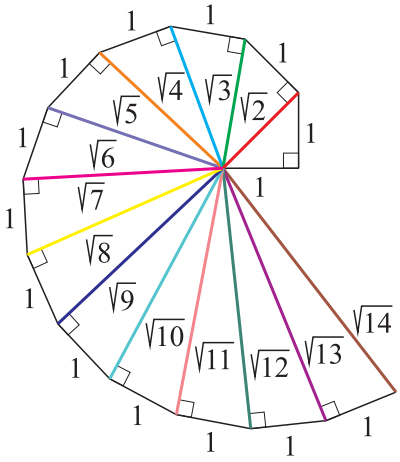
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$\sqrt{3}^2 = a^2 + b^2$$
$$3 = a^2 + b^2.$$

Jedno od mogućih rješenja je $a = 1\text{ cm}$ i $b = \sqrt{2}\text{ cm}$ jer $3 = 1^2 + \sqrt{2}^2$.



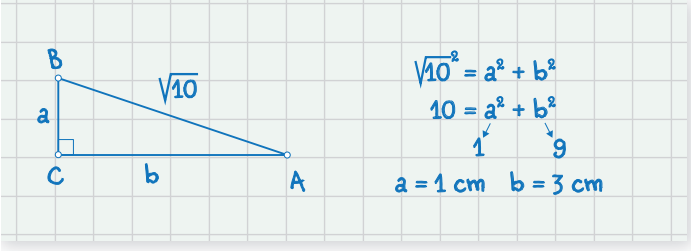


Proučimo sljedeću sliku.



Možemo uočiti da se na opisani način može nacrtati dužina duljine $\sqrt{a}$, $a \in \mathbf{N}$.

Ako želimo nacrtati dužinu duljine $\sqrt{10}$ cm, možemo crtati spiralu drugog korijena ili ćemo nacrtati pravokutni trokut u kojem je $\sqrt{10}$ cm duljina jedne od njegovih stranica.



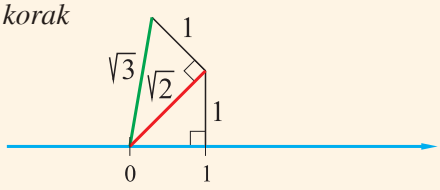
Usvojeni postupci crtanja dužina duljine $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}\ldots$ omogućit će nam kvalitetan prikaz iracionalnih brojeva na brojevnom pravcu.

Primjer 4.

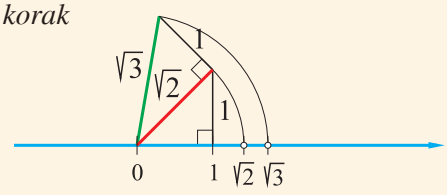
Naznačimo na brojevnom pravcu s jediničnom dužinom duljine 2 cm točke pridružene brojevima $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$.

Rješenje:

1. *korak*



2. *korak*



Iznad brojevnog pravca docrtali smo pravokutne trokute s hipotenuzama odgovarajućih duljina. Šestarom je potrebno samo prenijeti duljine $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ na brojevni pravac te odrediti tražene točke.

Uočimo da se i svi iracionalni brojevi mogu prikazati na brojevnom pravcu.

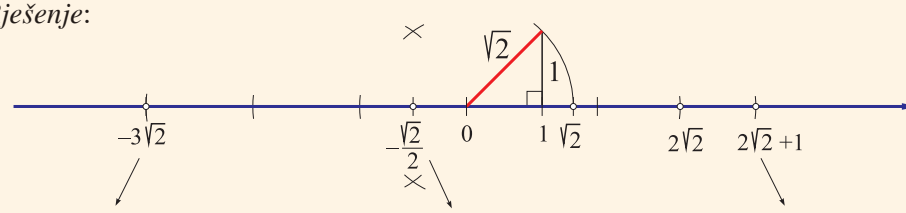
Svakom realnom broju pridružena je točno jedna točka brojevnog pravca.
Vrijedi i obratno, svakoj točki brojevnog pravca pridružen je točno jedan realni broj.

Primjer 5.

Odredimo na brojevnom pravcu $(|OE| = 10\text{ mm})$ točke pridružene brojevima:

$$\sqrt{2},\quad -3\sqrt{2},\quad 2\sqrt{2}+1 \quad \text{i} \quad -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Rješenje:



dužinu duljine $\sqrt{2}$ nanijeli smo tri puta lijevo od ishodišta

simetralom dužine dijelimo dužinu na dvije dužine jednakih duljina

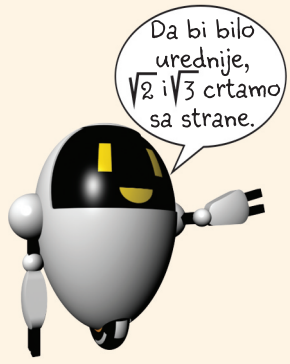
dva puta smo nanijeli dužinu duljine $\sqrt{2}$ desno od ishodišta i još jednu jediničnu dužinu

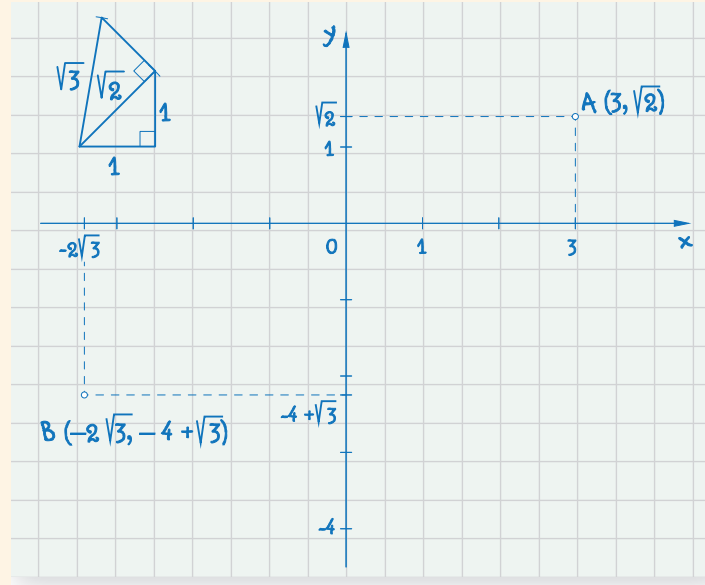
Sve naučene korake prikazivanja iracionalnih brojeva na brojevnom pravcu možemo proširiti i na prikaz točaka s iracionalnim koordinatama u koordinatnom sustavu u ravnini.

Primjer 6.

U koordinatnom sustavu u ravnini odredimo točke $A(3, \sqrt{2})$ i $B(-2\sqrt{3}, -4+\sqrt{3})$.

Rješenje:





Zadatci 5.4.

1. Dopuni rečenice u svojoj bilježnici:

Svakom racionalnom broju možemo pridružiti ____ ____ ____ na brojevnom pravcu.

Svakom iracionalnom broju možemo pridružiti ____ ____ ____ na brojevnom pravcu.

Svaka točka brojevnog pravca pridružena je ____ ____ ____ broju.

2. Na brojevnom pravcu pridruži točke brojevima:

a) $\frac{5}{7}$, $-\frac{11}{7}$, $2\frac{1}{7}$ i $-1\frac{3}{7}$

b) $\frac{5}{9}$, $-\frac{7}{9}$, $-1\frac{4}{9}$ i $\frac{16}{9}$

c) $\frac{-2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{6}$ i $3\frac{5}{6}$

d) $-2\frac{3}{4}$, $\frac{7}{12}$, $-\frac{5}{3}$ i $\frac{11}{6}$

e) 3.4, -2.1, 1.9 i -0.8

f) -2.34, -2.29, -2.3 i -2.5.

3. Nacrtaj pravokutni trokut kojemu je duljina hipotenuze:

a) $\sqrt{5}$ cm **b)** $\sqrt{10}$ cm

c) $\sqrt{13}$ cm **d)** $\sqrt{17}$ cm

e) $\sqrt{40}$ cm **f)** $\sqrt{26}$ cm

g) $\sqrt{8}$ cm **h)** $\sqrt{18}$ cm.

4. Nacrtaj pravokutni trokut kojemu je duljina jedne katete:

a) $\sqrt{7}$ cm **b)** $\sqrt{8}$ cm

c) $\sqrt{12}$ cm **d)** $\sqrt{21}$ cm.

5. Nacrtaj dužinu duljine $\sqrt{8}$ cm crtajući spiralu drugog korijena.

6. Na brojevnom pravcu ($|OE| = 15$ mm) označi točke pridružene brojevima $-\sqrt{2}$ i $-\sqrt{3}$.

7. Na brojevnom pravcu ($|OE| = 1$ cm) označi točke pridružene brojevima $2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{3}$ i $-3\sqrt{2}$.

8. Na brojevnom pravcu ($|OE| = 25$ mm) označi točke pridružene brojevima $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Na brojevnom pravcu označi točke pridružene brojevima $\sqrt{2}+1$, $-\sqrt{3}+1$ i $\sqrt{3}-5$.

10. Na brojevnom pravcu označi točke pridružene brojevima $-2\sqrt{2}-2$, $-2\sqrt{3}+5$ i $\sqrt{5}+1$.

11. Na brojevnom pravcu označi točke pridružene brojevima $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ i $-\frac{\sqrt{3}}{2}+4$.

12. Riješi jednadžbe: $3x^2 = 27$, $2x^2 = 36$, $x^2 - 6 = 3$, $\frac{1}{2}x^2 = 2$, $(x-1)^2 = 3$. Sva iracionalna rješenja prikaži na brojevnom pravcu.

13. U koordinatnom sustavu u ravnini odredi točke $A(-1, -\sqrt{2})$ i $B(\sqrt{3}, 2)$.

14. U koordinatnom sustavu u ravnini odredi točke $C(-2, -2\sqrt{3})$ i $D(3\sqrt{2}, -4)$.

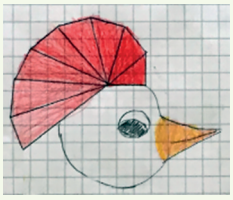
15. U koordinatnom sustavu u ravnini odredi točke $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -3\right)$ i $N(-2, -\sqrt{2}+4)$.

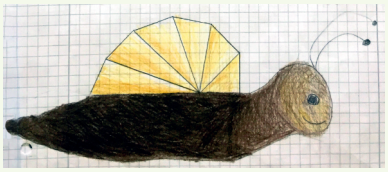
16. U koordinatnom sustavu na pravcu istakni dužinu kojoj pripadaju sve točke $T(x)$ tako da je $x \in \langle -2\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

17. U koordinatnom sustavu u ravnini istakni dio ravnine kojem pripadaju sve točke $T(x, y)$ tako da je:

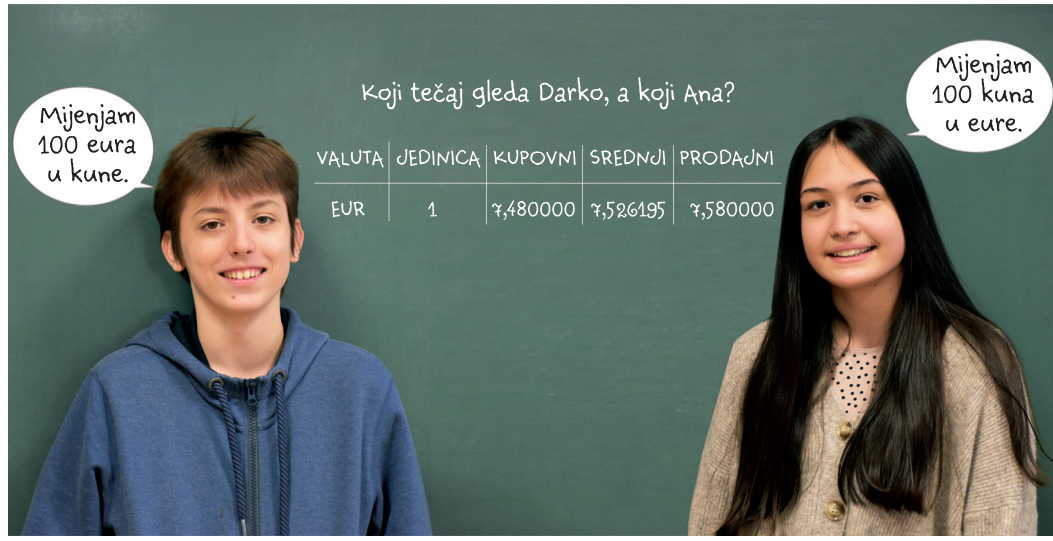
a) $x > -\sqrt{3}$ **b)** $y \leqslant \sqrt{2}$.

18. Nacrtaj crtež na kojem ćeš istaknuti spiralu drugog korijena.





5.5. Preračunavanje valuta



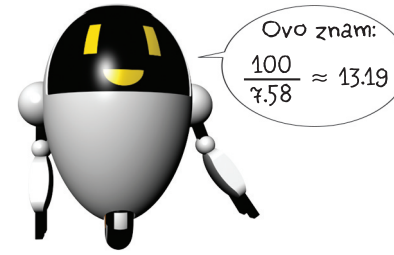
Tečaj neke valute predstavlja odnos između jedinica jedne valute i iznosa druge valute u koju se ta valuta mijenja u određenom trenutku.

Hrvatska narodna banka utvrđuje vrijednost kune prema drugim valutama te oblikuje tečajnu listu u Hrvatskoj. Srednji tečaj uglavnom međusobno koriste banke u procesu trgovanja devizama. Želi li Darko promijeniti eure u kune, dakle on **kupuje kune**, valutni mu se izračun temelji na **kupovnom tečaju**.

Prema istaknutom tečaju Darko za 1 euro može dobiti $7.48\ \text{kn}$, a za 100 eura bi dobio $100 \cdot 7.48\ \text{kn} = 748\ \text{kn}$. Ana koja **prodaje kune** valutni izračun treba temeljiti na **prodajnom tečaju**. Prema njemu 1 euro vrijedi $7.58\ \text{kn}$.

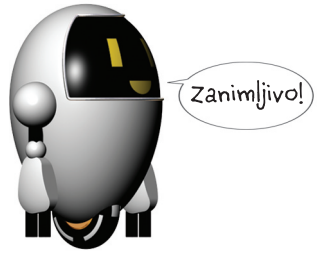
$1\ €$	$7.58\ \text{kn}$	$: 7.58$
$\frac{1}{7.58}\ €$	$1\ \text{kn}$	$: 7.58$
$\frac{100}{7.58}\ €$	$100\ \text{kn}$	$\cdot 100$

$\cdot 100$



Ana će za $100\ \text{kn}$ dobiti 13.19 eura.

Dobro je primijetiti da u prikazu novčanih iznosa banke koriste decimalni zarez na mjestu na kojem u matematičkim izrazima koristimo decimalne točke.



BANKAR	MATEMATIČAR
20,05	20.05
1.020,05	1 020.05

Primjer 1.

Prema tečajnoj listi izračunaj koliko:

a) američkih dolara možemo kupiti za 143 kune
b) kuna možemo kupiti za 320 američkih dolara
c) mađarskih forinti možemo kupiti za 220 kuna
d) kuna možemo kupiti za 4 230 mađarskih forinti.

Tečajna lista

valuta	šifra valute	jedinica	kupovni za efektivu i čekove	kupovni za devize	srednji tečaj HNB	prodajni za devize	prodajni za efektivu i čekove
AUD	036	1	4,492241	4,539036	4,671754	4,819801	4,866595
CAD	124	1	4,625501	4,673684	4,813376	4,962778	5,010960
CZK	203	1	0,276706	0,279589	0,287743	0,296883	0,299765
DKK	208	1	0,971731	0,981853	1,011667	1,042586	1,052708
HUF	348	100	2,020972	2,042024	2,109419	2,168334	2,189386
JPY	392	100	5,715597	5,775135	5,937358	6,132360	6,191897
NOK	578	1	0,687286	0,694445	0,714426	0,737401	0,744560
SEK	752	1	0,713579	0,721012	0,743232	0,765611	0,773044
CHF	756	1	6,669251	6,738723	6,955175	7,155551	7,225022
GBP	826	1	7,977137	8,060233	8,306142	8,558804	8,641899
USD	840	1	5,902267	5,963749	6,141827	6,332641	6,394123
RSD	941	1	0,061488	0,062128		0,065971	0,066612
BAM	977	1	3,721052	3,798052	3,848082	3,902003	3,946279
EUR	978	1	7,470000	7,480000	7,526195	7,580000	7,590000
PLN	985	1	1,616135	1,632970	1,692687	1,733978	1,750813

Rješenje:

a) Prodajemo kune pa gledamo prodajni tečaj.

: 6.332641	1 USD	6.332641 kn
	$\frac{1}{6.332641}$ USD	1 kn
· 143	$\frac{143}{6.332641}$ USD $\approx$ 22.58 USD	143 kn

Za 143 kune možemo kupiti 22.58 američkih dolara.

b) Kupujemo kune pa gledamo kupovni tečaj prema kojem za 1 američki dolar možemo kupiti 5.963749 kuna, a za 320 američkih dolara kupujemo $320 \cdot 5.963749$ kuna što je približno 1 908.40 kuna.

c) Prodajemo kune pa gledamo prodajni tečaj.

: 2.168334	100 HUF	2.168334 kn
	$\frac{100}{2.168334}$ HUF	1 kn
· 220	$\frac{22\,000}{2.168334}$ HUF $\approx$ 10 146.04 HUF	220 kn

Za 220 kn dobit ćemo 10 146.04 mađarskih forinti.

d) Kupujemo kune i gledamo kupovni tečaj. Za 100 mađarskih forinti možemo dobiti 2.042024 kuna, a za jednu mađarsku forintu možemo dobiti 0.02042024 kuna. Za 4 230 mađarskih forinti kupujemo $4\,230 \cdot 0.02042024$ kuna što je približno 86.38 kuna.

Zadatci 5.5.

1. Prouči tečajnu listu i izračunaj koliko:

a) australskih dolara možemo dobiti za 1 000 kn

b) kuna možemo dobiti za 1 000 australskih dolara

c) japanskih jena možemo dobiti za 5 000 kn

d) kuna možemo dobiti za 5 000 japanskih jena.

valuta	jedinica	kupovni	srednji	prodajni
AUD	1	4.657739	4.671754	4.685768
JPY	100	5.919546	5.937358	5.955170

2. Tablice dopuni u bilježnici koristeći se tečajnom listom.

valuta	jedinica	kupovni	srednji	prodajni
EUR	1	7.503616	7.526195	7.548774
HUF	100	2.108091	2.109419	2.115747
USD	1	6.123402	6.141827	6.160252
JPY	100	5.919546	5.937358	5.955170

	dobiveni iznos (kn)
415 EUR	
210 USD	
1 812 JPY	
20 400 HUF	

	dobiveni iznos
1 300 kn	EUR
2 421 kn	USD
3 217 kn	JPY
1 450 kn	HUF

3. Marko je krenuo iz Zagreba sa 9 500 kn u Berlin. Prouči tečajne liste u Hrvatskoj i Njemačkoj te izračunaj je li Marku povoljnije promijeniti kune u eure u Hrvatskoj ili Njemačkoj. Obrazloži svoj odgovor.

tečaj u Hrvatskoj			
valuta	jedinica	kupovni	prodajni
EUR	1	7.400718	7.475098

tečaj u Njemačkoj			
valuta	jedinica	kupovni	prodajni
HRK	1	0.132700	0.134800

4. Lidija je krenula iz Zagreba na put prema Londonu, ali je dva dana boravila u Parizu. Ponijela je 7 000 kn iz Zagreba i potrošila 2 000 kn u Parizu. Izračunaj je li bilo povoljnije mijenjati:

a) sav iznos novca u Zagrebu

b) sav iznos novca u Parizu

c) dio novca u Zagrebu (2 000 kn u eure), dio u Londonu (5 000 kn u GBP).

tečajna lista 1.7. u Hrvatskoj			
valuta	jedinica	kupovni	prodajni
EUR	1	7.538564	7.561248
GBP	1	8.255107	8.279947

tečajna lista 1.7. u Francuskoj			
	1 EURO	devises	contre euros
Croatia	7.567 HRK	1 HRK	0.13215 EURO
Royaume – Uni	0.893734 GBP	1 GBP	1.11891 EURO

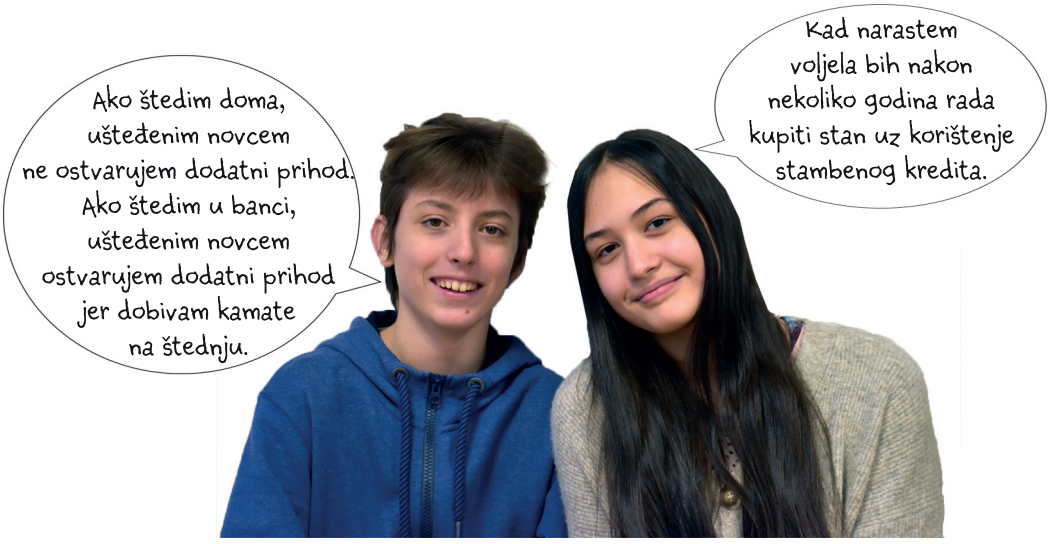
tečajna lista 3.7. u Velikoj Britaniji		
	1 GBP	inv. 1 GBP
Croatian kuna	8.323291	0.120145
EURO	1.103343	0.906336

5. Ivan je odlučio 230 eura mijenjati u kune i 3 400 kuna u mađarske forinte. Proučio je tečaj u dvjema mjenjačnicama i odlučio zamijeniti novac na najpovoljniji način. Gdje je Ivan zamijenio novac? Razmisli u kojoj bi situaciji Ivan postupio drukčije.

mjenjačnica *Povoljno*			
valuta	jedinica	kupovni	prodajni
EUR	1	7.480000	7.580000
HUF	100	2.042024	2.168334

mjenjačnica *Isplativo*			
valuta	jedinica	kupovni	prodajni
EUR	1	7.485000	7.585000
HUF	100	2.039626	2.173585

5.6. Kamate



Želim štedjeti
5.000 HRK.
Uplata bi bila
jednokratna,
a planiram oročiti
na rok
od 20 mjeseci.

Efektivna kamatna stopa:
0,02 %

Ukupni iznos isplate:
5.001,60 HRK

Želim štedjeti
5.000 HRK.
Uplata bi bila
jednokratna,
a planiram oročiti
na rok
od 48 mjeseci.

Efektivna kamatna stopa:
0,05 %

Ukupni iznos isplate:
5.009,06 HRK

Nakon 20 mjeseci Marin bi za 5 000 kn dobio 1.60 kn, a nakon 48 mjeseci dobio bi 9.06 kn. Ako Marin dulje štedi, dobit će više kamata na štednju. Također, ako štedi veći iznos novca, dobit će više kamata na štednju.

Želim štedjeti
10.000 HRK.
Uplata bi bila
jednokratna,
a planiram oročiti
na rok
od 48 mjeseci.

Efektivna kamatna stopa:
0,04 %

Ukupni iznos isplate:
10.017,89 HRK

Usporedimo tri mogućnosti odabira stambenog kredita. Lagano uočavamo da ako **otplaćujemo** isti iznos **dulje vremena**, tada banci **plaćamo više kamata**.

Potreban mi je kredit u iznosu od 500.000 HRK. za stan do 90 m2 Razmišljam o zelenim (energetski štedljivim) rješenjima. Kredit planiram otplatiti u roku od 15 godina.	Potreban mi je kredit u iznosu od 700.000 HRK. za stan do 90 m2 Razmišljam o zelenim (energetski štedljivim) rješenjima. Kredit planiram otplatiti u roku od 15 godina.	Potreban mi je kredit u iznosu od 500.000 HRK. za stan do 90 m2 Razmišljam o zelenim (energetski štedljivim) rješenjima. Kredit planiram otplatiti u roku od 30 godina.
Kamatna stopa: 3,05 % fiksna	Kamatna stopa: 3,05 % fiksna	Kamatna stopa: 3,05 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 3,64 %	Efektivna kamatna stopa: 3,60 %	Efektivna kamatna stopa: 3,75 %
Naknada za vođenje tekućeg računa: 12,00 HRK/mjesečno 1,59 EUR	Naknada za vođenje tekućeg računa: 12,00 HRK/mjesečno 1,59 EUR	Naknada za vođenje tekućeg računa: 12,00 HRK/mjesečno 1,59 EUR
Premija osiguranja nekretnine od požara: 362,88 HRK/godišnje 48,22 EUR	Premija osiguranja nekretnine od požara: 362,88 HRK/godišnje 48,22 EUR	Premija osiguranja nekretnine od požara: 362,88 HRK/godišnje 48,22 EUR
Premija osiguranja korisnika kredita od nezgode: 400,00 HRK/godišnje 53,15 EUR	Premija osiguranja korisnika kredita od nezgode: 560,00 HRK/godišnje 74,41 EUR	Premija osiguranja korisnika kredita od nezgode: 400,00 HRK/godišnje 53,15 EUR
Kamata: 136.580,95 HRK 18.147,41 EUR	Kamata: 191.213,50 HRK 25.406,40 EUR	Kamata: 308.224,00 HRK 40.953,50 EUR
Ukupni iznos otplate: 648.036,19 HRK 86.104,09 EUR	Ukupni iznos otplate: 905.068,69 HRK 120.255,81 EUR	Ukupni iznos otplate: 831.122,44 HRK 110.430,63 EUR

Pogledajmo omjere novčanog iznosa koji vraćamo otplatom kredita i novčanog iznosa koji smo posudili od banke u prvoj situaciji:

$$\frac{648\,036.19}{500\,000} \approx 1.30.$$

Zapišemo li dobiveni broj kao postotak, to je $130\,\%$. Možemo iščitati da smo banci uplatili $30\,\%$ (od iznosa posuđenog novca) više nego što smo od banke posudili.

Kada posuđujemo isti iznos na dulji vremenski period, tada je omjer:

$$\frac{831\,122.44}{500\,000} \approx 1.66 = 166\,\%.$$

Uočimo da banci uplaćujemo $66\,\%$ (od iznosa posuđenog novca) više nego što smo od banke posudili.

Dakle, ako otplaćujemo kredit tijekom duljeg vremenskog perioda, ukupno ćemo uplatiti veći novčani iznos nego što bismo ga uplatili da kredit otplaćujemo u kraćem vremenskom periodu.

Ako podižemo kredit u iznosu od $500\,000$ kn, ukupno ćemo banci uplatiti $648\,036.19$ kn, što je za $148\,036.19$ kn više od iznosa posuđenog novca.

Ako podižemo kredit u iznosu od $700\,000$ kn, ukupno ćemo banci uplatiti $905\,068.69$ kn, što je za $205\,068.69$ kn više od iznosa posuđenog novca.

Dakle, **posuđujemo li veći iznos novca, bit će veća kamata** koju plaćamo banci.

Proučimo postotke koji prikazuju omjer novčanog iznosa koji vraćamo otplatom kredita i novčanog iznosa koj smo posudili od banke:

$$\frac{648\,036.19}{500\,000} \approx 1.30 = 130\ \%, \qquad \frac{905\,068.69}{700\,000} \approx 1.29 = 129\ \%.$$

U postotcima povećanje nije vidljivo, ali moramo znati da je $30\ \%$ od $500\,000$ znatno manje od $29\ \%$ od $700\,000$:

$$150\,000 \text{ kn} < 203\,000 \text{ kn}.$$

Zaključujemo da je razlika ukupno uplaćenog iznosa i posuđenog iznosa veća u slučaju povećanja posuđenog iznosa.

Želim gotovinu u iznosu od 100.000 HRK. Potreban iznos poslužit će mi za osobne ciljeve. Kredit planiram otplatiti u roku od 72 mjeseci.

Premija osiguranja: 6.112,05 HRK/jednokratno 812,10 EUR
Kamata: 17.809,23 HRK 2.366,30 EUR
Ukupni iznos otplate: 130.897,33 HRK 17.392,24 EUR

Potreban mi je kredit u iznosu od 100.000 HRK. za stan do 90 m2 Razmišljam o zelenim (energetski štedljivim) rješenjima. Kredit planiram otplatiti u roku od 6 godina.

Premija osiguranja korisnika kredita od nezgode: 80,00 HRK/godišnje 10,63 EUR
Kamata: 9.709,60 HRK 1.290,11 EUR
Ukupni iznos otplate: 110.201,60 HRK 14.642,41 EUR

Pogledajmo omjere ukupno uplaćenog iznosa i posuđenog iznosa novca za gotovinski i stambeni kredit:

$$\frac{130\,897.33}{100\,000} \approx 131\ \%$$

$$\frac{110\,201.60}{100\,000} \approx 110\ \%.$$

Usporedimo li postotke, zaključujemo kako je ukupni trošak gotovinskog kredita (s istim početnim iznosom podignutim u istoj banci na isti vremenski period) puno veći od troška stambenog kredita.

Zadatci 5.6.

1. O čemu ovisi iznos kamata kada štedimo? Točne odgovore napiši u bilježnicu.

a) O iznosu koji štedimo.

b) O vremenskom periodu štednje.

c) O kamatnoj stopi koju određuje banka.

2. Prouči uvjete pet stambenih kredita koje nudi ista banka.

A) Potreban mi je kredit u iznosu od 200.000 HRK. za stan do 90 m2 Razmišljam o zelenim (energetski štedljivim) rješenjima. Kredit planiram otplatiti u roku od 6 godina.

Rok otplate: 6 godina
Kamatna stopa: 3,05 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 3,69 %
Ukupni iznos otplate: 222.466,97 HRK 29.511,57 EUR

B) Potreban mi je kredit u iznosu od 200.000 HRK. za stan do 90 m2 Razmišljam o zelenim (energetski štedljivim) rješenjima. Kredit planiram otplatiti u roku od 15 godina.

Rok otplate: 15 godina
Kamatna stopa: 3,05 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 3,85 %
Ukupni iznos otplate: 262.385,59 HRK 34.807,01 EUR

C) Potreban mi je kredit u iznosu od 200.000 HRK. za stan do 90 m2 Razmišljam o zelenim (energetski štedljivim) rješenjima. Kredit planiram otplatiti u roku od 30 godina.

Rok otplate: 30 godina
Kamatna stopa: 3,05 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 3,92 %
Ukupni iznos otplate: 338.884,41 HRK 44.955,04 EUR

D) Potreban mi je kredit u iznosu od 300.000 HRK. za stan do 90 m2 Razmišljam o zelenim (energetski štedljivim) rješenjima. Kredit planiram otplatiti u roku od 30 godina.

Rok otplate: 6 godina
Kamatna stopa: 3,05 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 3,82 %
Ukupni iznos otplate: 502.879,31 HRK 66.709,93 EUR

E) Potreban mi je kredit u iznosu od 300.000 HRK. za stan do 90 m2 Razmišljam o zelenim (energetski štedljivim) rješenjima. Kredit planiram otplatiti u roku od 6 godina.

Rok otplate: 6 godina
Kamatna stopa: 3,05 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 3,56 %
Ukupni iznos otplate: 332.605,88 HRK 44.122,15 EUR

a) Koliki je omjer novčanog iznosa koji vraćamo i novčanog iznosa koji smo posudili za svih pet kredita?

b) Koja je prednost podizanja kredita **A)**, a koji je nedostatak?

c) Koja je prednost podizanja kredita **D)**, a koji je nedostatak?

d) Koja je prednost podizanja kredita **E)**, a koji je nedostatak?

3. Prouči uvjete dvaju kredita koje nudi ista banka.

A) 90.000 HRK

Rok otplate: 6 godina
Kamatna stopa: 3,05 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 3,29 %
Ukupni iznos otplate: 99.136,98 HRK 13.151,11 EUR

B) 90.000 HRK

Rok otplate: 6 godina
Kamatna stopa: 5,20 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 7,82 %
Ukupni iznos otplate: 117.811,23 HRK 15.628,36 EUR

a) U kojem je primjeru riječ o stambenom, a u kojem o gotovinskom kreditu?

b) Koliki je omjer novčanog iznosa koji vraćamo i iznosa koji smo posudili za oba kredita?

4. Prouči uvjete dvaju kredita koje nudi ista banka.

A) 200.000 HRK

Rok otplate: 6 godina
Kamatna stopa: 5,20 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 7,65 %
Ukupni iznos otplate: 260.746,91 HRK 34.589,63 EUR

B) 50.000 HRK

Rok otplate: 6 godina
Kamatna stopa: 3,05 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 3,29 %
Ukupni iznos otplate: 55.081,42 HRK 7.306,88 EUR

a) U kojem je primjeru riječ o stambenom, a u kojem o gotovinskom kreditu?

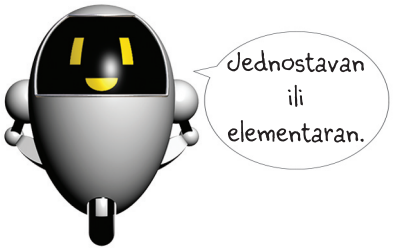
b) Koliki je omjer novčanog iznosa koji vraćamo i iznosa koji smo posudili za oba kredita?

5.7. Vjerojatnost slučajnog događaja

Ljudi su skloni predviđati hoće li se neki događaj dogoditi i kolika je vjerojatnost da se upravo taj događaj i dogodi.

Proučimo jednostavan primjer bacanja novčića.

Novčić bacamo uvis na ravnu podlogu. Novčić će pasti ili na glavu ili pismo, no ne znamo unaprijed na koju će stranu pasti. Bacanje novčića je pokus u kojem su moguća dva ishoda i tom pokusu ne znamo unaprijed ishod.



Pokus kojemu unaprijed ne znamo ishod naziva se **slučajni pokus**. **Slučajni događaj** je ishod bilo kojeg slučajnog pokusa. U opisanom se pokusu pojavljivanje pisma i pojavljivanje glave nazivaju **elementarni** ili **jednostavni događaji** jer se ne mogu razložiti na jednostavnije događaje.

Primjer 1.

Iznad ravne plohe bacamo kocku na kojoj su označeni brojevi 1, 2, 3, 4, 5 i 6.

a) Je li taj pokus slučajni pokus?
b) Napišimo skup svih elementarnih događaja.

Rješenje:

a) Opisani pokus je slučajan jer ne znamo unaprijed koji će se ishod dogoditi.

b) Skup svih elementarnih događaja sastoji se od šest događaja: kocka pokazuje broj 1, kocka pokazuje broj 2, kocka pokazuje broj 3, kocka pokazuje broj 4, kocka pokazuje broj 5 i kocka pokazuje broj 6. Označimo li sa S skup svih elementarnih događaja, lakše zapisujemo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

U pokusu opisanom u prethodnom primjeru možemo uočiti događaj "kocka pokazuje broj manji ili jednak broju 4". Označimo li taj događaj s A, zapisujemo:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Događaj A je **složen događaj** jer se može razložiti na četiri jednostavna događaja.

U svakom slučajnom pokusu možemo razmatrati **vjerojatnost** da se dogodi neki elementarni ili složeni događaj.

Pogledamo li prvi pokus sa simetričnim novčićem, vjerojatnost da padne pismo jednaka je vjerojatnosti da padne glava. Izgledi za pismo su pola-pola, tj. kažemo da je vjerojatnost da padne pismo jednaka $\frac{1}{2}$.

Označimo li s A događaj "pala je glava", zapisujemo:

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

vjerojatnost elementarnog događaja A

Primjer 2.

Iznad ravne plohe bacamo kocku na kojoj su označeni brojevi 1, 2, 3, 4, 5 i 6.
a) Kolika je vjerojatnost da je pao broj 5?
b) Kolika je vjerojatnost da je pao neki od parnih brojeva?

Rješenje:

a) Kocka može prikazivati broj 1, broj 2, broj 3, broj 4, broj 5 ili broj 6, pa je vjerojatnost da je pao broj 5 jednaka $\frac{1}{6}$. Označimo li s C događaj "pao je broj 5", zapisujemo $P(C) = \frac{1}{6}$.

b) Događaj "pao je neki od parnih brojeva" nije elementaran već složen jer se može razložiti na tri elementarna događaja: "pao je broj 2", "pao je broj 4", "pao je broj 6". Označimo taj događaj s D. Budući da događaj D ima tri povoljna elementarna događaja i da je vjerojatnost svakog od elementarnih događaja jednaka $\frac{1}{6}$, jasno je da je: $P(D) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$. Vrijedi:

$$P(D) = \frac{\text{broj elementarnih događaja povoljnih za } D}{\text{ukupni broj elementarnih događaja}} = \frac{3}{6}.$$

Promatramo li slučajni pokus s konačno mnogo elementarnih događaja koji su svi jednako vjerojatni, tada vrijedi:

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}},$$

pri čemu je A neki događaj.

Primjer 3.

U kutiji se nalaze samo 3 plave, 5 žutih i 2 crvene kuglice. Sve su kuglice jednake, osim što su drukčije boje. Iz kutije na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost za sljedeće događaje:
a) $A = \{\text{izvučena je plava kuglica}\}$ **b)** $B = \{\text{izvučena je zelena kuglica}\}$
c) $C = \{\text{izvučena je kuglica}\}$?

Rješenje: Ukupno ima $3 + 5 + 4 = 12$ kuglica i toliko je elementarnih događaja, tj. broj načina da se iz kutije izvuče jedna kuglica.

a) Za događaj A su 3 povoljna događaja te vrijedi: $P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

b) Za događaj B 0 je povoljnih događaja te vrijedi: $P(B) = \frac{0}{12} = 0$. Događaj B ne može se dogoditi. Kažemo da je takav događaj **nemoguć**. Vjerojatnost nemogućeg događaja jednaka je 0.

c) Za događaj C 12 je povoljnih događaja te vrijedi: $P(C) = \frac{12}{12} = 1$. Događaj C dogodi se pri svakom izvođenju pokusa. Kažemo da je takav događaj **siguran**. Vjerojatnost sigurnog događaja je 1.

Primjer 4.

Neka je slučajni pokus bacanje dviju simetričnih kocaka (jedne plave i jedne zelene) i neka je:

$A =$ "na obje kocke pojavili su se parni brojevi"

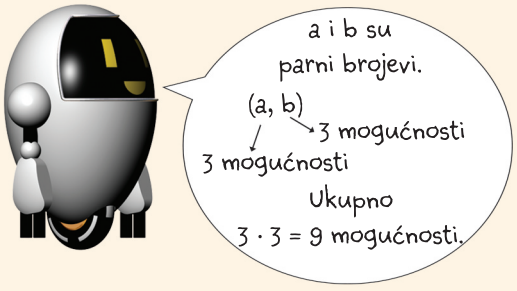
$B =$ "zbroj brojeva koji su se pojavili je 4"

$C =$ "zbroj brojeva koji su se pojavili manji je od 4".

Izračunajmo $P(A)$, $P(B)$ i $P(C)$.

Rješenje: Razmotrimo slučajni pokus i svaki od ishoda bacanja dviju kocaka prikažimo kao uređeni par. Ukupno je 36 ishoda:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\
(2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\
(3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\
(4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\
(5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\
(6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6).
\end{array}$$



Za događaj A povoljni su sljedeći događaji $(2,2)$, $(2,4)$, $(2,6)$, $(4,2)$, $(4,4)$, $(4,6)$, $(6,2)$, $(6,4)$, $(6,6)$ i njih je ukupno 9. Tada je

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 25\ \%.$$

Za događaj B povoljni su događaji $(1,3)$, $(2,2)$ i $(3,1)$. Stoga je

$$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 8.33\ \%.$$

Za događaj C povoljni su događaji $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$ i $(3,1)$. Računamo: $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 17\ \%$.

Zadatci 5.7.

1. Napravi pokus s bacanjem novčića tako da novčić bacaš sto puta. Podatke zapiši u tablicu. Koliko je puta palo pismo, a koliko glava? Usporedi dobivene rezultate s ostalim učenicima u razredu.

2. Napravi pokus s bacanjem kocke tako da kocku bacaš sto puta. Podatke zapiši u tablicu. Koliko je puta pao broj 5? Usporedi dobivene rezultate s ostalim učenicima u razredu.

3. Napiši sve elementarne događaje u pokusu:

a) učiteljica ocjenjuje usmene odgovore učenika u 8.a

b) učiteljica odabire jednog učenika u tvom razredu.

4. Napiši sve elementarne događaje u pokusu:

a) iz kutije u kojoj su tri crvene, pet žutih i jedna plava olovka izvlačimo jednu olovku

b) s tanjura na kojemu je pet išlera, sedam krašuljaka i četiri vanilin kiflice odabiremo jedan kolač.

c) Napiši dva složena događaja za svaki od pokusa iz **a)** i **b)** podzadatka.

5. Bacamo kocku. Kolika je vjerojatnost događaja:

a) $A =$ "pao je broj 1"

b) $B =$ "pao je broj veći od 1"

c) $C =$ "pao je neparni broj"

d) $D =$ "pao je prosti broj"?

6. U kutiji se nalaze tri slatka, četiri kisela i dva ljuta bombona. Iz kutije izvlačimo jedan bombon. Kolika je vjerojatnost događaja:

a) $A =$ "izvučen je slatki bombon"

b) $B =$ "izvučen je bombon koji nije ljut"?

7. Na slučajan način bira se dvoznamenkasti broj. Kolika je vjerojatnost događaja:

a) $A =$ "znamenka desetice je broj 2"

b) $B =$ "jedna od znamenaka je broj 2"?

8. Na slučajan način bira se broj iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots 38, 39\}$. Kolika je vjerojatnost da je taj broj:

a) paran **b)** dvoznamenkast?

9. Na slučajan način bira se prirodan broj manji od 100. Kolika je vjerojatnost da je taj broj:

a) djeljiv s 31 **b)** višekratnik broja 8?

10. Na svakoj kartici napisano je po jedno slovo riječi OSMAŠI.

O	S	M	A	Š	I

Kolika je vjerojatnost da je izvučena kartica na kojoj je:

a) slovo A **b)** zatvornik **c)** otvornik?

11. Na svakoj kartici napisano je po jedno slovo riječi MATEMATIKA.

M	A	T	E	M	A	T	I	K	A

a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena kartica na kojoj je:

1) slovo A **2)** zatvornik **3)** broj 2

4) slovo M **5)** neko slovo?

b) Kako nazivamo događaj opisan u podzadatku **5)**, a kako onaj u podzadatku **3)**?

c) Napiši jedan nemoguć događaj.

d) Napiši jedan siguran događaj.

12. U novogodišnjoj tomboli u 8.b učenici su pripremili 43 srećke od kojih je 25 dobitnih, a u 8.c pripremili su 214 srećaka od kojih je 120 dobitnih. U kojem je razredu veća vjerojatnost da odabrana srećka bude dobitna?

13. Iz snopa od 32 različite karte (4 su boje i u svakoj boji je as, kralj, dama, dečko, 10, 9, 8 i 7) izvlačimo jednu kartu. Kolika je vjerojatnost da izvučemo kartu na kojoj je broj 10?

14. Neka je slučajni pokus bacanje dviju igraćih kocaka i neka je: $A =$"oba broja koja su se pojavila su ista", $B =$"oba broja koja su se pojavila su prosti brojevi", $C =$"zbroj brojeva koji su se pojavili je 7", $D =$"zbroj brojeva koji su se pojavili manji je od 11". Izračunaj vjerojatnost događaja A, B, C i D.

Zadatci za ponavljanje

1. Kojem od skupova pripadaju brojevi:

$$-4,\ 2.7,\ \frac{2}{1},\ -3\frac{1}{2},\ 4.21\dot{4}\ \text{ i }\ \frac{121}{11}?$$

2. Kojem skupu pripada rješenje jednadžbe:

a) $12 - 3x = -4x$

b) $-25 + x = -7x - 3$

c) $3 - (4 + x) = 5(7 - 2x)$

d) $\frac{3}{4}x = 1 - \frac{1}{3}x$

e) $2 - \frac{1 - 3x}{6} = \frac{5}{3}x - \frac{1}{12}$?

3. Je li jednadžba rješiva u skupu $\mathbf{Z}$:

a) $|x| = 18$ **b)** $2|x| = 5$

c) $3x(x - 2) = 3x^2$

d) $5x^2 = 5(x - 2)(x + 9)$

e) $-7(x - 1)(x + 1) = 8 - 7x^2 + x$?

4. Zapiši sljedeće razlomke kao decimalne brojeve i napiši koje je vrste napisani decimalni broj:

a) $\frac{53}{10}$ **b)** $\frac{-7}{1\,000}$ **c)** $\frac{5}{4}$

d) $-\frac{17}{5}$ **e)** $\frac{2}{9}$ **f)** $\frac{12}{11}$

g) $-\frac{23}{6}$ **h)** $-\frac{39}{8}$ **i)** $\frac{13}{20}$.

5. Prepiši u bilježnicu i spoji parove.

A)	$\frac{34}{2\,000}$	**a)**	0.17
B)	$\frac{17}{100}$	**b)**	1.7
C)	$\frac{1}{7}$	**c)**	0.017
		d)	$0.\dot{1}4285\dot{7}$

6. Poredaj po veličini brojeve počevši od najvećeg:

$$-0.29,\ -2.9,\ -0.2\dot{9},\ -0.\dot{2}\dot{9},\ -0.\dot{2}0\dot{9},\ \text{ i }\ -0.293.$$

7. Koji su od sljedećih brojeva iracionalni:

a) $\sqrt{39}$ **b)** $\sqrt{40}$ **c)** $\sqrt{\frac{27}{3}}$

d) $-\sqrt{5\frac{1}{5}}$ **e)** $-\sqrt{144}$ **f)** $\sqrt{3\frac{6}{25}}$?

8. U bilježnicu prepiši samo točne tvrdnje:

a) $\mathbf{Q} \cup \mathbf{N} = \mathbf{N}$ **b)** $\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$

c) $\mathbf{R} \cap \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$ **d)** $\mathbf{Q}^- \cup \mathbf{Q}^+ = \mathbf{Q}$

e) $\mathbf{R} \cap \mathbf{I} = \mathbf{Q}$.

9. Koji su od sljedećih brojeva racionalni:

a) $0.34343434\ldots$

b) $-0.34344344434444344444\ldots$

c) $3.444444\ldots$

d) $-\frac{3}{4}$?

10. Koji su od sljedećih brojeva iracionalni:

a) $2\sqrt{3} - \sqrt{12}$ **b)** $3\pi - \frac{6\pi}{3}$

c) $2 - 3\sqrt{2}$ **d)** $(4 - 2\sqrt{7})(4 + 2\sqrt{7})$

e) $(1 - \sqrt{11})^2 - \sqrt{11}^2$?

11. Odredi tri realna broja x za koje vrijedi:

a) $1.41 < x < \sqrt{2}$ **b)** $-\sqrt{3} > x > -1.75$.

12. Na brojevnom pravcu odredi točke pridružene brojevima:

a) $\frac{5}{6},\ -\frac{11}{6},\ -1\frac{1}{6}$ i $1\frac{5}{6}$

b) $\frac{3}{4},\ -2\frac{1}{2},\ -\frac{5}{4},\ 3\frac{1}{4}$ i 0.5

c) $2.3,\ -0.7,\ 4.2$ i -2.1.

13. Nacrtaj pravokutni trokut kojemu je duljina hipotenuze:

a) $\sqrt{37}$ cm **b)** $\sqrt{50}$ cm **c)** $\sqrt{32}$ cm.

14. Na brojevnom pravcu označi točke pridružene brojevima: $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ -2\sqrt{2}$ i $\sqrt{3} + 1$.

15. U koordinatnom sustavu na pravcu označi točke $A\left(-2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\right)$.

16. U koordinatnom sustavu u ravnini istakni točke $A(3, \sqrt{2})$ i $B(-\sqrt{3}, -2)$.

17. Prouči tečajnu listu i izračunaj koliko:

a) američkih dolara možemo dobiti za 2 000 kn

b) kuna možemo dobiti za 2 000 američkih dolara

c) mađarskih forinti možemo dobiti za 5 000 kn

d) kuna možemo dobiti za 5 000 mađarskih forinti.

valuta	jedinica	kupovni	srednji	prodajni
AUD	1	4.736459	4.750711	4.764963
CAD	1	4.807008	4.821472	4.835936
HUF	100	2.063217	2.069425	2.075633
USD	1	6.124451	6.142880	6.161309

18. Ana je krenula na put iz Zagreba za New York, ali je tri dana boravila u Londonu. Ponijela je 7 000 kn iz Zagreba i potrošila 2 000 kn u Londonu. Izračunaj koliko bi dobila funti i dolara ako mijenja:

a) dio novca u Zagrebu, tj. 2 000 kn u funte, a preostalih 5 000 kn u dolare u Londonu

b) dio novca u Londonu, tj. 2 000 kn u funte, a preostalih 5 000 kn u dolare u New Yorku.

tečajna lista u Hrvatskoj			
valuta	jedinica	kupovni	prodajni
GBP	1	8.659427	8.711506
USD	1	6.238933	6.25765

tečajna lista u Velikoj Britaniji		
	buying rate	selling rate
1 HRK	0.112879	0.117440
1 USD	0.706369	0.734906

tečajna lista u SAD		
	buying rate	selling rate
1 HRK	0.155907	0.163799

19. Prouči uvjete dvaju kredita koje nudi ista banka.

A)

150.000 HRK

Rok otplate: 96 mjeseci
Kamatna stopa: 5,20 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 7,74 %
Ukupni iznos otplate: 213.267,73 HRK 28.276,49 EUR

B)

150.000 HRK

Rok otplate: 8 godina
Kamatna stopa: 3,05 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 3,83 %
Ukupni iznos otplate: 174.016,44 HRK 23.072,29 EUR

a) U kojem je primjeru riječ o stambenom, a u kojem o gotovinskom kreditu?

b) Koliki je omjer novčanog iznosa koji vraćamo i iznosa koji smo posudili za oba kredita?

20. Lea izvlači jednu od kuglica iz kutije u kojoj se nalazi 45 jednakih kuglica na kojima su napisani brojevi od 1 do 45. Kolika je vjerojatnost da izvuče:

a) kuglicu na kojoj je broj 37

b) kuglicu na kojoj piše neparni broj

c) kocku na kojoj piše broj 11

d) kuglicu na kojoj piše broj manji od 46?

Kako se naziva događaj opisan u primjeru **c)**, a kako onaj opisan u primjeru **d)**?

21. Mario je u slastičarnici odlučio odabrati i kupiti jednu kuglicu sladoleda. Mogao je birati između sljedećih okusa: banana, čokolada, višnja, jagoda i limun.

a) Kolika je vjerojatnost da je odabrao voćni okus?

b) Napiši jedan nemoguć događaj.

c) Napiši jedan siguran događaj.

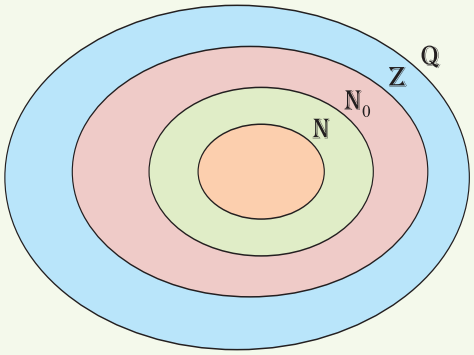
ele-udzbenik.hr
U elektroničkoj inačici udžbenika pronađi više zadataka za uvježbavanje.

Jednostavni zadatci

1. U bilježnicu nacrtaj Vennov dijagram te napiši brojeve

$$\frac{0}{5},\ -\frac{20}{4},\ -1.4,\ 2.3\dot{2},\ 1\frac{1}{4}\ \text{i}\ \frac{15}{3}$$

u odgovarajući skup.



2. Ima li jednadžba $4x - 5 = 6x + 17$ rješenje u skupu cijelih brojeva?

3. Je li jednadžba $2(x - 3) - 5 = 3 - (x + 2)$ rješiva u skupu **N**?

4. Je li jednadžba $2x^2 = 200$ rješiva u skupu **N**?

5. Je li jednadžba $45x^2 = 125$ rješiva u skupu **Q**?

6. Zapiši sljedeće razlomke kao decimalne brojeve:

a) $\frac{3}{10}$ **b)** $\frac{4}{5}$

c) $-\frac{3}{2}$ **d)** $-\frac{7}{4}$.

7. Zapiši zadane brojeve u decimalnom obliku:

a) $\frac{2}{3}$ **b)** $-\frac{1}{6}$.

8. Napiši jedan:

a) broj s konačnim decimalnim zapisom

b) čisto periodični decimalni broj

c) mješovito periodični decimalni broj.

9. Dopuni tablicu u bilježnici.

razlomak	decimalni broj	vrsta decimalnog zapisa
	2.31	
$-\frac{25}{3}$		
$-\frac{17}{6}$		
$\frac{5}{11}$		

10. Poredaj po veličini brojeve počevši od najmanjeg: 23.4, 23.14, $23.\dot{4}$, i $23.\dot{1}0\dot{4}$.

11. Koji su od sljedećih brojeva iracionalni:

a) $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{9}$ **c)** $\sqrt{12}$ **d)** $\sqrt{16}$?

12. Prepiši u bilježnicu samo točne tvrdnje.

a) Broj π je racionalan broj.

b) Broj $\sqrt{2}$ je i racionalan i iracionalan broj.

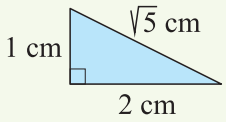
c) Broj $-3\sqrt{2}$ je iracionalan broj.

d) Svaki racionalan broj je realan broj.

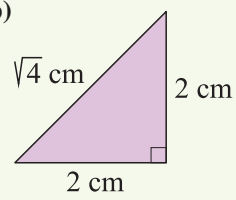
e) Broj 0 je iracionalan broj.

13. Nacrtaj u bilježnicu samo točne slike.

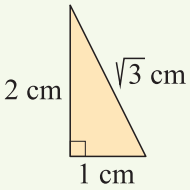
a)



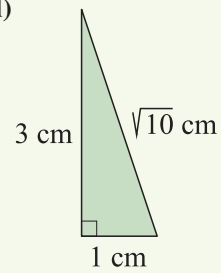
b)



c)



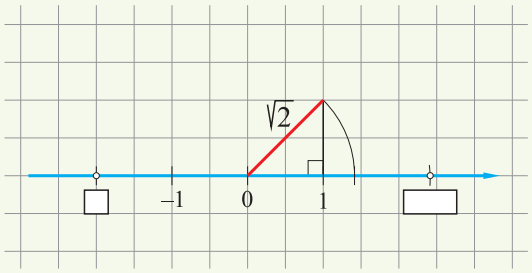
d)



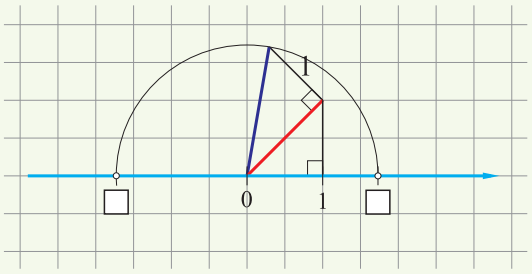
14. Na brojevnom pravcu ($|OE| = 1$ cm) označi točke pridružene brojevima $\sqrt{2}$ i $4\sqrt{2}$.

15. Na brojevnom pravcu ($|OE| = 1$ cm) označi točke pridružene brojevima $\sqrt{3}$ i $-2\sqrt{3}$.

16. Nacrtaj crtež u bilježnicu i upiši brojeve koji nedostaju na crtežu.



17. Nacrtaj crtež u bilježnicu i upiši brojeve koji nedostaju na crtežu.



18. Na brojevnom pravcu $(|OE| = 15 \text{ mm})$ označi točke pridružene brojevima $-\sqrt{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19. **a)** Prouči tečajnu listu i izračunaj koliko kuna možemo dobiti za 1 000:

A) eura

B) američkih dolara

C) japanskih jena.

b) Izračunaj koliko možemo za 1 000 kn dobiti:

A) eura

B) američkih dolara

C) japanskih jena.

valuta	jedinica	kupovni	prodajni
USD	1	5.369253	5.691408
EUR	1	7.605000	7.730000
JPY	100	5.263095	5.578881

20. Prouči uvjete bankovnog kredita.

200.000 HRK

Rok otplate: 8 godina
Kamatna stopa: 3,05 % fiksna
Efektivna kamatna stopa: 3,71 %
Ukupni iznos otplate: 231.050,16 HRK 30.634,20 EUR

Koliki je omjer novčanog iznosa koji vraćamo i iznosa koji smo posudili?

21. O čemu ovisi iznos kamata kada štedimo? Prepišite kartice s točnim odgovorima.

o iznosu koji štedimo	o cijeni stana koji kupujemo
o vremenskom periodu štednje	o kamatnoj stopi koju određuje banka

22. Lovro je dao Mateji da izvuče jednu kuglicu iz kutije u kojoj su bile tri zelene, sedam plavih i četiri ljubičaste kuglice. Kolika je vjerojatnost da Mateja izvuče:

a) zelenu kuglicu **b)** plavu kuglicu

c) kuglicu?

U kojem je podzadatku naveden siguran događaj?

23. Tonka je napisala svoje ime tako da je na svaku od kartica napisala jedno slovo.

T O N K A

Ako izvlačimo jednu karticu, kolika je vjerojatnost da ćemo izvući:

a) slovo N **b)** otvornik?

Složeniji zadatci

1. Koje od jednadžbi nemaju rješenje u skupu racionalnih brojeva:

a) $|x-1|=4$ **b)** $|x^2+1|=2$

c) $|x^2+1|=4$?

2. Neka je x realan broj za koji vrijedi

$$x^2+2x=-1.$$

a) Izračunaj čemu je jednako $x+2$.

b) Izračunaj čemu je jednaka recipročna vrijednost rješenja zadane jednadžbe.

3. Koliko rješenja u skupu $\mathbf{N}_0$ ima nejednadžba:

$$2\,020 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2\,021?$$

4. Odredi sve brojeve n iz skupa $\mathbf{N}_0$ tako da jednadžba $(x-2)^2=n$ ima rješenje u skupu $\mathbf{N}$.

5. Dokaži da je broj:

$$\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$$

cijeli broj.

6. Odredi sve parove prirodnih brojeva sa svojstvom da je njihov zbroj jednak njihovom umnošku.

7. Nađi tri racionalna broja m tako da jednadžba $mx^2=-\frac{2}{3}$ bude rješiva u skupu cijelih brojeva.

8. Dokaži da je broj $\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{11}}$ cijeli broj.

9. Koliko je najmanje decimala (počevši od desetinke) potrebno zbrojiti u decimalnom zapisu broja $\frac{19}{11}$ da bi rezultat bio:

a) 9 **b)** 90 **c)** 2 070?

10. Koliko je najmanje decimala (počevši od desetinke) potrebno zbrojiti u decimalnom zapisu broja $\frac{5}{14}$ da bi rezultat bio 381?

11. Koliko ima prirodnih brojeva x za koje vrijedi $4<\sqrt{x}<5$?

12. Koliko ima prirodnih brojeva x za koje vrijedi $150<\sqrt{x}<151$?

13. Koliko je točaka na brojevnom pravcu pridruženih parnim prirodnim brojevima većim od $(\sqrt{2}-1)^2$, a manjim od $(2\sqrt{3}+4)^2$?

14. Znamo da je $\frac{2}{3}=0.\dot{6}$. Kako možemo otkriti da je $0.\dot{6}=\frac{2}{3}$? Neka je $a=0.\dot{6}$. Tada je $10\cdot a=6.\dot{6}$. Vrijedi:

$$10\cdot a-a=6.\dot{6}-0.\dot{6}=6$$
$$9\cdot a=6\ /\ :9$$
$$a=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Primjenjujući opisani postupak, zapiši $3.\dot{4}$ i $0.\dot{7}\dot{2}$ kao razlomke.

15. Igraća kocka bačena je triput zaredom. Kolika je vjerojatnost da zbroj triju dobivenih brojeva bude 3, 5 ili 7?

16. Simetričan novčić baca se četiri puta zaredom. Kolika je vjerojatnost da je barem dva puta zaredom palo pismo?

17. U prvom kvadrantu uključujući i pozitivan dio koordinatnih osi odaberimo točku s cjelobrojnim koordinatama manjim ili jednakim 5. Kolika je vjerojatnost da odaberemo točku kojoj je zbroj koordinata 4?

18. Na slučajan način bira se broj iz skupa svih dvoznamenkastih prirodnih brojeva. Kolika je vjerojatnost da on pri dijeljenju sa 7 daje ostatak 3?

19. Na slučajan način biramo broj iz skupa svih parnih prirodnih brojeva manjih ili jednakih broju 100. Kolika je vjerojatnost da je dobiveni broj dvokratnik nekog prostog broja?

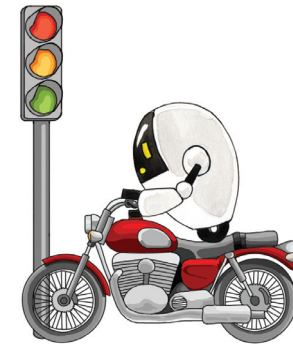
20. U koordinatnom sustavu u ravnini odaberimo točku s cjelobrojnim koordinatama (x,y) tako da je $|x|\leqslant 3$ i $|y|\leqslant 3$. Kolika je vjerojatnost da odaberemo točku koja se nalazi na apscisi?

21. U kvadratnoj jednadžbi $x^2=a$ biramo prirodan broj a manji ili jednak broju 100. Kolika je vjerojatnost da odaberemo broj tako da rješenja jednadžbe $x^2=a$ budu cijeli brojevi?

22. U skupu brojeva $A=\{x|x\in\mathbf{N}, x\leqslant 15\}$ odaberimo jedan broj. Kolika je vjerojatnost da odaberemo broj koji se može zapisati kao zbroj dvaju prostih brojeva?

5.8. SEMAFOR

U bilježnicu riješi zadatke i pokraj svakog zadatka nacrtaj krug. Krug oboji zelenom bojom ako zadatak u potpunosti razumiješ i točno je riješen. Žutom bojom oboji krug kraj zadatka za koji smatraš da još trebaš vježbati ili ako rezultat zadatka nije točan, a crvenom bojom ako ne znaš kojim postupkom riješiti zadatak.

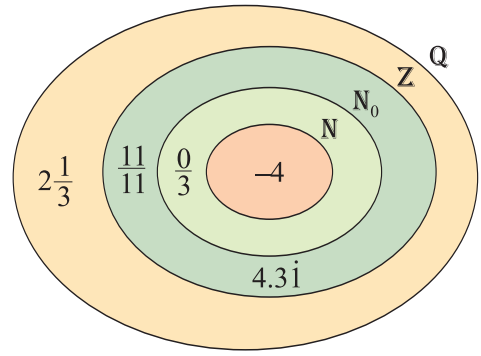


Zadatci

1. Koje su tvrdnje točne:

a) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}$ **b)** $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}^-$ **c)** $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$ **d)** $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$ **e)** $\mathbf{N} \cap \mathbf{Z} = \mathbf{N}_0$?

2. Ispravi pogreške.



3. Dopuni rečenice.

U skupu **N** komplement skupa svih neparnih prirodnih brojeva je skup svih _____.

U skupu **R** komplement skupa **I** je skup __.

4. Navedi pet brojeva koji su realni, ali nisu racionalni. Kojem skupu brojeva pripadaju navedeni brojevi?

5. Riješi svaku od jednadžbi i odredi kojem skupu pripada rješenje pojedine jednadžbe:

a) $3 - 7x = -9x + 4$ **b)** $-31 = 7(x - 3) - (x + 4)$

c) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{1 - 3x}{5} = 2$ **d)** $x^2 - 8 = 0$.

6. Tijekom istraživanja javnog mnijenja u Istri $\frac{5}{7}$ ispitanika ocijenilo je ispitivanje korisnim, a njih 105 od 3 500 smatralo je da je ispitivanje bilo potpuno nepotrebno. Za svaku od grupacija ispitanika postotkom izrazi njen udio u ukupnom broju ispitanika (rješenje zaokruži na dvije decimale).

7. Prikaži na brojevnom pravcu točke pridružene broju čija je apsolutna vrijednost jednaka $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

8. Luka tvrdi da je jučer razgovarao sa $\sqrt{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{8})$ ljudi, a Veronika kaže da je razgovarala s njih $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$. Tko sigurno ne govori istinu? Obrazloži svoj odgovor.

9. U mjenjačnici *Najbolje* Vedran može za 250 eura dobiti 1 862.81 kuna, a u mjenjačnici *Kvalitetno* za 180 eura može dobiti 1 342.89 kuna. Koja je mjenjačnica povoljnija? Možeš li na temelju podataka odrediti kupovni ili prodajni tečaj? Koliko kuna po tom tečaju Vedran može dobiti za 1 euro?

10. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani broj iz skupa $\{1, 2, 3 \ldots 98, 99, 100\}$ bude djeljiv i s 8 i s 12?

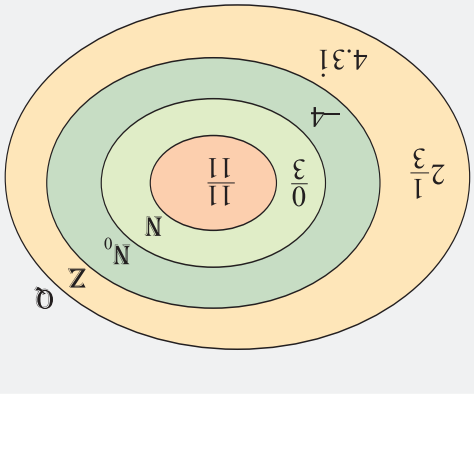
Za svaki zeleno obojeni krug osvajaš 2 boda, za svaki žuti krug 1 bod, a za crveni 0 bodova.

Intervali bodova

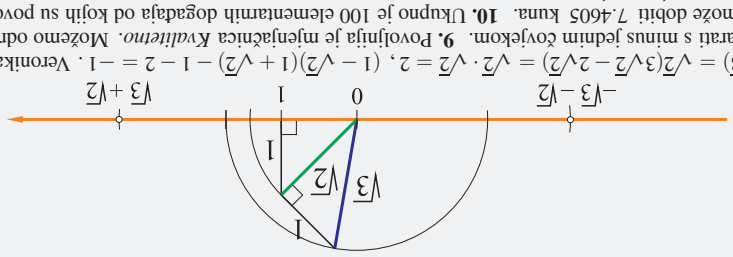
0 – 10:	Znaš što ti je činiti... Nakon još vježbe sigurno će biti bolji rezultat!
11 – 17:	Još ponovi i posebice uvježbaj ono u čemu griješiš!
18 – 20:	Na pravom si putu za sljedeće poglavlje!

Rješenja zadataka:

1. Točne su tvrdnje **a)**, **c)** i **d)**. **2.**



3. U skupu **N** komplement skupa svih neparnih prirodnih brojeva je skup svih parnih prirodnih brojeva. U skupu **R** komplement skupa **I** je skup **Q**. **4.** Potrebno je navesti pet brojeva koji pripadaju skupu iracionalnih brojeva, npr. π, $\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\sqrt{17}$ i $\sqrt{3}+2$. **5. a)** $x=\frac{1}{2}\in\mathbf{Q}$ **b)** $x=-1\in\mathbf{Z}$ **c)** $x=2\in\mathbf{N}$ **d)** $x_{1,2}=\pm\sqrt{8}\in\mathbf{I}$. **6.** $\frac{5}{7}=0.\dot{7}1428\dot{5}\approx 71.43\,\%$, $\frac{105}{3\,500}=0.03=3\,\%$. **7.** Potrebno je prikazati dvije točke jer je $|\sqrt{3}+\sqrt{2}|=|-\sqrt{3}-\sqrt{2}|=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.



8. $\sqrt{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{8})=\sqrt{2}(3\sqrt{2}-2\sqrt{2})=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$, $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=1-2=-1$. Veronika ne govori istinu jer nije mogla razgovarati s minus jedinim čovjekom. **9.** Povoljnija je mjenjačnica *Kvalitetno*. Možemo odrediti kupovni tečaj i za 1 euro Vedran može dobiti 7.4605 kuna. **10.** Ukupno je 100 elementarnih događaja od kojih su povoljni 24, 48, 72 i 96. Tražena je vjerojatnost $\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$.

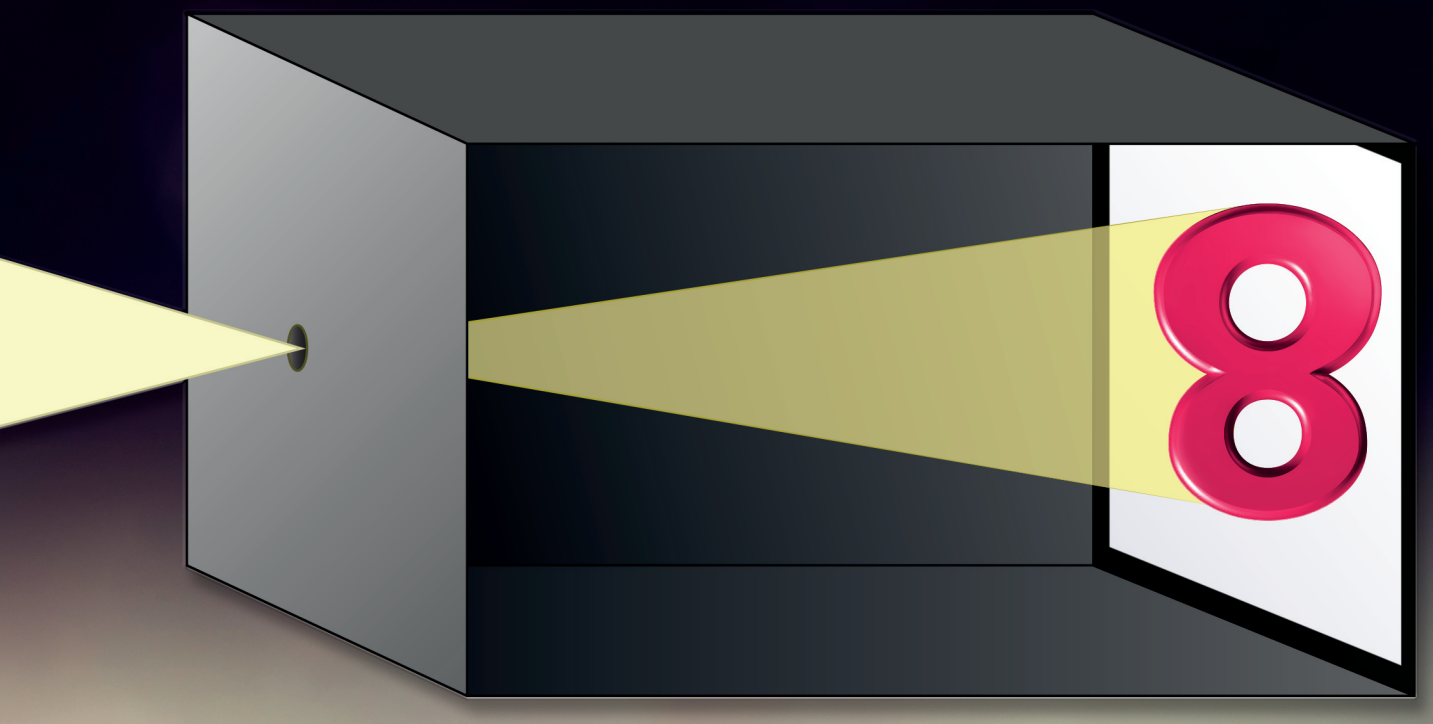
6 Planimetrija

Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- opisati razmjer (proporciju) kao ekvivalentnost dvaju omjera
- razlikovati vanjske i unutarnje članove razmjera te računati bilo koji nepoznati član razmjera
- primjenjivati razmjer u rješavanju problema iz matematike, drugih područja i stvarnoga života
- primjenom Talesova poučka dijeliti dužinu na sukladne dijelove i točkom u zadanome omjeru
- primjenjivati Talesov poučak za crtanje trokuta i pravokutnika
- matematičkim jezikom opisati sličnost trokuta i mnogokuta
- opisati svojstva sličnih likova
- primjenjivati Talesov poučak za rješavanje problemske situacije
- analizirati problemsku situaciju i zapisati ju linearnom jednadžbom
- opisati i konstruirati koncentrične kružnice
- opisati kružni vijenac, diralište i sjecište
- konstruirati motive primjenom različitih odnosa kružnica u ravnini
- razlikovati međusobne odnose kružnica u ravnini
- konstruirati dvije kružnice koje se dodiruju
- istraživati odnose polumjera kružnica i udaljenosti njihovih središta pa donositi zaključke
- rotirati lik u ravnini
- stvarati nove uratke i ideje složenije strukture
- samostalno odabirati odgovarajuću digitalnu tehnologiju
- rješavati složenije probleme služeći se digitalnom tehnologijom
- pratiti učinkovitost učenja i svoje napredovanje tijekom učenja.

Oni koji žele znati više moći će:

- odabrati dva preslikavanja u ravnini i konstruirati njihovu kompoziciju
- kreirati motiv zadanom kompozicijom više od dvaju preslikavanja
- određivati os simetrije, centar simetrije, vektor translacije, središte i kut rotacije u nacrtanoj kompoziciji
- analizirati kompoziciju preslikavanja.



U ovom ćeš poglavlju saznati što je:

- razmjer
- Talesov poučak o proporcionalnosti dužina
- sličnost trokuta
- sličnost mnogokuta
- tangenta kružnice
- rotacija oko točke
- kompozicija preslikavanja.

6.1. Razmjeri

Već znamo da izraz oblika $a : b$, $b \neq 0$, nazivamo **omjerom** brojeva a i b. Broj a je prvi član omjera, a broj b drugi član.

Vrijednost se omjera neće promijeniti ako oba člana pomnožimo ili podijelimo istim brojem različitim od nule.

$$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 50 : 100 = 0.1 : 0.2 = k : 2k$$

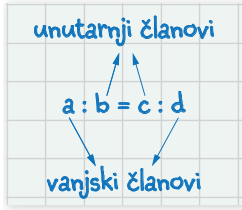
U gornjem se izrazu pojavljuju jednakosti omjera koje kraće nazivamo razmjer.

Razmjer ili proporcija

Razmjer ili **proporcija** je jednakost dvaju omjera $a : b$ i $c : d$, tj.

$$a : b = c : d,$$

pri čemu su b i d različiti od nule.



U razmjeru $a : b = c : d$ brojeve a i d nazivamo **vanjski članovi** razmjera, a brojeve b i c **unutarnji članovi**.

Primjer 1.

Izračunajmo x ako je $4 : 11 = x : 5$.

Rješenje: Omjere napišimo kao razlomke i pomnožimo jednadžbu sa zajedničkim nazivnikom:

$$\frac{4}{11} = \frac{x}{5} \;/\; \cdot 11 \cdot 5$$
$$4 \cdot 5 = 11 \cdot x$$
$$20 = 11x, \qquad x = \frac{20}{11}.$$

U drugom retku imali smo jednakost umnožaka $4 \cdot 5$ i $11 \cdot x$, tj. jednakost umnoška vanjskih članova razmjera i umnoška unutarnjih članova razmjera.

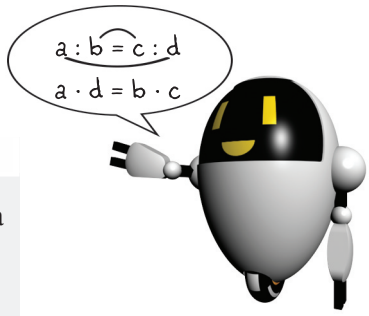
Vrijedi li ta jednakost za bilo koji razmjer?

Neka je $a : b = c : d$.
Napišemo omjere kao razlomke: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Pomnožimo zajedničkim nazivnikom bd:

$$\frac{a \cdot \cancel{b} \cdot d}{\cancel{b}} = \frac{c \cdot b \cdot \cancel{d}}{\cancel{d}}.$$

Nakon skraćivanja dobivamo: $a \cdot d = b \cdot c$.



Za svaki razmjer vrijedi da je umnožak vanjskih članova jednak umnošku unutarnjih članova razmjera.

Ako je $a : b = c : d$, tada je $a \cdot d = b \cdot c$.

Primjer 2.

Sanja i Mario su nakon prerade maslina iz svog maslinika dobili 49 litara ulja. Dogovorili su se da će tu količinu razdijeliti u omjeru $4 : 3$. Koliko je litara ulja dobila Sanja, a koliko Mario?

Rješenje: Označimo s x količinu ulja za Sanju. Tada je $49 - x$ količina ulja za Marija.

Vrijedi razmjer:

$$x : (49 - x) = 4 : 3.$$

Riješimo ga:

$$\begin{aligned} 3x &= 4(49 - x) \\ 3x &= 196 - 4x \\ 7x &= 196 \\ x &= \frac{196}{7}, \quad x = 28. \end{aligned}$$

Sanja je dobila 28 litara, a Mario $49 - 28 = 21$ litru ulja.

Drugi način. Omjer se ne mijenja kad mu članove pomnožimo nekim brojem k različitim od 0, tj. $4 : 3 = (4k) : (3k)$.

Ako su $4k$ i $3k$ količine ulja za Sanju i Marija, treba naći k za koji je

$$4k + 3k = 49.$$

$7k = 49$, $k = \frac{49}{7} = 7$ pa je $4k = 4 \cdot 7 = 28$, $3k = 3 \cdot 7 = 21$.

Sanja je dobila 28 litara, a Mario 21 litru ulja.

Primjer 3.

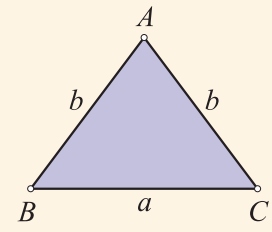
Duljine osnovice i kraka jednakokračnog trokuta odnose se kao $6:5$. Kolika je duljina osnovice ako je opseg trokuta jednak $32\ \text{dm}$?

Rješenje:

$a : b = 6 : 5$

$\underline{o = 32\ \text{dm}}$

$a = ?$



$5a = 6b, \quad a = \frac{6}{5}b$

$o = a + 2b$

$32 = \frac{6}{5}b + 2b$

$32 = \frac{16}{5}b$

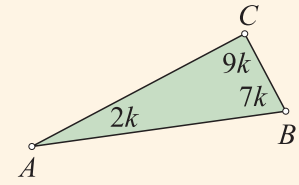
$b = 10\ \text{dm}, \quad a = \frac{6}{5}b = 12\ \text{dm}.$

Duljina osnovice je $12\ \text{dm}$.

Primjer 4.

Veličine kutova u trokutu odnose se kao $2:7:9$. Izračunajmo veličine svih kutova trokuta.

Rješenje: Vrijedi $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 7 : 9$. To znači da α ima dva jednaka dijela, β ima 7 takvih dijelova, a γ 9 takvih dijelova. Ako jedan dio označimo s k, dobivamo:



$$\alpha = 2k, \quad \beta = 7k, \quad \gamma = 9k.$$

Osim toga, u trokutu vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ pa je:

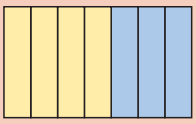
$$2k + 7k + 9k = 180^\circ$$
$$18k = 180^\circ$$
$$k = 10^\circ.$$

Sad je $\alpha = 2 \cdot 10^\circ = 20^\circ$, $\beta = 7 \cdot 10^\circ = 70^\circ$, $\gamma = 9 \cdot 10^\circ = 90^\circ$.

Zadatci 6.1.

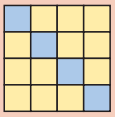
1. Napiši omjere žutih i plavih dijelova prikazanih na slikama:

a)



b)

c)



2. U razredu se broj učenika koji nose tenisice i broj svih učenika odnose kao $4:7$. U kojem je omjeru broj:

a) svih učenika i broj onih koji ne nose tenisice

b) učenika koji nose tenisice i onih koji ne nose tenisice?

3. Pojednostavni omjere, tj. napiši ih tako da su članovi a i b u novom omjeru $a:b$ prirodni brojevi, a razlomak $\frac{a}{b}$ do kraja skraćen:

a) $100:700$ **b)** $3\,000:180$

c) $0.01:1$ **d)** $0.5:0.15$

e) $\frac{4}{5}:\frac{2}{15}$ **f)** $2\frac{1}{9}:1\frac{1}{3}$.

4. Je li zadana jednakost razmjer:

a) $14:3=140:30$ **b)** $2:7=6:14$

c) $0.2:4=\frac{2}{5}:8$?

5. Odredi vanjske članove zadanih razmjera:

a) $a:b=x:y$

b) $(a+b):(a-b)=c:d$

c) $x:(x+5)=2:7$

d) $18:y=(3-y):(y+2)$.

6. Izračunaj nepoznati član razmjera:

a) $x:15=10:50$ **b)** $x:29=36:6$

c) $18:x=24:\frac{44}{3}$ **d)** $135:x=75:\frac{1}{18}$.

7. Riješi jednadžbe:

a) $\frac{32}{17}=\frac{82+x}{51}$ **b)** $\frac{11}{19}=\frac{24+3x}{57}$

c) $\frac{2x-3}{2}=\frac{4}{5}$ **d)** $\frac{4}{15}=\frac{x-7}{3}$.

8. Riješi jednadžbe:

a) $(x+3):2=8:9$

b) $(x-1):5=(x+2):3$

c) $2:(2x-1)=7:(x-18)$

d) $(x-1):(x+1)=9:11$.

9. U školi se broj djevojčica i dječaka odnosi kao $8:7$. Koliko u školi ima djevojčica, a koliko dječaka ako ih je ukupno 450?

10. Omjer popunjenog i praznog dijela čvrstog diska je $7:13$. Koliko se MB nalazi na tom disku ako mu je ukupni kapacitet 1 TB?

11. Na boci sirupa piše uputa: sirup i vodu miješati u omjeru $1:5$. Koliko sirupa treba upotrijebiti za 9 litara soka?

12. Na geografskoj karti koja je izrađena u mjerilu $1:250\,000$ udaljenost dvaju mjesta je $4.5\ \text{cm}$. Koliko je vremena potrebno pješaku da prijeđe tu udaljenost ako hoda prosječnom brzinom od $5\ \text{km/h}$?

13. Opseg pravokutnika je $5.2\ \text{dm}$, a stranice mu se odnose kao $4:9$. Kolika je površina pravokutnika?

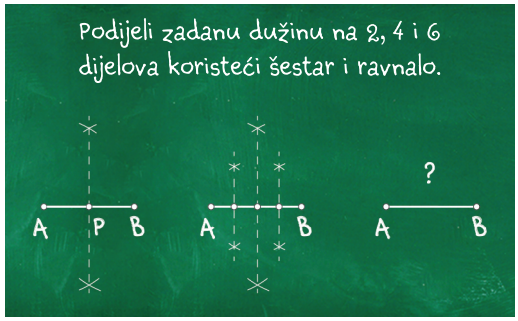
14. U ljekarni se može kupiti medicinski alkohol u kojem je omjer čistog alkohola i vode $7:3$. Koliko čistog alkohola ima u bočici s $250\ \text{mL}$ medicinskog alkohola?

15. Veličine kutova trokuta odnose se kao $1:5:3$. Izračunaj veličine kutova.

16. U trokutu ABC veličina kuta α i njemu vanjskog kuta α' odnose se kao $4:5$. Izračunaj α.

17. Ujna Lidija i stričevi Sven i Tin poklonili su svojem nećaku Matiji grafičku karticu kojoj je cijena $3\,240\ \text{kn}$. Iznosi novca koje su dali Lidija, Sven i Tin odnose se kao $11:12:13$. Koliko je novca dao Sven?

6.2. Dijeljenje dužina



Simetralom možemo podijeliti dužinu na dva jednaka dijela. Kada tim dijelovima opet konstruiramo simetrale, podijelili smo dužinu na četiri jednaka dijela. Daljnjim konstrukcijama simetrale možemo podijeliti dužinu na 8, 16, 32... dijelova.

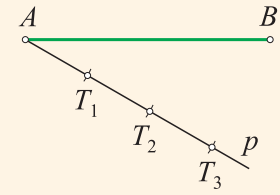
Kako možemo podijeliti dužinu na neki drugi broj jednakih dijelova?

Primjer 1.

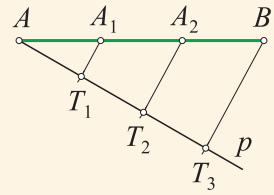
Podijelimo dužinu $\overline{AB}$ na tri jednaka dijela.

Rješenje:

Nacrtajmo pomoćni pravac p koji prolazi točkom A i na njemu nanesimo 3 sukladne dužine.

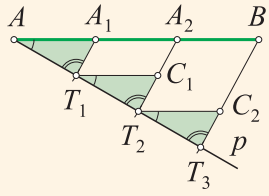


Spojimo točke B i T_3 i povucimo paralele s BT_3 točkama T_1 i T_2.



Presjeke tih paralela s dužinom $\overline{AB}$ označimo s A_1 i A_2.

Tvrdimo da su dužine $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2B}$ međusobno sukladne, tj. da smo ovim postupkom podijelili dužinu $\overline{AB}$ na tri jednaka dijela.



Uvjerimo se da su to stvarno sukladne dužine.

Sliku dopunimo paralelama s $\overline{AB}$ kroz točke T_1 i T_2 i presjeke tih paralela s dužinama $\overline{T_2A_2}$ i $\overline{T_3B}$ označimo s C_1 i C_2. Uočimo trokute AA_1T_1, $T_1C_1T_2$ i $T_2C_2T_3$.

U trokutima AA_1T_1 i $T_1C_1T_2$ vrijedi

$$\sphericalangle T_1AA_1 \cong \sphericalangle T_2T_1C_1$$

(kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca)

$$\sphericalangle A_1T_1A \cong \sphericalangle C_1T_2T_1$$

(kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca)

$$|AT_1| = |T_1T_2|.$$

Prema poučku o sukladnosti trokuta K-S-K ta su dva trokuta sukladna pa su im i ostale odgovarajuće stranice jednakih duljina, tj. $|AA_1| = |T_1C_1|$.

Zbog povlačenja paralele četverokut $A_1T_1C_1A_2$ je paralelogram pa je $|A_1A_2| = |T_1C_1|$.

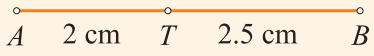
Dakle, dobili smo da je $|AA_1| = |A_1A_2|$.

Na sličan se način iz para trokuta $T_1C_1T_2$ i $T_2C_2T_3$ dobije $|A_1A_2| = |A_2B|$, čime smo pokazali da su sve tri dužine na $\overline{AB}$ jednakih duljina.

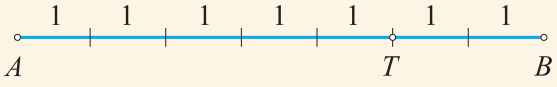
Primjer 2.

U kojem omjeru točka T dijeli dužinu $\overline{AB}$ računajući od točke A?

a)



b)



Rješenje:

a) Izračunajmo $|AT| : |TB|$.

$$|AT| : |TB| = 2 : 2.5$$
$$= 4 : 5.$$

Dijeli u omjeru $4 : 5$.

b) $|AT| : |TB| = 5 : 2$.

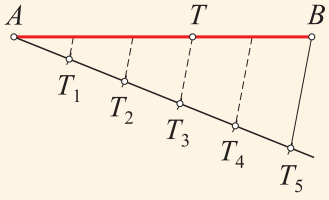
Primjer 3.

Danu dužinu $\overline{AB}$ podijelimo točkom T u omjeru $3 : 2$ računajući od točke A.

Rješenje: Tražimo točku T na $\overline{AB}$ za koju vrijedi:

$$|AT| : |TB| = 3 : 2.$$

To znači da je $|AT| = 3k$ i $|TB| = 2k$ pa za cijelu dužinu $\overline{AB}$ vrijedi $|AB| = 5k$. Dakle, trebamo $\overline{AB}$ podijeliti na 5 jednakih dijelova i tražena točka T je na kraju treće od tih 5 sukladnih dužina.



Zadatci 6.2.

1. Nacrtaj dužinu $\overline{AB}$ duljine $6.3\ \text{cm}$. Podijeli je na 4 jednaka dijela s pomoću:

a) simetrala

b) postupka iz primjera 1.

2. Nacrtaj dužinu $\overline{MN}$ duljine $7.4\ \text{cm}$, a zatim je podijeli na:

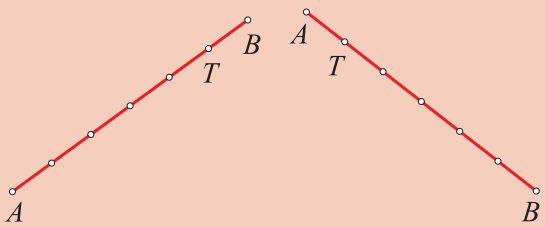
a) 3 **b)** 5 **c)** 7

jednakih dijelova.

3. Zadana je dužina $\overline{AB}$ i točka T na njoj. U kojem su omjeru dužine $\overline{AT}$ i $\overline{TB}$?

a)

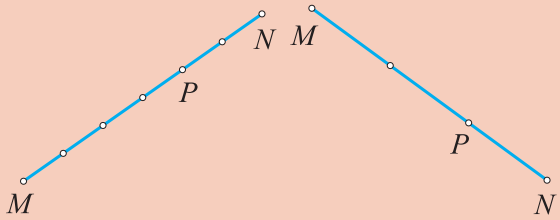
b) **c)**



4. U kojem omjeru točka P dijeli dužinu $\overline{MN}$, tj. koliko je $|MP| : |PN|$?

a)

b) **c)**



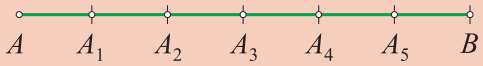
5. Nacrtaj dužinu $\overline{AB}$ duljine $6.5\ \text{cm}$ i točkom T podijeli je u omjeru:

a) $2 : 1$ **b)** $3 : 1$ **c)** $5 : 3$.

6. Nacrtaj dužinu $\overline{MN}$ duljine $7\ \text{cm}$ i točkom P podijeli je u omjeru:

a) $1.5 : 1$ **b)** $2.5 : 2$ **c)** $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$.

7. Dužina $\overline{AB}$ podijeljena je točkama A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 na 6 jednakih dijelova.



Izračunaj sljedeće omjere:

a) $|AA_1| : |A_1B|$ **b)** $|AA_2| : |A_2B|$

c) $|AA_3| : |AA_1|$ **d)** $|AB| : |A_3A_4|$

e) $|A_1A_3| : |A_3B|$ **f)** $|AA_3| : |A_2A_5|$.

8. Opseg jednakostraničnog trokuta je $8.3\ \text{cm}$. Konstruiraj stranicu tog trokuta.

9. Opseg pravilnog šesterokuta je $11.6\ \text{cm}$. Konstruiraj taj šesterokut.

10. Opseg jednakokračnog trokuta je $12\ \text{cm}$. Osnovica trokuta i krak trokuta odnose se kao $2 : 3$. Konstruiraj taj trokut.

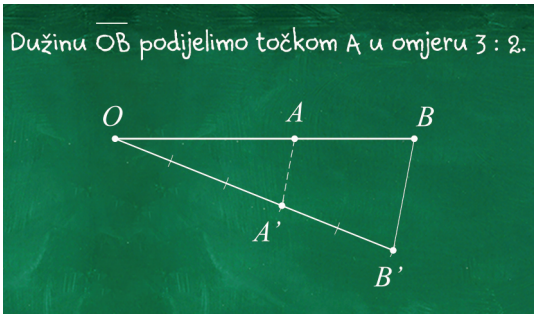
11. Opseg jednakokračnog trokuta je $14\ \text{cm}$. Osnovica trokuta i krak trokuta odnose se kao $3 : 4$. Konstruiraj taj trokut.

12. U jednakokračnom trokutu osnovica i visina na nju odnose se kao $3 : 5$. Konstruiraj taj trokut ako je zbroj duljina osnovice i visine na nju jednak $10\ \text{cm}$.

13. Stranice trokuta odnose se kao $3 : 4 : 6$. Opseg mu je $11\ \text{cm}$. Konstruiraj taj trokut.

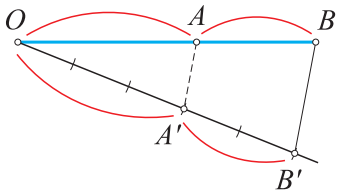
14. Opseg pravokutnika je $12.8\ \text{cm}$. Susjedne mu se stranice odnose kao $2 : 5$. Konstruiraj taj pravokutnik.

6.3. Talesov poučak o proporcionalnim dužinama



Kad dijelimo dužinu $\overline{OB}$ u omjeru $3:2$, na slici su se pojavile točke A' i B' za koje vrijedi:

$$|OA'| : |A'B'| = 3 : 2$$
$$|OA| : |AB| = 3 : 2.$$

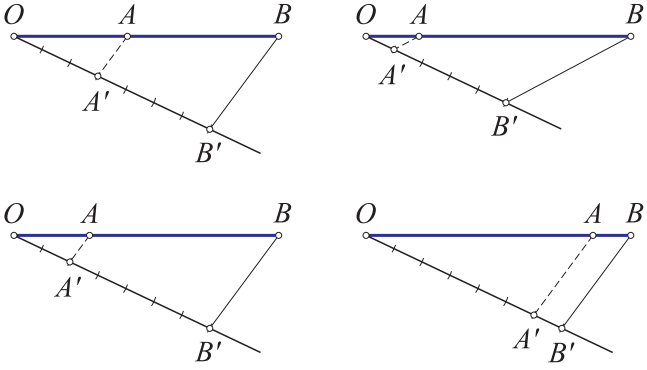


U obje su jednakosti desne strane jednake $(3:2)$ pa moraju biti jednake i lijeve strane, tj.

$$|OA'| : |A'B'| = |OA| : |AB| = 3 : 2.$$

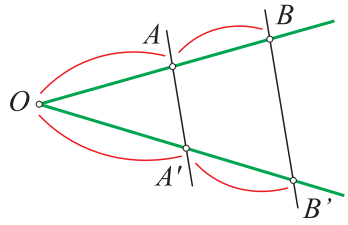
Tu jednakost možemo tumačiti i ovako: usporedni pravci AA' i BB' su na krakovima kuta $\sphericalangle B'OB$ odsjekli dužine čije duljine se odnose kao $3:2$. Takve dužine čije duljine se jednako odnose (proporcionalne su) kratko nazivamo **proporcionalne dužine**.

Pogledajmo još nekoliko slika na kojima su dužine $\overline{OB}$ podijeljene u različitim omjerima. Na svima su pravci AA' i BB' usporedni.



Popunili smo tablicu.

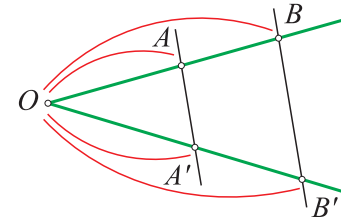
	$\lvert OA\rvert : \lvert AB\rvert$	$\lvert OA'\rvert : \lvert A'B'\rvert$	$\lvert OA\rvert : \lvert OB\rvert$	$\lvert OA'\rvert : \lvert OB'\rvert$
slika 1	3 : 4	3 : 4	3 : 7	3 : 7
slika 2	1 : 4	1 : 4	1 : 5	1 : 5
slika 3	2 : 5	2 : 5	2 : 7	2 : 7
slika 4	6 : 1	6 : 1	6 : 7	6 : 7



Na sve četiri slike vrijedi:

$$|OA| : |AB| = |OA'| : |A'B'|$$
$$|OA| : |OB| = |OA'| : |OB'|.$$

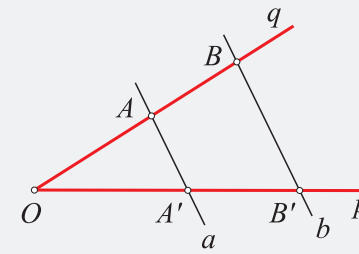
Ovi razmjeri vrijede za bilo koji kut čiji krakovi su presječeni usporednim pravcima $a = AA'$ i $b = BB'$, tj. kad se krakovi kuta presijeku usporednim pravcima a i b, tada ti pravci na krakovima odsijecaju proporcionalne dužine. Ovu tvrdnju nazivamo Talesov poučak o proporcionalnim dužinama.



Talesov poučak o proporcionalnim dužinama

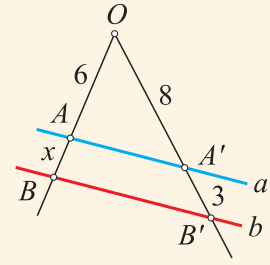
Usporedni pravci na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne dužine, tj. ako usporedni pravci a i b sijeku krakove kuta $\sphericalangle pOq$ u točkama A i A' odnosno B i B' tada je:

$$|OA| : |AB| = |OA'| : |A'B'|$$
$$|OA| : |OB| = |OA'| : |OB'|.$$



Primjer 1.

Pravci a i b su usporedni. Izračunajmo nepoznatu duljinu x.

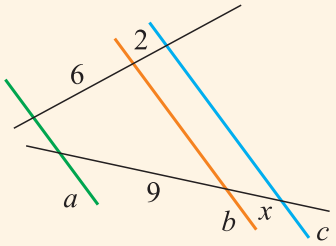


Rješenje: Prema Talesovu poučku vrijedi:

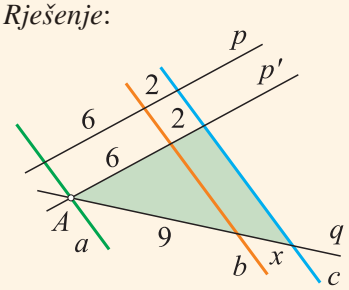
$$|OA| : |AB| = |OA'| : |A'B'|$$
$$6 : x = 8 : 3$$
$$18 = 8x$$
$$x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

Primjer 2.

Pravci a, b i c su usporedni.
Izračunajmo nepoznatu duljinu x.



Rješenje:



Na prvi pogled ova se slika razlikuje od slike Talesova poučka, a pojavljuju se i tri usporedna pravca, a ne samo dva. Dopunit ćemo sliku tako da se pojavi kut. Točkom A povucimo pravac p' usporedan s pravcem p.

Zbog usporednosti (paralelogram) se na pravcu p' javljaju odsječci dugački 6 i 2 i sad primijenimo Talesov poučak. $6 : 2 = 9 : x$, $6x = 18$, $x = 3$. Tražena duljina je 3.

Vrijedi i obrat Talesova poučka.

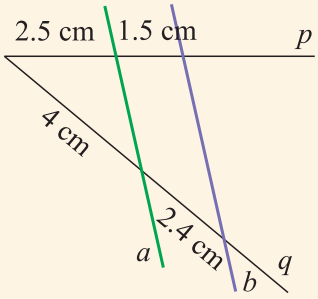
Obrat Talesova poučka o proporcionalnim dužinama

Ako pravci na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne dužine, tada su ti pravci usporedni.

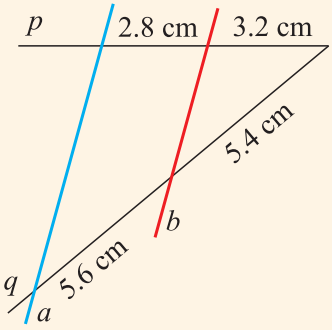
Primjer 3.

Jesu li pravci a i b na slikama usporedni?

a)



b)



Rješenje:

a) Provjerimo jesu li dužine proporcionalne, tj. vrijedi li $2.5 : 1.5 = 4 : 2.4$. To će vrijediti ako vrijedi jednakost umnoška vanjskih članova i umnoška unutarnjih članova:

$$2.5 \cdot 2.4 = 6, \qquad 1.5 \cdot 4 = 6.$$

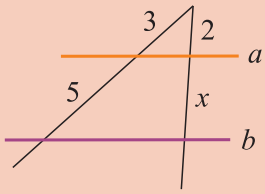
Umnošci su jednaki, pa razmjer vrijedi, a prema obratu Talesova poučka pravci a i b su usporedni.

b) Provjeravamo vrijedi li razmjer $2.8 : 3.2 = 5.6 : 5.4$. Umnožak vanjskih članova je $2.8 \cdot 5.4 = 15.12$. Umnožak unutarnjih članova je $3.2 \cdot 5.6 = 17.92$. Razmjer ne vrijedi te pravci a i b nisu usporedni.

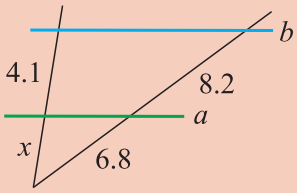
Zadatci 6.3.

1. Izračunaj nepoznatu duljinu x ako su pravci a i b usporedni.

a)

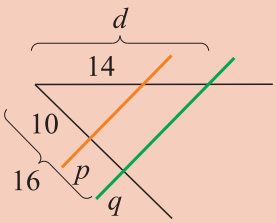


b)

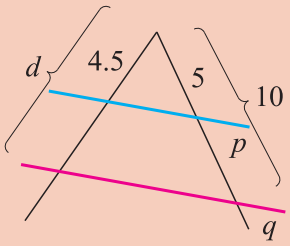


2. Izračunaj nepoznatu duljinu d ako su pravci p i q usporedni.

a)

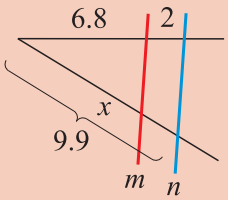


b)

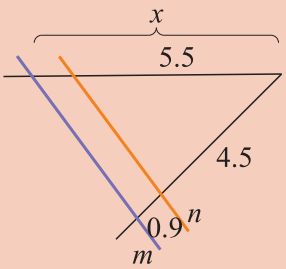


3. Izračunaj nepoznatu duljinu x ako su pravci m i n usporedni.

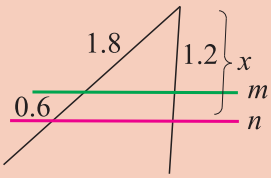
a)



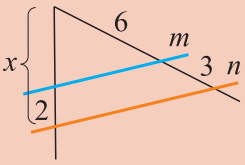
b)



c)

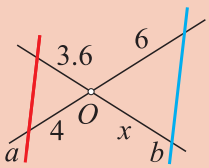


d)

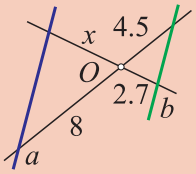


4. Izračunaj nepoznatu duljinu x. Pravci a i b su usporedni.

a)

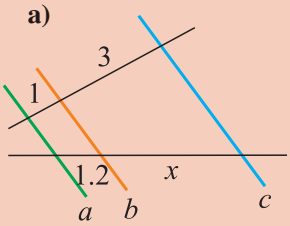


b)

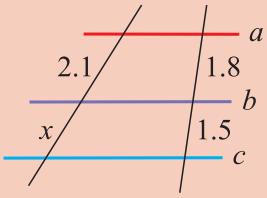


5. Pravci a, b i c su usporedni. Izračunaj x.

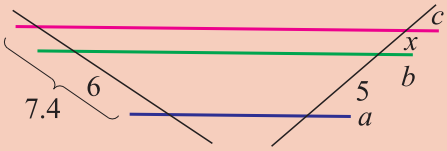
a)



b)

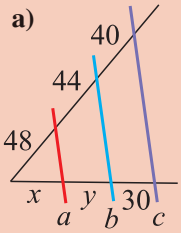


c)

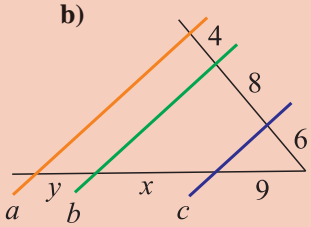


6. Izračunaj duljine x i y ako su pravci a, b i c usporedni.

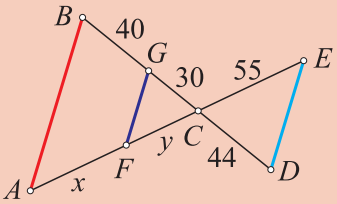
a)



b)

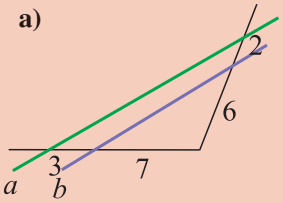


7. Odredi x i y ako su dužine $\overline{AB}$, $\overline{GF}$ i $\overline{ED}$ usporedne.

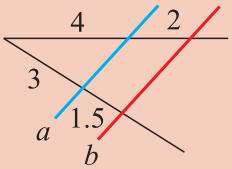


8. Jesu li pravci a i b usporedni?

a)

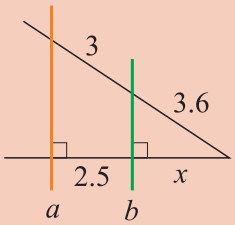


b)

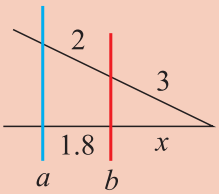


9. Možeš li za izračunavanje nepoznate duljine x upotrijebiti Talesov poučak?

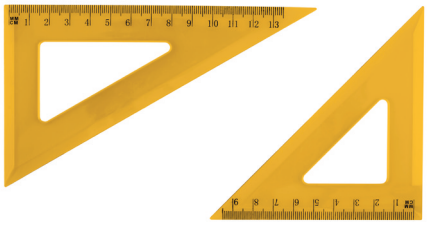
a)

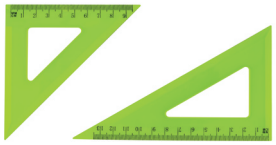


b)



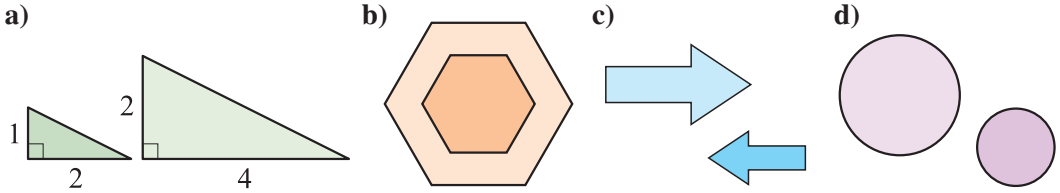
6.4. Sličnost trokuta i mnogokuta





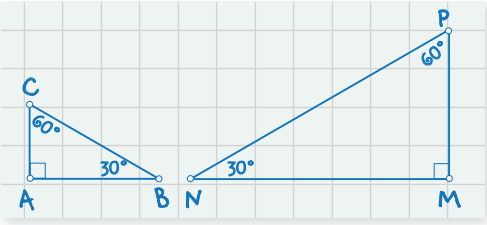
Na obje su fotografije dva trokuta kojima možemo konstruirati. Na desnoj su fotografiji trokuti nešto manji, ali su istog oblika.

Pogledajmo ove parove likova.



Na svakoj je slici par likova koji su istog oblika i različitih veličina.

Kad dva lika imaju isti oblik, ali ne nužno i jednaku veličinu nazivamo ih **slični likovi**.

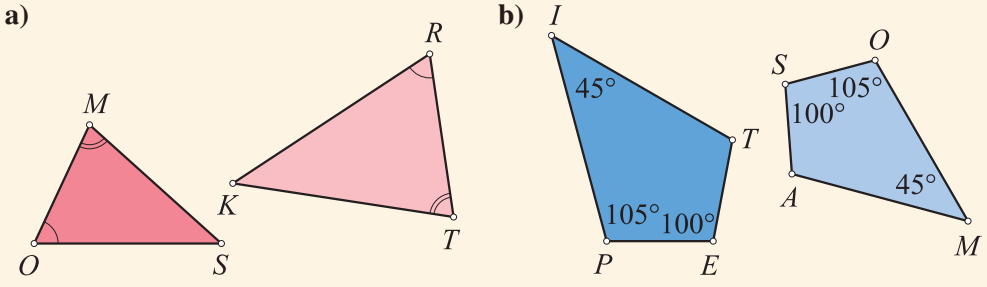


Trokuti ABC i MNP su dva pravokutna trokuta sa šiljastim kutovima veličine $30°$ i $60°$. Trokut MNP dobiven je povećanjem stranica trokuta ABC dva puta. Trokuti ABC i MNP su slični. Parovi kutova koji su međusobno jednakih veličina nazivaju se **odgovarajući** kutovi. Tako su kutovi $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle MNP$ odgovarajući kutovi, B i N su odgovarajući vrhovi, a stranice $\overline{AC}$ i $\overline{MP}$ nasuprot odgovarajućim kutovima su odgovarajuće stranice.

Pišemo: $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ i pri tome pazimo da su odgovarajući vrhovi zapisani u istom poretku.

Primjer 1.

Odredimo odgovarajuće vrhove i kutove sličnih likova i matematičkim simbolima zapišimo da su slični.



Rješenje:

a) Odgovarajući kutovi su: $\sphericalangle MSO$ i $\sphericalangle TKR$, $\sphericalangle SOM$ i $\sphericalangle KRT$, $\sphericalangle OMS$ i $\sphericalangle RTK$. Odgovarajući vrhovi su S i K, O i R te M i T te pišemo $\triangle SOM \sim \triangle KRT$.

b) Odgovarajući kutovi četverokuta $PETI$ i $AMOS$ su: $\sphericalangle EPI$ i $\sphericalangle SOM$, $\sphericalangle TEP$ i $\sphericalangle ASO$, $\sphericalangle ITE$ i $\sphericalangle MAS$, $\sphericalangle PIT$ i $\sphericalangle OMA$. Odgovarajući vrhovi su P i O, E i S, T i A te M i T te pišemo $PETI \sim OSAM$.

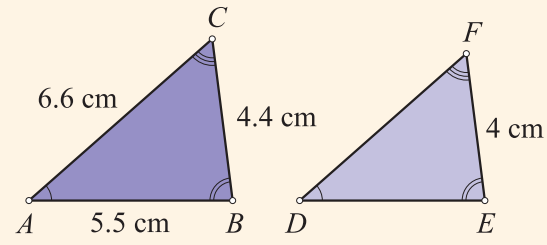
Sličnost trokuta

Dva su trokuta **slična** ako su im veličine odgovarajućih kutova jednake i ako su im duljine odgovarajućih stranica proporcionalne.

Omjer duljina odgovarajućih stranica naziva se **koeficijent sličnosti** k.

Primjer 2.

Trokuti ABC i DEF su slični. Odredimo koeficijent sličnosti k i duljine preostalih dviju stranica trokuta DEF.



Rješenje: Promatrajući kutove, dobivamo da su stranice $\overline{BC}$ i $\overline{EF}$ odgovarajuće i omjer njihovih duljina je koeficijent sličnosti k:

$$k = |BC| : |EF| = 4.4 : 4 = 1.1.$$

Odgovarajuće stranice su proporcionalne pa vrijedi:

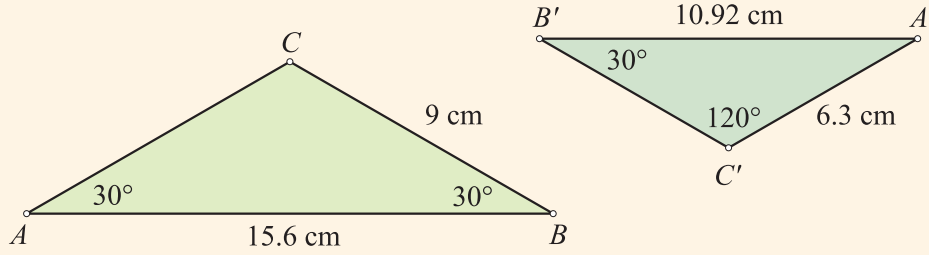
$$|AC| : |DF| = k, \quad 6.6 : |DF| = 1.1, \quad |DF| = \frac{6.6}{1.1} = 6 \text{ cm}$$

$$|AB| : |DE| = k, \quad 5.5 : |DE| = 1.1, \quad |DE| = \frac{5.5}{1.1} = 5 \text{ cm}.$$

Duljine ostalih dviju stranica su 6 cm i 5 cm.

Primjer 3.

Jesu li trokuti ABC i $A'B'C'$ slični?



Rješenje: Veličine kutova trokuta ABC su $30°$, $30°$ i $120°$, a tolike su i veličine kutova u trokutu $A'B'C'$. Radi se o jednakokračnim trokutima pa je $|AC| = 9$ cm i $|B'C'| = 6.3$ cm. Omjeri odgovarajućih stranica su:

$$|A'B'| : |AB| = 10.92 : 15.6 = 0.7, \qquad |A'C'| : |AC| = 6.3 : 9 = 0.7,$$
$$|B'C'| : |BC| = 6.3 : 9 = 0.7.$$

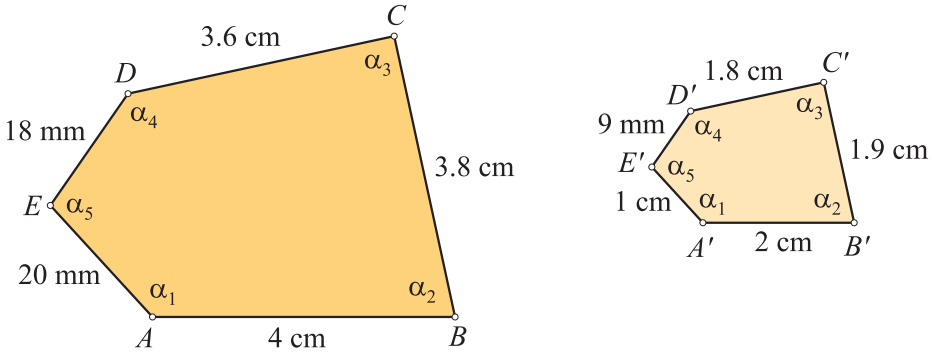
Svi omjeri su jednaki, tj. odgovarajuće stranice su proporcionalne. Trokuti ABC i $A'B'C'$ su slični.

Kao što proučavamo slične trokute, tako možemo razmatrati i slične mnogokute.

Sličnost mnogokuta

Dva su mnogokuta slična ako su im odgovarajući kutovi jednake veličine i duljine odgovarajućih stranica proporcionalne.

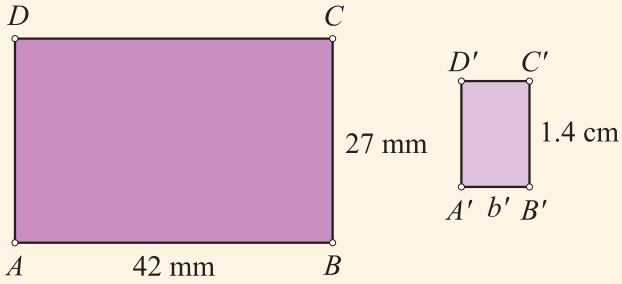
Na slici su dana dva slična peterokuta s koeficijentom sličnosti $k = 2$.



$ABCDE \sim A'B'C'D'E'$

Primjer 4.

Kolika je duljina nepoznate stranice pravokutnika $A'B'C'D'$ ako vrijedi $ABCD \sim A'D'C'B'$?



Rješenje: U pravokutniku $ABCD$ je $a = 42$ mm, $b = 27$ mm. U pravokutniku $A'D'C'B'$ je $a' = 1.4$ cm $= 14$ mm. Tražimo b':

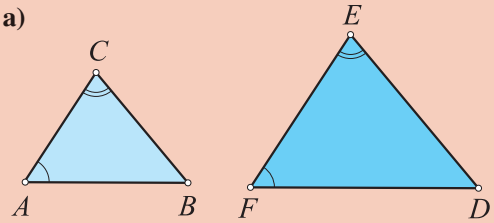
$$k = \frac{a'}{a}, \qquad k = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}, \qquad k = \frac{b'}{b}, \qquad b' = kb, \qquad b' = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9 \text{ mm}.$$

Duljina nepoznate stranice je 9 mm.

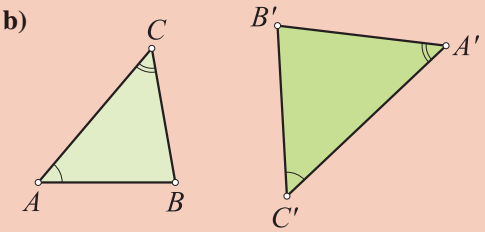
Zadatci 6.4.

1. Ispravno zapiši oznake sličnih likova.

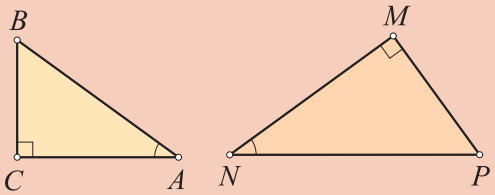
a)



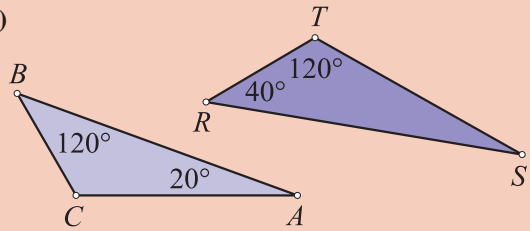
b)



c)

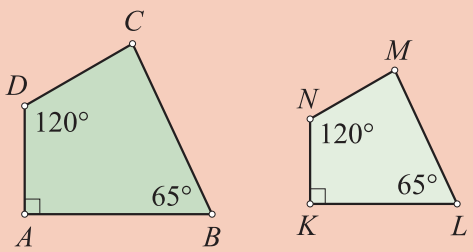


d)

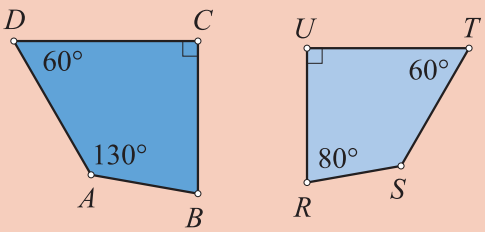


2. Četverokuti na slici su slični. Zapiši tu sličnost s pomoću simbola $\sim$.

a)



b)



3. Trokuti ABC i $A'B'C'$ su slični. Popuni tablicu u bilježnici.

$\triangle ABC$				
a	12 cm	0.5 cm	2 m	
b	13 cm	4 mm	48 dm	9 dm
c	14 cm	7 mm		1 m
$\triangle A'B'C'$				
a'	6 cm			12 cm
b'			6 m	
c'		3.5 cm	5 m	1 dm

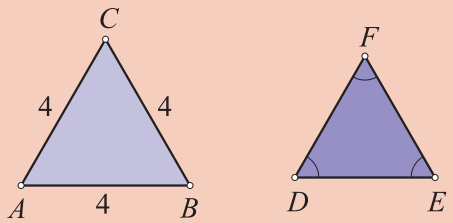
4. Jesu li trokuti kojima su odgovarajući kutovi sukladni, a duljine stranica su 21 m, 24 m, 19 m i 21 dm, 24 dm, 19 dm slični?

5. Duljine stranica većeg trokuta su 18 cm, 9 cm, 15 cm. Kolike su duljine stranica manjeg sličnog trokuta ako je koeficijent sličnosti $\frac{9}{5}$?

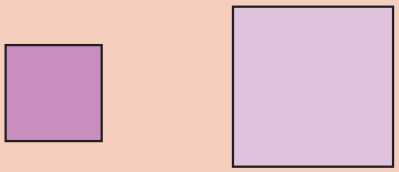
6. U trokutu ABC duljine stranica su 140 cm, 12 dm, 10 dm. Najveća stranica sličnog trokuta $A'B'C'$ ima duljinu 21 m. Odredi duljine ostalih stranica trokuta $A'B'C'$.

7. Koeficijent sličnosti dvaju trokuta je $k = 0.75$. U manjem trokutu je $a = 3$ dm, $b = 27$ cm, a u većem $c' = 44$ cm. Izračunaj nepoznate stranice oba trokuta.

8. Jesu li slični trokuti ABC i DEF?

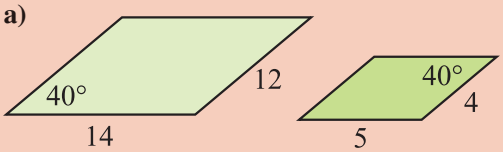


9. Jesu li dva kvadrata slična?

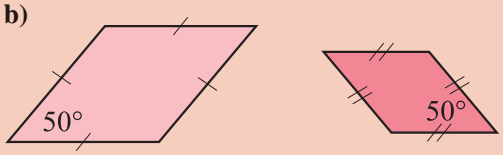


10. Jesu li slični nacrtani paralelogrami?

a)

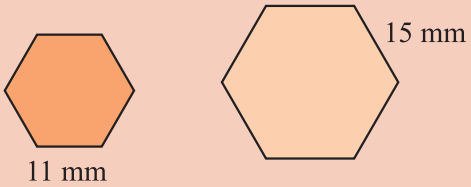


b)



11. Zadan je kvadrat $ABCD$ sa stranicom duljine $15\ \text{mm}$ i pravokutnik s jednom stranicom duljine $6\ \text{cm}$. Kolike su duljine stranica pravokutnika ako je sličan kvadratu $ABCD$?

12. Na slici su dva pravilna šesterokuta. Jesu li oni slični? Koliki je omjer duljina odgovarajućih stranica?



13. Dva su pravokutnika slična s koeficijentom sličnosti $k = \frac{3}{2}$. Ako su stranice većeg pravokutnika $a = 3\ \text{cm}$ i $b = 4.5\ \text{cm}$, kolike su duljine stranica manjeg pravokutnika? Nacrtaj oba pravokutnika.

14. Borna rješava test u kojem je ovakav zadatak:

Pročitaj sljedeću rečenicu i zaokruži jedan od ponuđenih odgovora.

Ako dva četverokuta imaju iste odgovarajuće kutove, oni su slični:

a) uvijek **b)** ponekad **c)** nikad.

Ako zaokruži **a)**, to znači da Borna smatra kako će uvijek kad promatra dva četverokuta s jednako velikim kutovima uvijek biti slična. Ako zaokruži **b)**, to znači da za neke parove četverokuta s istim kutovima vrijedi sličnost, ali za neke parove ne vrijedi. I konačno, ako zaokruži **c)** to znači da Borna smatra kako dva četverokuta s istim kutovima nikako ne mogu biti slična.

Što bi ti zaokružio da si na Borninu mjestu? Obrazloži svoj odgovor.

15. Prepiši u bilježnicu jedan od ponuđenih odgovora.

a) Ako dva četverokuta imaju iste duljine stranica, oni su slični.

1) uvijek **2)** ponekad **3)** nikad

b) Dva pravilna peterokuta su slični likovi.

1) uvijek **2)** ponekad **3)** nikad

c) Dva paralelograma su slični likovi.

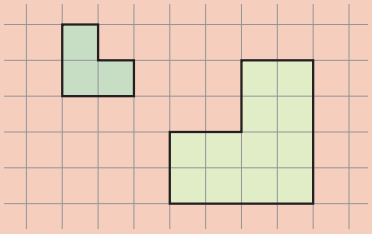
1) uvijek **2)** ponekad **3)** nikad

d) Pravilni šesterokut i pravilni peterokut su slični likovi.

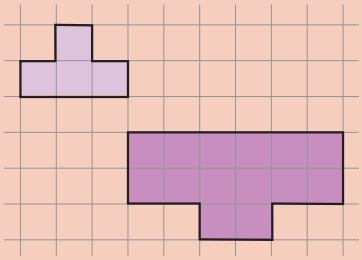
1) uvijek **2)** ponekad **3)** nikad

16. Jesu li slični mnogokuti nacrtani u kvadratnoj mreži?

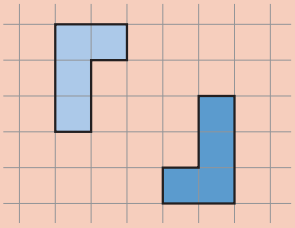
a)



b)



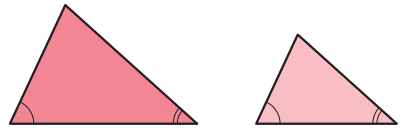
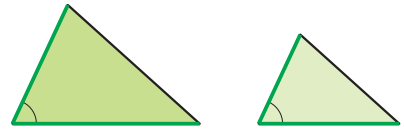
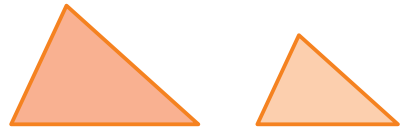
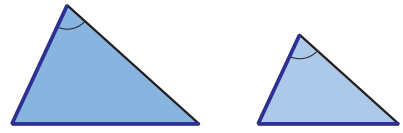
c)



17. Dva su trokuta sukladna. Jesu li oni slični?

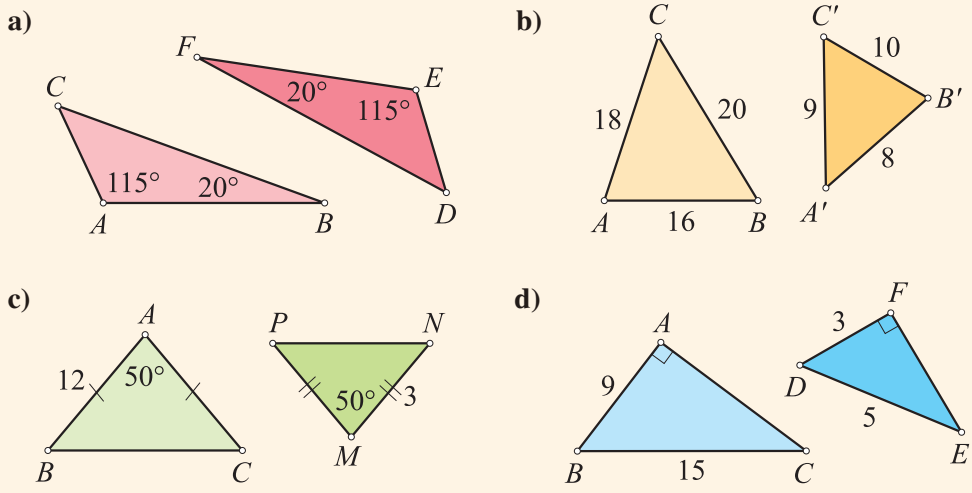
6.5. Poučci o sličnosti trokuta

Kad želimo provjeriti jesu li dva trokuta slična, ne trebamo mjeriti sve kutove i stranice te provjeravati jesu li svi odgovarajući kutovi sukladni, a stranice proporcionalne. O tome koje od tih elemenata treba provjeriti, govore poučci o sličnosti trokuta.

oznaka	poučak	
K-K	Dva su trokuta slična ako su im sukladna dva kuta.	
S-K-S	Dva su trokuta slična ako su omjeri duljina dvaju parova stranica jednaki i kutovi što ih zatvaraju te stranice sukladni.	
S-S-S	Dva su trokuta slična ako su omjeri duljina svih triju parova odgovarajućih stranica međusobno jednaki.	
S-S-K	Dva su trokuta slična ako su omjeri duljina dvaju parova odgovarajućih stranica jednaki i kutovi nasuprot većim stranicama sukladni.	

Primjer 1.

Jesu li zadani trokuti slični?



Rješenje:

a) $\triangle ABC \sim \triangle EFD$ prema K-K poučku o sličnosti trokuta.

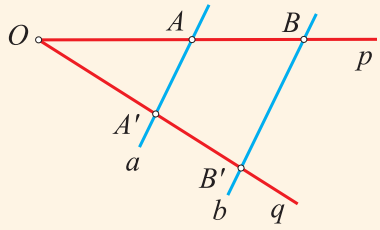
b) Za stranice tih trokuta vrijedi $\frac{18}{9} = 2$, $\frac{20}{10} = 2$, $\frac{16}{8} = 2$ pa su trokuti ABC i $A'B'C'$ slični prema S-S-S poučku o sličnosti trokuta.

c) Trokuti ABC i MNP su jednakokračni. U oba trokuta kut između krakova je $50°$, a omjeri krakova su $\frac{12}{3} = 4$. $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ prema S-K-S poučku o sličnosti trokuta.

d) Vrijedi $\frac{15}{5} = 3$ i $\frac{9}{3} = 3$, tj. trokuti imaju dva para proporcionalnih stranica. Uz to, kutovi nasuprot većoj stranici u oba trokuta su pravi pa su to sukladni kutovi. Dakle, $\triangle ABC \sim \triangle FDE$ prema S-S-K poučku o sličnosti trokuta.

Primjer 2.

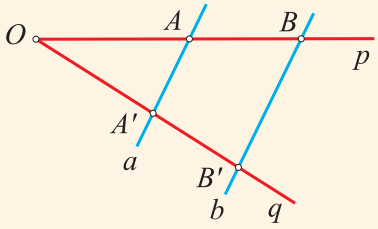
Krakovi kuta $\sphericalangle pOq$ presječeni su usporednim pravcima a i b.



Pokažimo da vrijedi:

$$|OA| : |OB| = |AA'| : |BB'|.$$

Rješenje:



Dokazat ćemo da su trokuti OAA' i OBB' slični. Imaju zajednički kut s vrhom O

$$\sphericalangle A'OA \cong \sphericalangle B'OB.$$

Prema Talesovu poučku o proporcionalnosti dužina vrijedi:

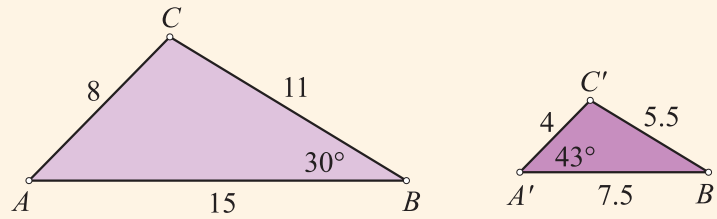
$$|OA| : |OB| = |OA'| : |OB'|,$$

tj. omjeri stranica koje određuju kut $\sphericalangle AOA'$ su jednaki. Prema S-K-S poučku o sličnosti ti su trokuti slični. U sličnim trokutima omjeri svih triju parova odgovarajućih stranica su jednaki pa je:

$$|OA| : |OB| = |AA'| : |BB'|.$$

Primjer 3.

Dana su dva trokuta. Izračunajmo veličine svih kutova obaju trokuta.



Rješenje: Vrijedi $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{11}{5.5} = 2$, $\frac{15}{7.5} = 2$, tj. omjeri duljina parova stranica su jednaki.

Prema S-S-S poučku o sličnosti vrijedi:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

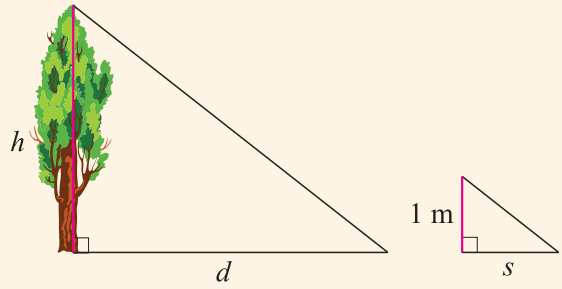
Slični trokuti imaju sukladne odgovarajuće kutove. Stoga je:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle B'A'C'| = 43^\circ$$
$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle C'B'A'| = 30^\circ$$
$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle A'C'B'| = 180^\circ - 30^\circ - 43^\circ = 107^\circ.$$

Primjer 4.

Jurica ima štap duljine 1 m. Kako može s pomoću tog štapa i metra odrediti visinu jablana u parku?

Rješenje:



Tijekom sunčanog dana Jurica može izmjeriti duljinu sjene d jablana i duljinu sjene s svog štapa postavljajući ga vertikalno na tlo. Radi se o dva pravokutna trokuta koji su slični prema K-K poučku o sličnosti jer u istom trenutku Sunčeve zrake padaju na tlo pod istim kutom. Stoga su i omjeri duljina odgovarajućih stranica jednaki, tj.

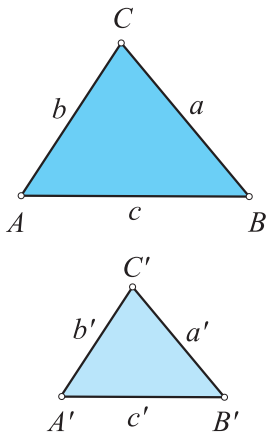
$$h : 1 = d : s$$

gdje je h visina jablana. Dobivamo $h = \frac{d}{s}$, tj. visina jablana jednaka je količniku duljina sjena jablana i štapa.

Opet promotrimo dva slična trokuta ABC i $A'B'C'$ čiji je koeficijent sličnosti k, tj. u kojima vrijedi:

$$\frac{a}{a'} = k, \qquad \frac{b}{b'} = k, \qquad \frac{c}{c'} = k.$$

Tada je $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$.



Izračunajmo opseg jednog i drugog trokuta.

Opseg trokuta $A'B'C'$ je

$$o' = a' + b' + c'.$$

Opseg trokuta $A'B'C'$ je:

$$\begin{aligned} o &= a + b + c = ka' + kb' + kc' \\ &= k(a' + b' + c') = ko'. \end{aligned}$$

Dakle, $\frac{o}{o'} = k$.

Opsezi sličnih trokuta odnose se kao i duljine odgovarajućih stranica.

Opsezi sličnih trokuta

Omjer opsega sličnih trokuta jednak je koeficijentu sličnosti tih trokuta, tj. ako je $\frac{a}{a'} = k$, tada je $\frac{o}{o'} = k$.

Primjer 5.

Duljine stranica trokuta su 4 cm, 6 cm, 7 cm. Opseg njemu sličnog trokuta je 85 cm. Kolike su duljine stranica sličnog trokuta?

Rješenje:

$a = 4\text{ cm}$
$b = 6\text{ cm}$
$c = 7\text{ cm}$
$\underline{o' = 85\text{ cm}}$
$a', b', c' = ?$

Izračunamo prvo opseg zadanog trokuta:

$$o = a + b + c$$
$$o = 4 + 6 + 7 = 17\text{ cm}.$$

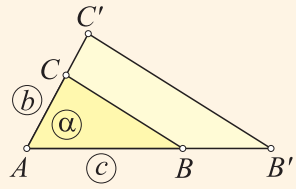
Tada je $\frac{o}{o'} = k$, tj. $k = \frac{17}{85} = \frac{1}{5}$. Dalje je $\frac{a}{a'} = k$, $\frac{4}{a'} = \frac{1}{5}$, $a' = 20\text{ cm}$; $\frac{b}{b'} = k$, $\frac{6}{b'} = \frac{1}{5}$, $b' = 30\text{ cm}$; $\frac{c}{c'} = k$, $\frac{7}{c'} = \frac{1}{5}$, $c' = 35\text{ cm}$. Duljine stranica sličnog trokuta su 20 cm, 30 cm, 35 cm.

Primjer 6.

Konstruirajmo trokut ABC ako je $\alpha = 30°$, $c = 1.8$ cm, $b = 1$ cm. Zatim konstruirajmo trokut $A'B'C'$ koji ima dvostruko dulje stranice od trokuta ABC.

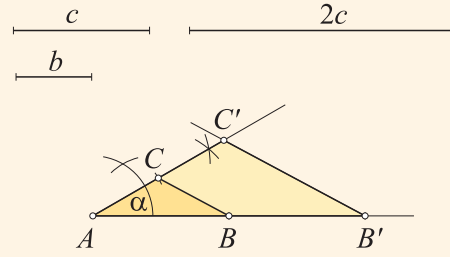
Rješenje:

Skica



Trokuti ABC i $A'B'C'$ su slični prema S-S-S poučku o sličnosti. Zato ćemo, kad konstruiramo ABC, stranicu $\overline{AB}$ produljiti dva puta i dobiti $\overline{AB'}$ te kroz B' povući paralelu s $\overline{BC}$. Povlačenjem paralele dobili smo sličan trokut (K-K) i njegove su stranice upravo dva puta dulje od stranica trokuta ABC.

Plan konstrukcije:
1. $\sphericalangle pAq$ veličine $30°$
2. $k(A, c) \cap p = \{B\}$
3. $k(A, c) \cap q = \{C\}$
4. $\triangle ABC$
5. $k(A, 2c) \cap p = \{B'\}$
6. paralela r kroz B' s BC
7. $r \cap q = \{C'\}$.

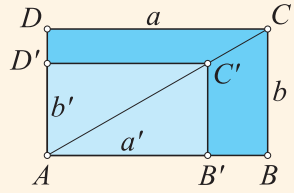


Primjer 7.

Nacrtan je pravokutnik $ABCD$. Konstruirajmo novi pravokutnik kojemu su duljine stranica 75 % duljina stranica od $ABCD$.

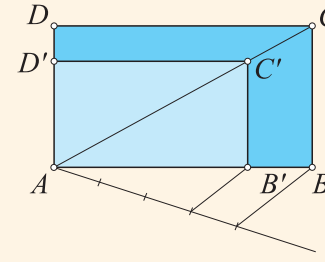
Rješenje:

Skica



Mora vrijediti $a' = 75\ \%a$, tj. $a' = \frac{3}{4}a$. Treba konstruirati $\frac{3}{4}$ stranice a. To ćemo učiniti primjenom Talesova poučka. Kad dobijemo točku B', povlačenjem okomice do dijagonale $\overline{AC}$ nalazimo C', a onda paralelom s $\overline{AB}$ dobivamo i točku D'.

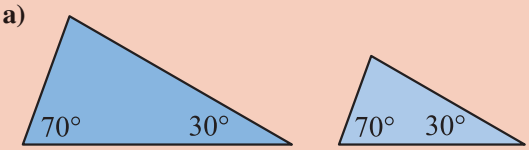
Plan konstrukcije:
1. Dužinu $\overline{AB}$ dijelimo točkom B' u omjeru $3 : 1$.
2. $\overline{AC}$
3. Iz B' okomica na $\overline{AB}$ do $\overline{AC}$, dobiva se točka C'.
4. Iz C' paralela s $\overline{AB}$ do $\overline{AD}$, dobiva se točka D'.



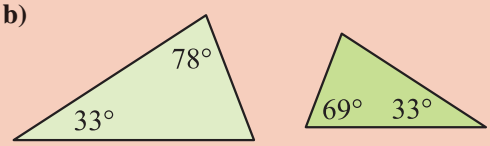
Zadatci 6.5.

1. Jesu li trokuti slični? Ako jesu, prema kojem su poučku slični?

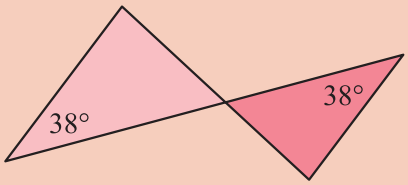
a)



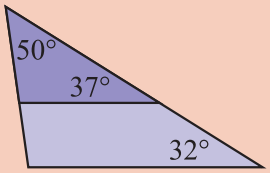
b)



c)

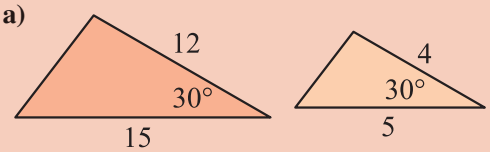


d)

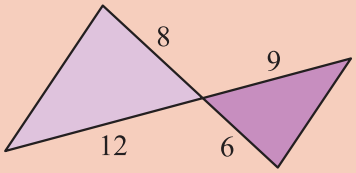


2. Jesu li trokuti slični? Ako jesu, prema kojem su poučku slični?

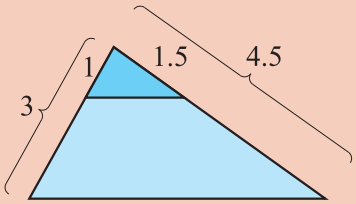
a)



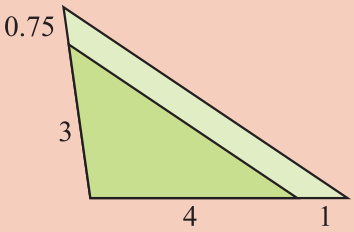
b)



c)

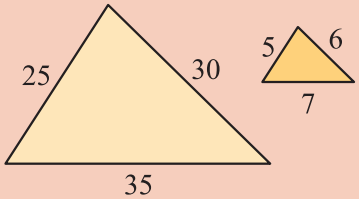


d)

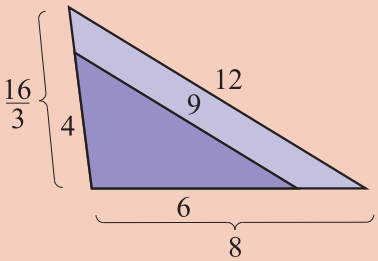


3. Jesu li trokuti slični? Ako jesu, prema kojem su poučku slični?

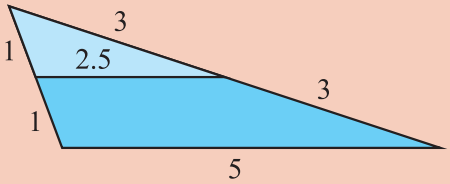
a)



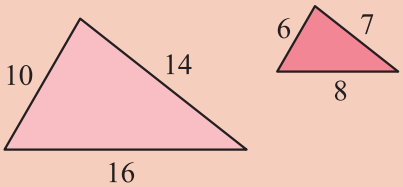
b)



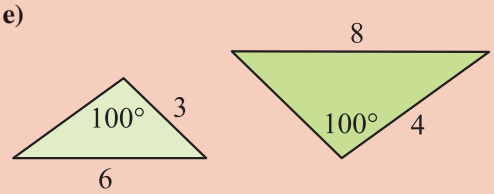
c)



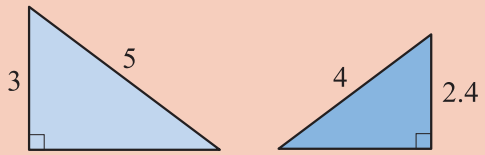
d)



e)



f)



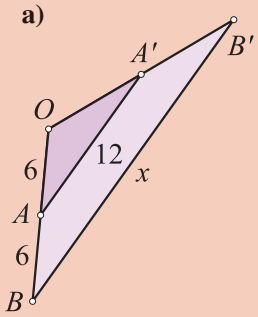
4. Jesu li slični trokuti ABC i $A'B'C'$ ako je:

a) $\alpha = 75°$, $b = 8\text{ cm}$, $c = 20\text{ cm}$,
$\alpha' = 75°$, $b' = 16\text{ cm}$, $c' = 40\text{ cm}$

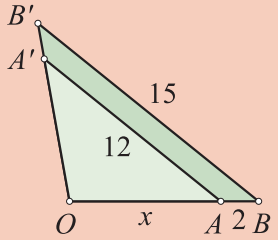
b) $a = 7\text{ dm}$, $b = 6\text{ dm}$, $c = 9\text{ dm}$,
$a' = 17.5\text{ m}$, $b' = 15\text{ m}$, $c' = 22.5\text{ m}$?
Ako su slični, odredi koeficijent sličnosti.

5. Ako je $\overline{AA'} \| \overline{BB'}$ izračunaj x.

a)

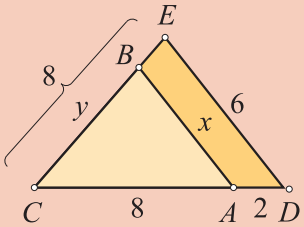


b)

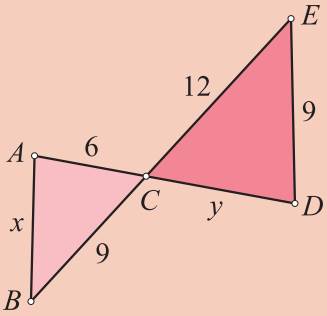


6. Ako je $\overline{AB} \| \overline{DE}$ izračunaj x i y.

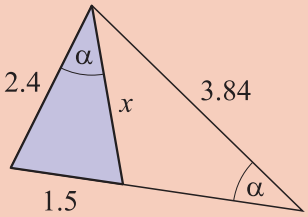
a)



b)

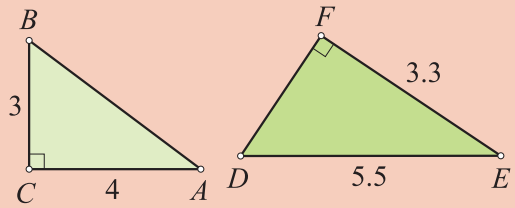


7. Izračunaj nepoznatu duljinu x.

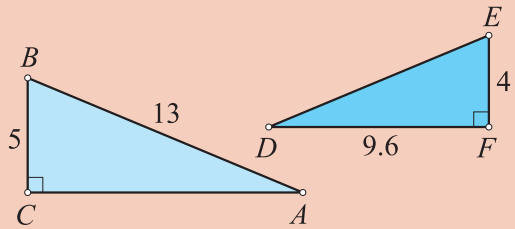


8. Obrazloži zašto su pravokutni trokuti ABC i DEF slični.

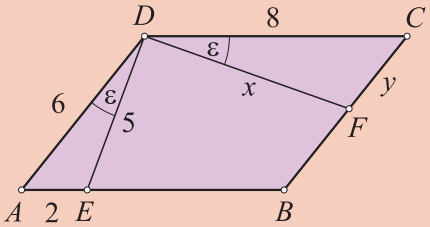
a)



b)



9. Četverokut $ABCD$ je paralelogram. Izračunaj nepoznate duljine x i y.



10. Marko želi odrediti visinu svoje kuće. Kako će to učiniti?

11. Duljine stranica trokuta ABC su 14 mm, 2 cm, 19 mm. Njemu sličan trokut $A'B'C'$ ima najkraću stranicu 3 cm. Izračunaj opseg trokuta $A'B'C'$.

12. Trokuti ABC i DEF su slični i pri tome je $|AB| = 6\text{ cm}$, $|DE| = 4.5\text{ cm}$. Ako je opseg trokuta ABC 20 cm, koliki je opseg trokuta DEF?

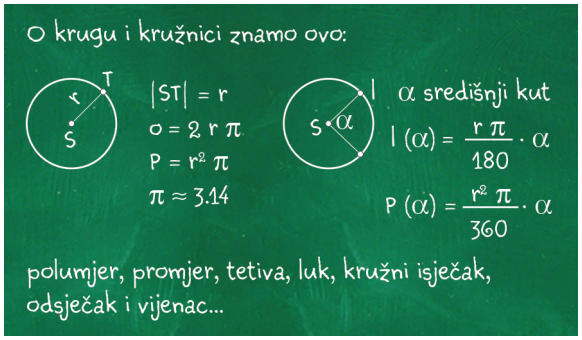
13. Nacrtaj trokut ABC po volji. Zatim konstruiraj sličan trokut $A'B'C'$ s koeficijentom sličnosti $\frac{a'}{a} = k$ ako je:

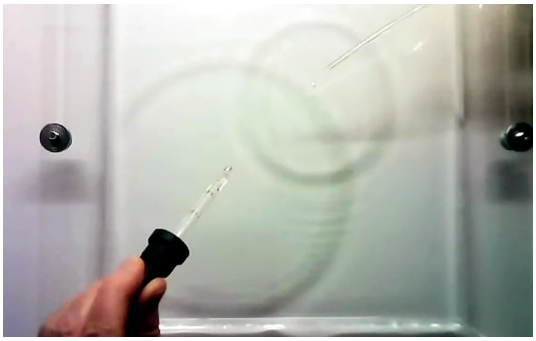
a) $k = \frac{1}{2}$ **b)** $k = \frac{4}{3}$ **c)** $k = \frac{4}{5}$ **d)** $k = \frac{6}{5}$.

14. Nacrtaj pravokutnik $ABCD$ po volji. Konstruiraj novi pravokutnik $A'B'C'D'$ čije se stranice odnose prema stranicama pravokutnika $ABCD$ kao:

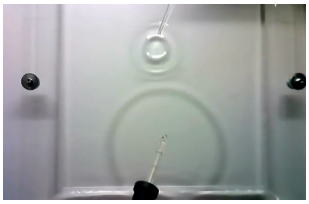
a) $1 : 2$ **b)** $2 : 3$.

6.6. Kružnice i njihov međusobni položaj



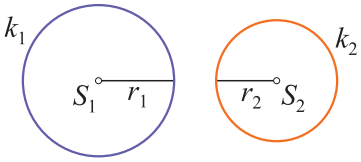


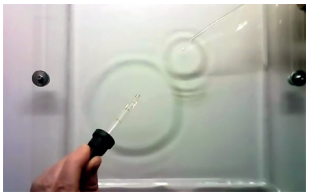
Kapnimo dvije kapi vode u posudu. Stvaraju se kružni valovi koji se šire površinom vode. Proučimo razne situacije koje vidimo tijekom tog pokusa.



Kružnice se **ne sijeku**, tj. nemaju zajedničkih točaka. Udaljenost središta tih kružnica je

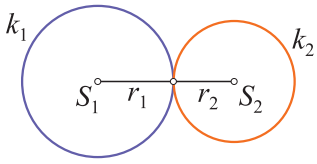
$$|S_1S_2| > r_1 + r_2.$$

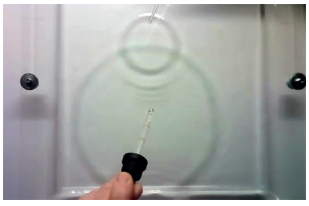




Kružnice se **dodiruju izvana**. Imaju samo jednu zajedničku točku. Za udaljenost središta vrijedi

$$|S_1S_2| = r_1 + r_2.$$

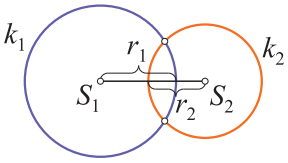




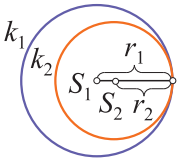
Kružnice se sijeku i imaju dvije zajedničke točke. Za udaljenost središta vrijede dvije nejednakosti

$$|S_1S_2| < r_1 + r_2 \quad \text{i}$$

$$|S_1S_2| > r_1 - r_2, \text{ ako je } r_1 > r_2.$$



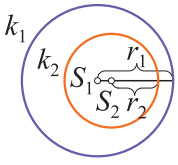
Dvije kružnice mogu biti u još dva položaja. U oba položaja manja je kružnica unutar veće, ali u jednom se položaju dodiruju, a u drugom položaju nemaju zajedničkih točaka.



Kružnice se **dodiruju iznutra** kad je udaljenost središta

$$|S_1S_2| = r_1 - r_2$$

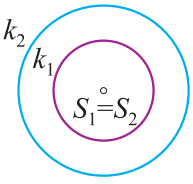
ako je r_1 duljina polumjera veće kružnice. U ovom je slučaju presjek kružnica jedna točka.



Kružnice se **ne sijeku** i **jedna se nalazi unutar druge** kad je

$$|S_1S_2| < r_1 - r_2$$

gdje je r_1 duljina polumjera veće kružnice.



Ako je $S_1 = S_2$, kružnice su **koncentrične**. Ukoliko koncentrične kružnice imaju polumjere jednakih duljina, one se **podudaraju**, tj. $k_1 = k_2$.

Primjer 1.

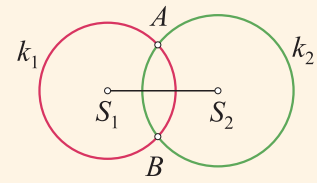
Nacrtajmo dužinu $\overline{S_1S_2}$ duljine 17 mm te kružnicu $k_1(S_1, r = 9\text{ mm})$.

a) Nacrtajmo kružnicu $k_2(S_2, r = 10\text{ mm})$. U kojem su položaju kružnice k_1 i k_2? Označimo im točke presjeka.

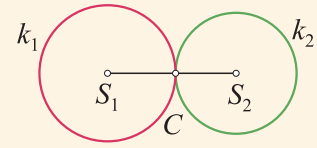
b) Koliki bi trebao biti polumjer kružnice k_2 da se kružnice k_1 i k_2 dodiruju izvana? Možemo li izabrati polumjer r_2 da se kružnice dodiruju iznutra?

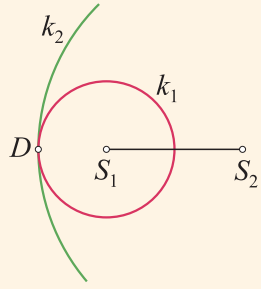
Rješenje:

a) Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u dvjema točkama A i B, tj. $k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$. Te dvije točke nazivaju se **sjecišta** kružnica k_1 i k_2.



b) U slučaju da je duljina polumjera r_2 jednaka $17 - 9 = 8\text{ mm}$, kružnice bi se dodirivale izvana: $k_1 \cap k_2 = \{C\}$.





Kad bi bilo $r_2 = 17 + 10 = 27\text{ mm}$, kružnica k_1 bila bi unutar kružnice k_2 i dodirivale bi se iznutra:

$$k_1 \cap k_2 = \{D\}.$$

Točke C i D nazivaju se **dirališta** kružnica k_1 i k_2.

Primjer 2.

Bez crtanja kružnica odredimo u kojem su položaju kružnice $k_1(A, r_1)$ i $k_2(B, r_2)$ ako je:

a) $r_1 = 4\text{ cm}$, $r_2 = 5\text{ cm}$, $|AB| = 9\text{ cm}$

b) $r_1 = 6.2\text{ cm}$, $r_2 = 18\text{ mm}$, $|AB| = 51\text{ mm}$.

Rješenje:

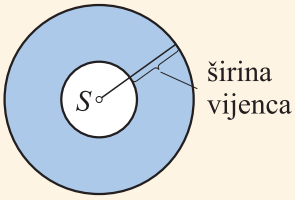
a) Uočimo da je $r_1 + r_2 = 9\text{ cm} = |AB|$. Stoga se kružnice dodiruju izvana.

b) Vrijedi $r_1 + r_2 = 80\text{ mm}$ i $r_1 - r_2 = 62 - 18 = 44\text{ mm}$.
Budući da je $r_1 - r_2 < |AB| < r_1 + r_2$, zaključujemo da se kružnice sijeku.

Primjer 3.

Nacrtajmo kružnicu $k_1(S, r_1 = 2.5\text{ cm})$. Kolika je duljina polumjera njoj koncentrične kružnice koja s k_1 čini kružni vijenac širine 1 cm?

Rješenje: Širina vijenca jednaka je razlici duljina polumjera.



Ako je $r_2 < r_1$, tada je:

$$r_1 - r_2 = 1$$
$$2.5 - r_2 = 1, \quad r_2 = 1.5\text{ cm}.$$

Ako je $r_2 > r_1$, tada je:

$$r_2 - r_1 = 1$$
$$r_2 - 2.5 = 1, \quad r_2 = 3.5\text{ cm}.$$

Postoje dvije koncentrične kružnice koje sa zadanom čine kružni vijenac širine 1 cm.

Primjer 4.

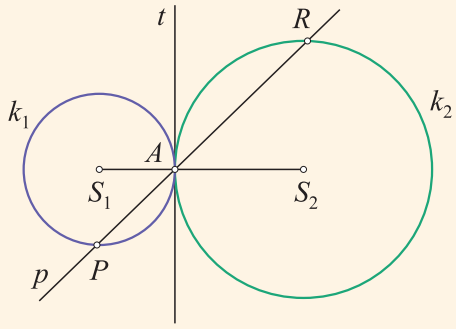
Nacrtajmo kružnice $k_1(S_1, r_1 = 1\text{ cm})$ i $k_2(S_2, r_2 = 17\text{ mm})$ koje se dodiruju izvana u jednoj točki A. Kroz tu točku A povucimo dva pravca: pravac t koji je okomit na spojnicu $\overline{S_1S_2}$ i pravac p koji nije okomit na $\overline{S_1S_2}$. U koliko točaka pravci t i p sijeku kružnice k_1 i k_2?

Rješenje: Pravac t koji je okomit na $\overline{S_1S_2}$, siječe obje kružnice samo u točki A, tj.

$$t \cap k_1 = \{A\}, \quad t \cap k_2 = \{A\}.$$

Pravac p koji nije okomit na $\overline{S_1S_2}$ osim u točki A, siječe svaku od kružnica u još jednoj točki, tj.

$$p \cap k_1 = \{A, P\}, \quad p \cap k_2 = \{A, R\}.$$



Svaki pravac p koji prolazi točkom A i nije okomit na $\overline{S_1A}$ sjeći će kružnicu k_1 u dvjema točkama. Takav se pravac naziva **sekanta**.

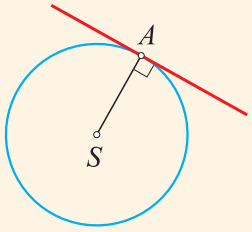
Pravac t koji siječe kružnicu samo u jednoj točki naziva se **tangenta** i on je okomit na polumjer koji spaja središte kružnice i točku u kojoj pravac t dira kružnicu, tj.

$$t \perp \overline{S_1A}.$$

Primjer 5.

Nacrtajmo kružnicu $k(S, r = 1.2\text{ cm})$ i označimo jednu njezinu točku A. Povucimo tangentu na kružnicu k koja prolazi točkom A.

Rješenje: Spojimo S i A. Povucimo okomicu na dužinu $\overline{SA}$ kroz točku A. Ta je okomica tražena tangenta.



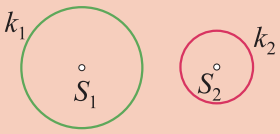
Zadatci 6.6.

1. Nacrtaj dvije kružnice koje se:

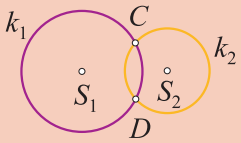
a) sijeku **b)** ne sijeku.

2. Što je presjek nacrtanih kružnica?

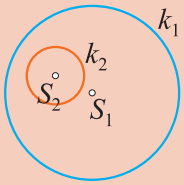
a)



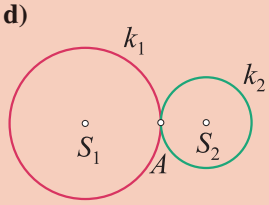
b)



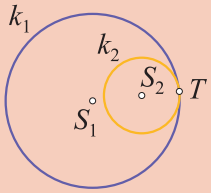
c)



d)



e)



3. Nacrtaj kružnice čije su duljine polumjera 3 cm i 2 cm ako su njihova središta udaljena:

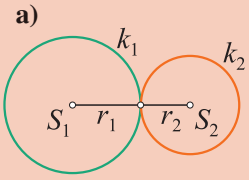
a) 2 cm **b)** 4 cm

c) 5 cm **d)** 6 cm.

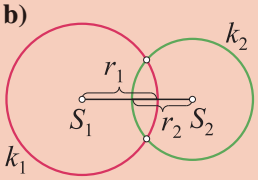
U kojem su međusobnom položaju te kružnice?

4. Prepiši u bilježnicu i spoji parove.

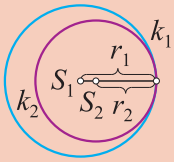
a)



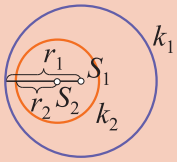
b)



c)



d)



A) $|S_1S_2| = r_1 - r_2$ **B)** $|S_1S_2| = r_1 + r_2$

C) $|S_1S_2| < r_1 - r_2$

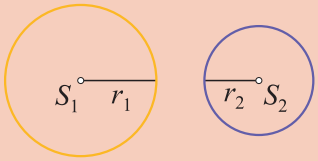
D) $r_1 - r_2 < |S_1S_2| = r_1 + r_2$

5. Nacrtaj kružnice duljine polumjera 32 mm i 19 mm koje se:

a) dodiruju izvana **b)** sijeku

c) dodiruju iznutra **d)** ne sijeku.

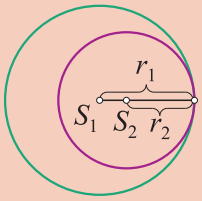
6. Što vrijedi za $|S_1S_2|$?



a) $|S_1S_2| = r_1 + r_2$ **b)** $|S_1S_2| > r_1 + r_2$

c) $|S_1S_2| > r_1 - r_2$ **d)** $|S_1S_2| = r_2 - r_1$

7. Što vrijedi za $|S_1S_2|$?



a) $|S_1S_2| = r_2 - r_1$

b) $|S_1S_2| = r_1 + r_2$

c) $|S_1S_2| < r_1 + r_2$

d) $|S_1S_2| = |r_1 - r_2|$

8. U kakvom su međusobnom položaju kružnice:

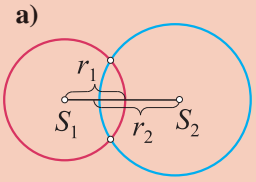
a) $k_1(A, 22\text{ mm})$ i $k_2(B, 2.9\text{ cm})$ ako je $|AB| = 51\text{ mm}$

b) $k_1(A, 14\text{ mm})$ i $k_2(B, 2.1\text{ cm})$ ako je $|AB| = 7\text{ mm}$

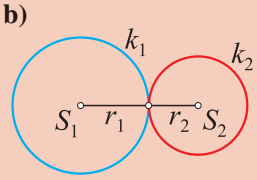
c) $k_1(A, 5\text{ cm})$ i $k_2(A, 4\text{ cm})$?

9. Usporedi $|S_1S_2|$ s $r_1 + r_2$.

a)



b)



10. Nacrtaj kružnicu $k_1(A_1, r_1 = 3\text{ cm})$ i neku kružnicu $k_2(B, r_2)$ tako da je $|AB| = 4\text{ cm}$. Koliki mora biti r_2 da se kružnice k_1 i k_2:

a) dodiruju izvana **b)** sijeku

c) ne sijeku i jedna se nalazi unutar druge?

11. Nacrtaj točku A i sve točke koje su od nje udaljene 23 mm.

12. Nacrtaj točke A i B koje su udaljene $2.5\ \text{cm}$. Konstruiraj točke koje su od A udaljene $2\ \text{cm}$, a od točke B $1.5\ \text{cm}$.

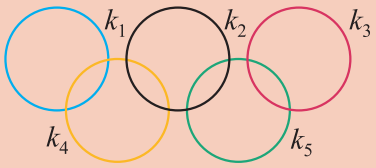
13. Nacrtaj kružnicu $k(M, r = 25\ \text{mm})$. Nacrtaj njoj koncentrične kružnice čiji se polumjeri razlikuju za $8\ \text{mm}$ od polumjera r.

14. Nacrtaj kružni vijenac širine $1.5\ \text{cm}$. Koliko postoji rješenja?

15. Nacrtaj kružnicu $k_1(S_1, r_1 = 2\ \text{cm})$ i na njoj označi točku A. Nacrtaj dvije kružnice koje kružnicu k_1 dodiruju u točki A:

a) izvana **b)** iznutra.

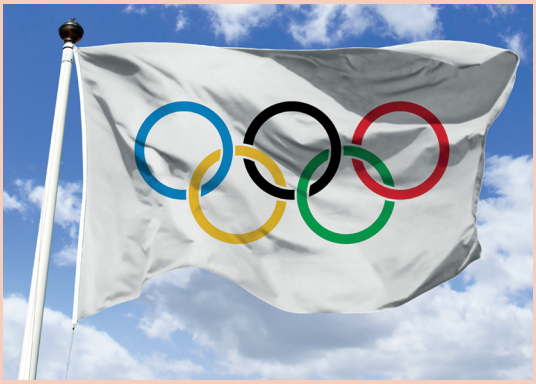
16. Na slici je prikazan znak olimpijskih igara.



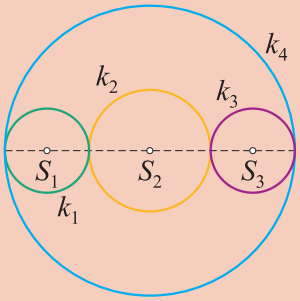
U kojem su odnosu kružnice:

a) k_1 i k_5 **b)** k_2 i k_4 **c)** k_3 i k_4?

Pronađi kad je nastao taj znak i koje je značenje tih kružnica.



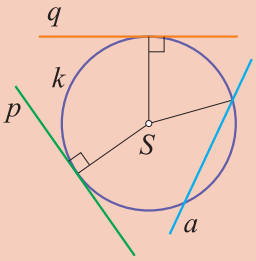
17. Kružnice na slici se diraju. Ako su polumjeri za k_1 i k_2 dugački $r_1 = 9\ \text{mm}$ i $r_2 = 13\ \text{mm}$, izračunaj duljine polumjera kružnica k_3 i k_4.



18. Nacrtaj kružnicu $k_1(S, r = 3\ \text{cm})$ i jedan njezin promjer $\overline{AB}$. Na simetrali dužine $\overline{AB}$ odaberi neku točku T i nacrtaj kružnicu $k_2(T, |TA|)$. Što je $k_1 \cap k_2$?

19. Nacrtaj kružnicu $k_1(S, r = 26\ \text{mm})$ i jednu njezinu tetivu $\overline{AB}$. Potom nacrtaj još dvije kružnice koje prolaze točkama A i B. Gdje se nalaze središta tih kružnica?

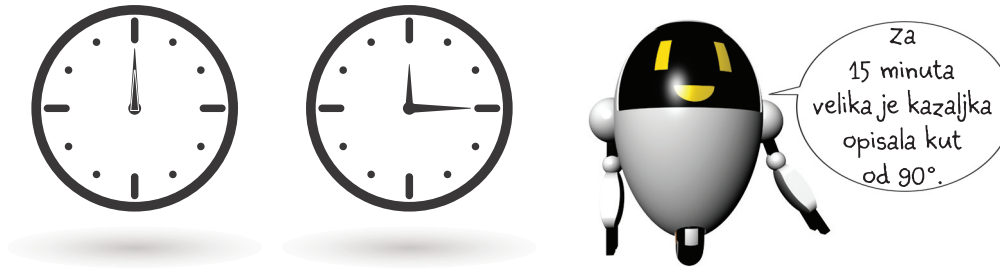
20. Koji je od pravaca tangenta na kružnicu k?



21. Nacrtaj kružnicu $k(S, r = 3\ \text{cm})$ i njezin promjer $\overline{AB}$. U točkama A i B povuci tangente na kružnicu. U kakvom su međusobnom položaju te tangente?

22. Nacrtaj kružnicu $k(A, r = 29\ \text{mm})$ i njezinu tetivu $\overline{MN}$ duljine $4\ \text{cm}$. U točkama M i N konstruiraj tangente. U kakvom su međusobnom položaju ti pravci?

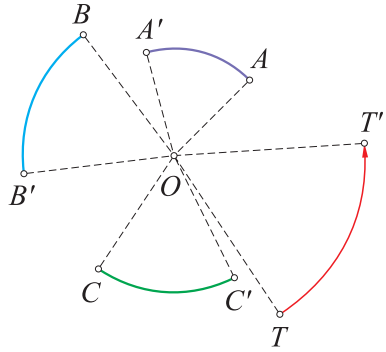
6.7. Rotacija



Promatrajmo veliku kazaljku na satu. Ona za 15 minuta opiše kut od 90°; za 5 minuta opiše $\frac{1}{12}$ punog kruga, tj. $360^\circ : 12 = 30^\circ$; za 20 minuta opiše $4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$. Njezin se vrh stalno giba po kružnici.

Svuda oko nas možemo uočiti vrtnju raznovrsnih predmeta: kotača, propelera, lopatica itd. Na mnogim pružnim prijelazima nalaze se branici koji rotiraju oko svojeg jednog kraja, na gradilištima kranovi dizalica rotiraju prenoseći teret, razne rampe reguliraju ulazak na parkirališta. U svim tim primjerima radi se o kružnom gibanju, rotaciji ili vrtnji.



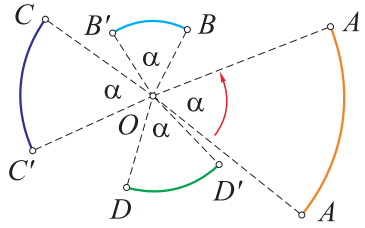
Neka je u ravnini zadana točka O te neka je α kut od 60°. Opišimo postupak kojim svaku točku ravnine rotiramo za 60°.

Oko O opišimo kružnicu koja prolazi točkom T i na njoj označimo točku T' za koju vrijedi da je $|\sphericalangle TOT'| = 60^\circ$. Na slici je dano nekoliko točaka i njihovih slika. Svakoj je točki T ravnine pridružena jedna točka T' sa svojstvima:

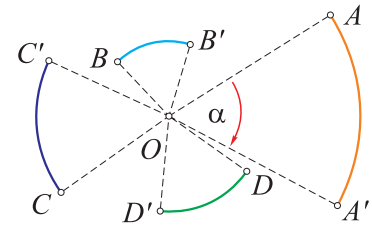
$$|\sphericalangle TOT'| = 60^\circ \text{ i } |OT| = |OT'|.$$

Preslikavanje s tim svojstvima naziva se **rotacija ravnine** oko točke O za kut 60°. Jasno je da umjesto kuta od 60° možemo staviti bilo koji kut.

Uočimo da se u ovom primjeru, krećući od točke A do A', od B do B', itd., krećemo u smjeru suprotnom od gibanja kazaljke na satu. U matematici se taj smjer naziva **pozitivnim smjerom**, dok se smjer gibanja kazaljke na satu naziva **negativnim smjerom**.



Ako je kut rotacije pozitivan $(\alpha > 0)$, točke rotiraju u suprotnom smjeru od kazaljke na satu.



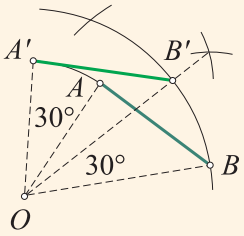
Ako je kut rotacije negativan $(\alpha < 0)$, točke rotiraju u smjeru kazaljke na satu.

Primjer 1.

Nacrtajmo dužinu $\overline{AB}$ i točku O koja ne leži na njoj. Konstruirajmo sliku dužine $\overline{AB}$ pri rotaciji sa središtem O za $30°$.

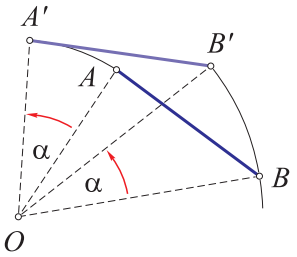
Rješenje:

Spojimo točke O i A i konstruiramo kut od $30°$ s jednim krakom OA. Presjek drugog kraka kuta od $30°$ i kružnice sa središtem O i polumjerom $\overline{OA}$ je točka A'. Sad isti postupak ponovimo i za točku B. Slika dužine $\overline{AB}$ je dužina $\overline{A'B'}$.



Kakve su međusobno duljine dužina $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$?

Nakon mjerenja dužina mogli bismo zaključiti da su u ovom slučaju dužine jednakih duljina. Ali hoće li to uvijek biti tako, neovisno o izboru dužine $\overline{AB}$ i rotacije?



Hoće! Uvjerimo se da je to stvarno tako.

Promotrimo sliku koju dobivamo rotiranjem dužine $\overline{AB}$ oko točke O za neki kut α. Uočimo trokute OBA i $OB'A'$. Za njihove kutove $\sphericalangle BOA$ i $\sphericalangle B'OA'$ vrijedi:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle BOA| &= |\sphericalangle BOB'| + |\sphericalangle B'OA| = \alpha + |\sphericalangle B'OA| \\ &= |\sphericalangle AOA'| + |\sphericalangle B'OA| = |\sphericalangle B'OA'|.\end{aligned}$$

Zbog svojstava rotacije vrijedi: $|OA| = |OA'|$ i $|OB| = |OB'|$, te se trokuti OBA i $OB'A'$ podudaraju u dvjema stranicama i kutu između njih. Prema teoremu S-K-S o sukladnosti trokuta slijedi da su trokuti OBA i $OB'A'$ sukladni, a to znači i da su im preostale stranice međusobno sukladne, tj. $|AB| = |A'B'|$. Time smo dokazali da su dužina i njena slika pri rotaciji sukladne.

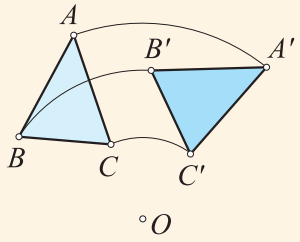
Primjer 2.

Trokut ABC s duljinama stranica $a = 4\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$ rotirajmo oko točke O koja se nalazi izvan trokuta za $-60°$.

Rješenje:

Svaki vrh trokuta rotiramo za $60°$ u negativnom smjeru. Dobivene točke A', B' i C' određuju traženi trokut. Kakvi su međusobno trokuti ABC i $A'B'C'$?

Iz prethodne tvrdnje slijedi: $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ i $|AC| = |A'C'|$, tj. trokuti ABC i $A'B'C'$ imaju međusobno sukladne stranice, pa prema teoremu S-S-S, vrijedi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Dakle, trokut i njegova slika sukladni su pri rotaciji.



Općenito, lik L i njemu rotirani lik L' su sukladni.

Zadatci 6.7.

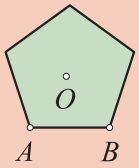
1. Za koliko se stupnjeva rotirala velika kazaljka na satu tijekom:

a) 30 **b)** 15 **c)** 45

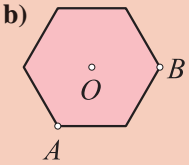
minuta?

2. Nacrtan je pravilni mnogokut kojemu je O središte opisane kružnice. Odredi za koji kut treba rotirati točku A u pozitivnom smjeru da dođe u položaj točke B.

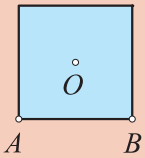
a)



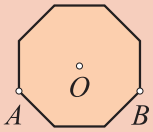
b)



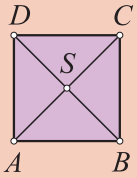
c)



d)



3. Nacrtan je kvadrat $ABCD$ koji se rotira oko sjecišta S svojih dijagonala.



Koliki je kut rotacije ako se točka:

a) A preslikala u točku C

b) C preslikala u točku D

c) B preslikala u točku A?

4. Konstruiraj pravilni šesterokut $ABCDEF$ sa stranicom duljine $2\,\text{cm}$. Središte S opisane kružnice je središte rotacije. Koliki je kut rotacije ako se točka:

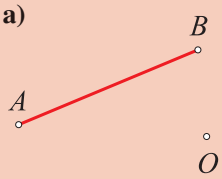
a) C preslikala u točku D

b) E preslikala u točku A

c) B preslikala u točku F?

5. Nacrtaj u bilježnicu dužinu $\overline{AB}$ i točku O te rotiraj dužinu oko točke O za $60°$.

a)



b)

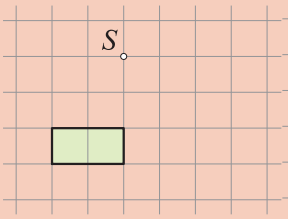
c)

6. Nacrtaj dužinu $\overline{AB}$ duljine $25\,\text{mm}$ i točku O izvan te dužine. Rotiraj dužinu $\overline{AB}$ oko točke O za:

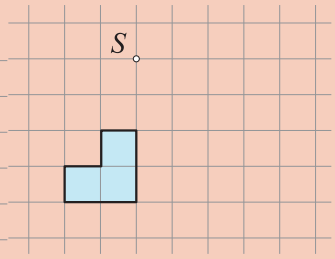
a) $30°$ **b)** $90°$ **c)** $-60°$ **d)** $-30°$.

7. Likove na slikama rotiraj za $90°$ oko točke S.

a)



b)



8. Nacrtaj dužinu $\overline{MN}$, $|MN| = 4\,\text{cm}$ i rotiraj je oko njezina polovišta za:

a) $60°$ **b)** $-60°$.

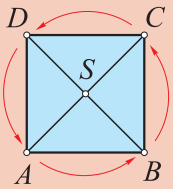
9. Nacrtaj šiljastokutan trokut ABC i rotiraj ga oko vrha B za $120°$.

10. Nacrtaj pravokutnik $ABCD$ i rotiraj ga oko vrha B za:

a) $60°$ **b)** $-60°$.

11. Konstruiraj trokut ABC ako je zadano: $a = 2.8\,\text{cm}$, $b = 4.5\,\text{cm}$, $\gamma = 60°$. Nacrtaj mu sliku pri rotaciji oko točke A za $90°$.

12. Kad se kvadrat $ABCD$ rotira oko svojeg sjecišta dijagonala S za $90°$, tada se dobije taj isti kvadrat.



Postoji li još neki kut rotacije pri kojemu se kvadrat također preslika u samog sebe?

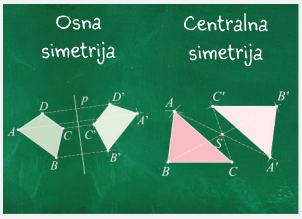
13. Odredi središte i kut rotacije kojom se:

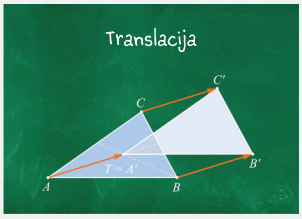
a) jednakostraničan trokut

b) pravilni šesterokut

preslikavaju u sama sebe.

6.8. Preslikavanja ravnine

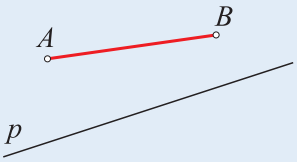




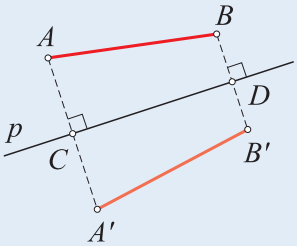
Ponovimo kako izvodimo osnu simetriju, centralnu simetriju i translaciju.

Primjer 1.

Konstruirajmo osnosimetričnu sliku dužine $\overline{AB}$ s obzirom na pravac p.



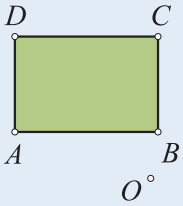
Rješenje:



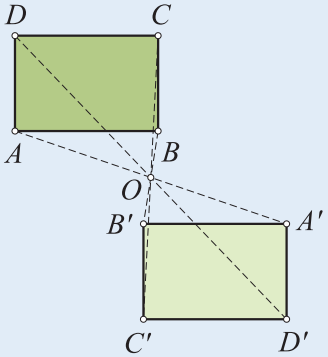
Iz točaka A i B povučemo okomice na pravac p. Te okomice sijeku pravac p u točkama C i D. Dužinu $\overline{AC}$ nanesemo na okomicu s druge strane pravca p i dobivamo točku A', tj. $|AC| = |A'C|$. Točka B' je na okomici BD tako da je $|BD| = |B'D|$. Osnosimetrična slika dužine $\overline{AB}$ je sukladna dužina $\overline{A'B'}$.

Primjer 2.

Konstruirajmo centralnosimetričnu sliku pravokutnika $ABCD$ s obzirom na točku O.



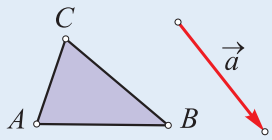
Rješenje:



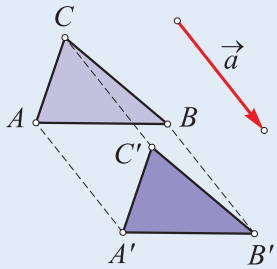
Točka A preslika se u točku A' tako da je točka O polovište dužine $\overline{AA'}$. Dakle, spojimo A i O te na produžetku te spojnice preko točke O nanesemo dužinu $\overline{AO}$. Dobivamo pravokutnik $A'B'C'D'$ koji je sukladan pravokutniku $ABCD$ i uz to su centralnosimetrične dužine usporedne, tj. $\overline{A'B'} \| \overline{AB}$, $\overline{A'D'} \| \overline{AD}$ itd.

Primjer 3.

Trokut ABC translatirajmo za vektor $\vec{a}$.



Rješenje:

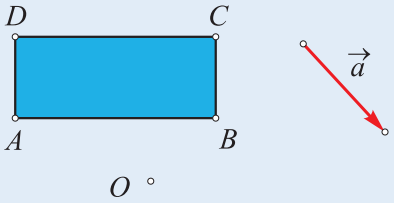


Svaki od vrhova trokuta translatiramo za vektor $\vec{a}$. Primjerice, kroz vrh A povučemo usporedni pravac s vektorom $\vec{a}$ i na njemu nanesemo duljinu vektora $\vec{a}$ počevši od točke A u istom smjeru u kojem je orijentiran vektor $\vec{a}$.
Novi trokut $A'B'C'$ sukladan je trokutu ABC i pridružene dužine su usporedne, tj. $\overline{AB} \| \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \| \overline{B'C'}$, $\overline{AC} \| \overline{A'C'}$.

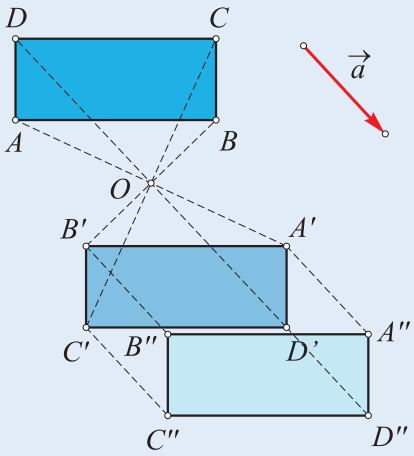
Osnu simetriju, centralnu simetriju, translaciju i rotaciju jednim imenom nazivamo **preslikavanja** ravnine.

Primjer 4.

Pravokutnik $ABCD$ prvo preslikajmo centralnom simetrijom s obzirom na točku O, a zatim dobiveni lik translatiraj za vektor $\vec{a}$.



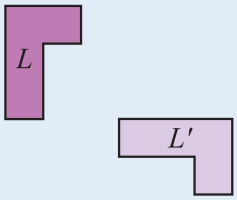
Rješenje: Uzastopno izvođenje preslikavanja naziva se **kompozicija** preslikavanja.



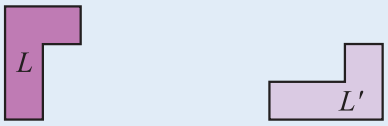
Primjer 5.

Nađimo kompoziciju dvaju preslikavanja kojima se lik L preslikava u lik L'.

a)

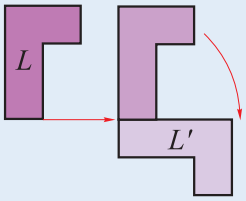


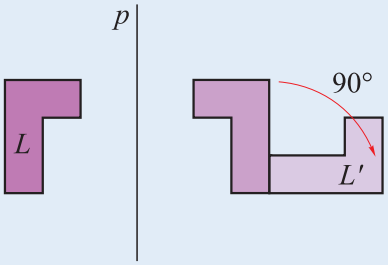
b)



Rješenje:

a) Prvo translatirajmo lik L, a zatim ga rotirajmo za $-90°$ kao što je prikazano na slici lijevo. Naravno da smo mogli i prvo izvesti rotaciju, a zatim translaciju.



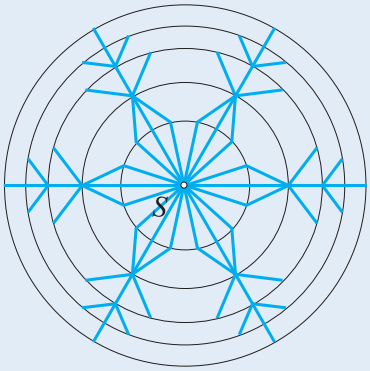


b) Lik L će se preslikati u lik L' ako ga na primjer prvo zrcalimo oko pravca p, a zatim rotiramo za $-90°$ (slika desno).

Primjer 6.

Zadani lik rotirajmo oko točke S za $60°$ i tako nastavimo rotirati još 4 puta.

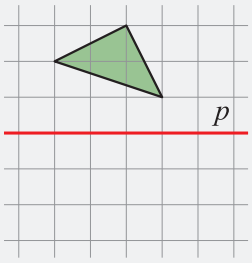
Rješenje:



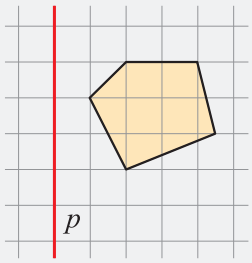
Zadatci 6.8.

1. Nacrtaj lik u bilježnicu i preslikaj ga osnom simetrijom s obzirom na pravac p.

a)

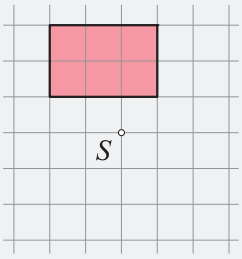


b)

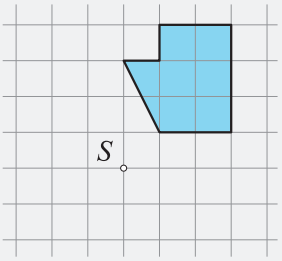


2. Nacrtaj lik u bilježnicu i preslikaj ga centralnom simetrijom s obzirom na točku S.

a)

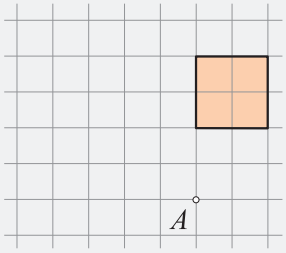


b)

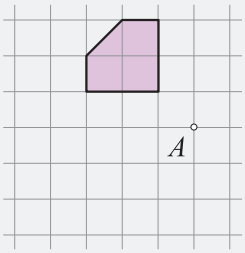


3. Nacrtaj lik u bilježnicu i preslikaj ga rotacijom oko točke A za kut $\alpha = 60°$.

a)

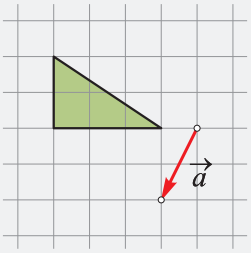


b)

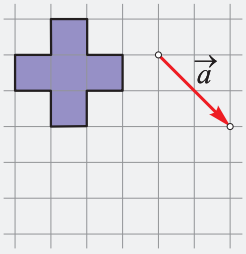


4. Nacrtaj lik u bilježnicu i translatiraj ga za vektor $\vec{a}$.

a)

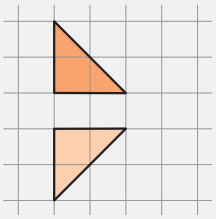


b)

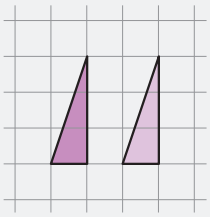


5. Koja od slika prikazuje dva međusobno osnosimetrična lika?

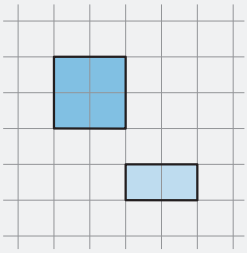
a)



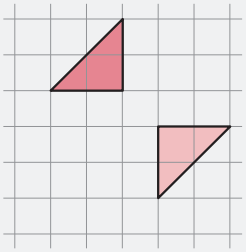
b)



c)

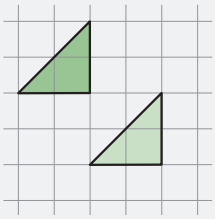


d)

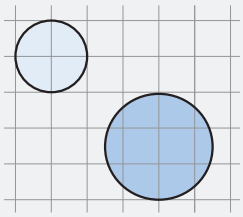


6. Koja od slika prikazuje dva međusobno translatirana lika?

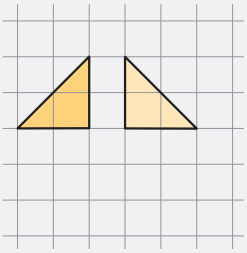
a)



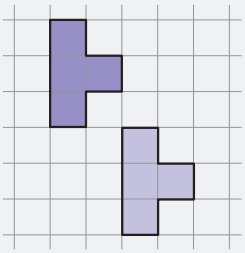
b)



c)

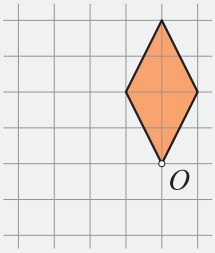


d)

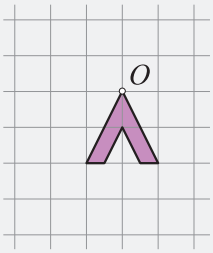


7. Zadani lik rotiraj za $90°$ tri puta uzastopce oko točke O.

a)



b)



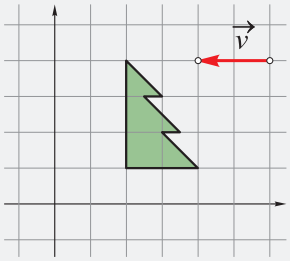
8. Konstruiraj pravilni šesterokut $ABCDEF$ sa stranicom duljine $a = 2\text{ cm}$. Translatiraj ga za vektor $\overrightarrow{AP}$ gdje je P polovište stranice $\overline{AB}$.

9. Konstruiraj trokut ABC ako je zadano: $a = 3\text{ cm}$, $b = 2.2\text{ cm}$, $c = 4.6\text{ cm}$. Preslikaj ga centralnom simetrijom s obzirom na:

a) vrh A **b)** ortocentar trokuta H.

10. Nacrtaj u koordinatnom sustavu točke $A(2,1)$, $B(3,1)$, $C(6,2)$, $D(-2,2)$, $E(-1,-3)$. Translatiraj ih za vektor $\overrightarrow{CB}$. Odredi koordinate translatiranih točaka.

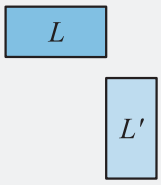
11. Lik na slici translatiraj za vektor $\vec{v}$, a zatim ga preslikaj osnom simetrijom s obzirom na os y.



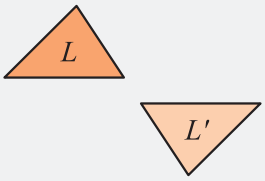
12. Konstruiraj trokut $ABCD$, rotiraj ga za $90°$ oko vrha A, a zatim translatiraj za vektor $\overrightarrow{BA}$.

13. Nađi kompoziciju dvaju preslikavanja kojima se lik L preslikava u lik L'.

a)

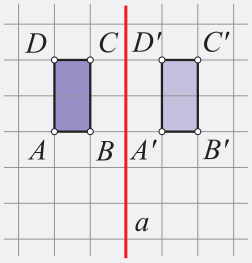


b)

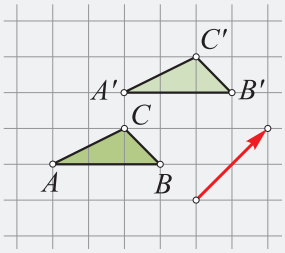


14. Je li Dominik točno riješio zadaću? Odgovor obrazloži.

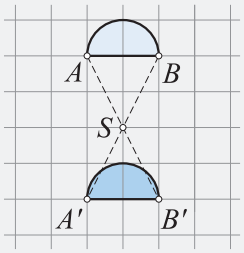
a)



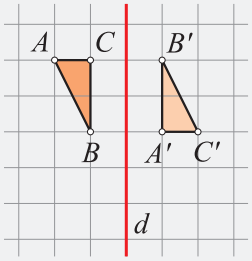
b)



c)



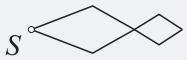
d)



15. Nacrtaj dva okomita pravca p i q i trokut ABC. Prvo osnom simetrijom s obzirom na pravac p preslikaj trokut, a zatim dobiveni trokut preslikaj osnom simetrijom s obzirom na pravac q. Kakvi su međusobno početni i završni trokut?

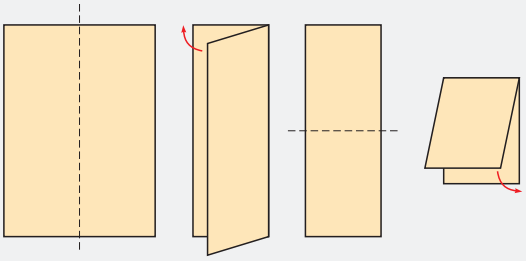
16. Što je kompozicija dviju translacija za vektor $\vec{a}$ i za vektor $\vec{b}$? Napravi tu kompoziciju na pravokutniku $2\text{ cm} \times 3\text{ cm}$.

17. Oko točke S izvedi pet uzastopnih rotacija zadanog lika za $60°$.

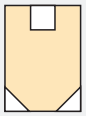


18. Pronađi fotografije snježnih pahulja i otkrij koji su se likovi rotirali kako bi se dobila pojedina pahulja.

19. Uzmi komad papira, presavini ga napola pa ga opet presavini (vidi slike).



Iz tako presavinutog papira izreži jedan kvadrat i dva trokuta kao na slici.



Razmotaj papir na početnu veličinu i nacrtaj što si dobio. Odredi osi simetrije dobivenog lika. Izradi različite motive presavijajući papire na različite načine i izrezuj iz njih različite likove.

Zadatci za ponavljanje

1. Prepiši tablicu i dopuni ju.

razmjer	vanjski članovi	unutarnji članovi
$5 : x = 10 : 17$	5 i 17	
$(x+2) : 7 = x : 11$		
	15 i 18	a i b
	$x-4$ i $x+2$	$2x-1$ i 8

Za posljednja dva retka napiši sva moguća rješenja.

2. Izračunaj nepoznati član razmjera:

a) $x : 5 = 10 : 25$ **b)** $x : 3 = 1 : 7$

c) $\frac{1}{2} : x = 2 : 5$ **d)** $\frac{2}{3} : x = 1.4 : 0.8$.

3. Riješi jednadžbe:

a) $(5x+4) : (9x+3) = 6 : 9$

b) $(15-3x) : 3 = (4-5x) : 2$

c) $\frac{4x-5}{6x-3} = 0.6$

d) $\frac{5-3x}{2-10x} = \frac{2}{3}$

e) $(3x+1) : (2x-1) = (3x-1) : (2x)$

f) $\frac{x-5}{x-4} = \frac{2x-1}{2x+10}$.

4. Udaljenost od Zagreba do Siska je 48 km, a na geografskoj je karti 1.92 cm. U kojem je mjerilu izrađena geografska karta?

5. U trokutu je veličina jednog kuta $42°$, a ostala dva se odnose kao $10 : 13$. Kolike su veličine preostalih kutova trokuta?

6. Veličine kutova u trokutu odnose se kao $2 : 3 : 4$. Izračunaj veličinu najvećeg kuta trokuta.

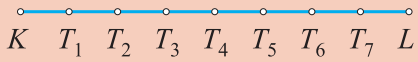
7. Opseg je trokuta ABC 6.8 cm. Kolika je duljina najdulje stranice ako se duljine stranica odnose kao $12 : 15 : 7$?

8. Nacrtaj dužinu $\overline{MN}$ duljine 7.5 cm i s pomoću trokuta i šestara (bez mjerenja) podijeli ju na četiri jednaka dijela.

9. Nacrtaj dužinu $\overline{MN}$ duljine 6.8 cm i točkom T podijeli ju u omjeru:

a) $2 : 5$ **b)** $2.5 : 2$.

10. Dužina $\overline{KL}$ podijeljena je točkama $T_1, T_2, \ldots, T_7$ na jednake dijelove.



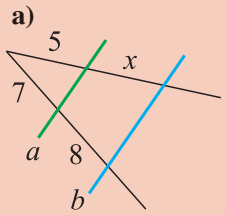
Izračunaj sljedeće omjere:

a) $|KT_3| : |KL|$ **b)** $|T_5T_7| : |T_1T_6|$

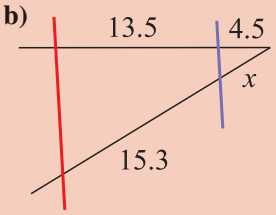
c) $|T_2T_6| : |T_3T_7|$ **d)** $|T_1L| : |T_2T_3|$.

11. Izračunaj nepoznatu duljinu x ako su pravci a i b usporedni.

a)

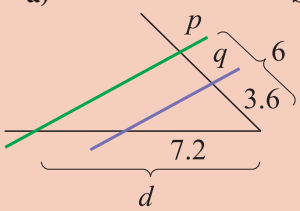


b)

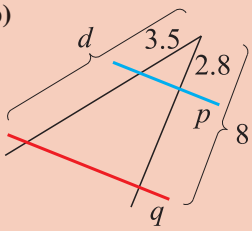


12. Izračunaj nepoznatu duljinu d ako su pravci p i q usporedni.

a)

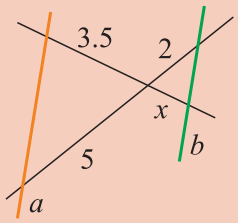


b)

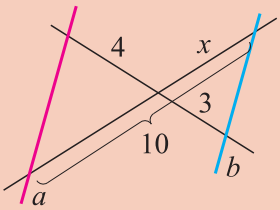


13. Izračunaj nepoznatu duljinu x ako su pravci a i b usporedni.

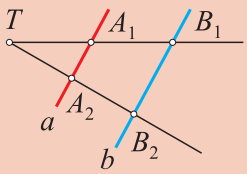
a)



b)



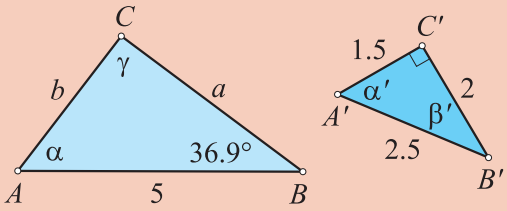
14. Jesu li pravci a i b usporedni ako je:



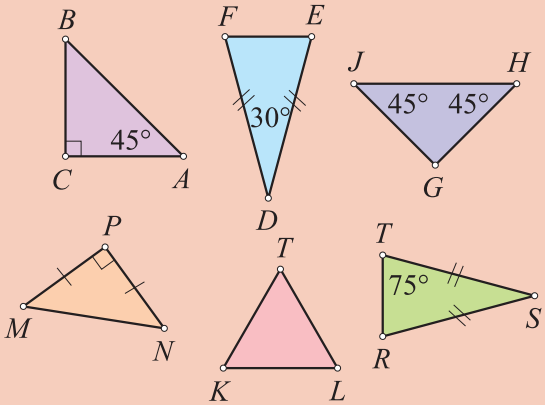
a) $|TA_1| = 2.1$ cm, $|TA_2| = 2.8$ cm, $|TB_1| = 3$ cm, $|TB_2| = 3.8$ cm

b) $|TA_1| = 6.9$ m, $|A_1B_1| = 1.5$ m, $|TA_2| = 9.2$ m, $|A_2B_2| = 2$ m?

15. Trokuti ABC i $A'B'C'$ su slični. Izračunaj im nepoznate stranice i kutove.



16. Nacrtaj u bilježnicu i spoji slične trokute.



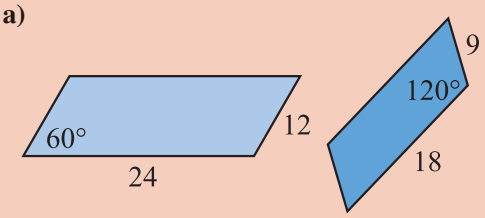
17. Jesu li svi:
a) jednakostranični **b)** jednakokračni
trokuti međusobno slični? Obrazloži svoje odgovore.

18. U trokutu ABC duljine stranica su $135\ \text{cm}$, $14\ \text{dm}$ i $145\ \text{cm}$. Najmanja stranica njemu sličnog trokuta $A'B'C'$ ima duljinu $81\ \text{cm}$. Kolike su duljine ostalih stranica trokuta $A'B'C'$?

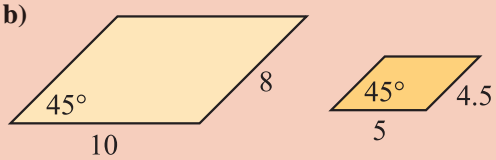
19. Opsezi sličnih trokuta ABC i $A'B'C'$ odnose se kao $3 : 4$. Ako su duljine stranica trokuta $A'B'C'$ $a' = 40\ \text{cm}$, $b' = 42\ \text{cm}$, $c' = 3.6\ \text{dm}$, kolike su duljine stranica trokuta ABC?

20. Jesu li slični nacrtani paralelogrami?

a)



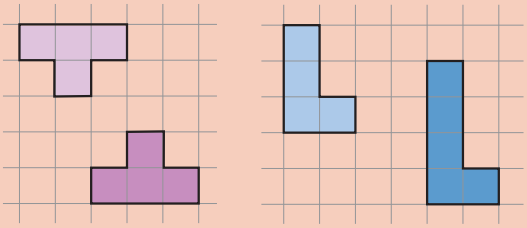
b)



21. Jesu li svi:
a) kvadrati **b)** pravokutnici
međusobno slični? Svoj odgovor obrazloži.

22. Jesu li slični mnogokuti nacrtani u kvadratnoj mreži?

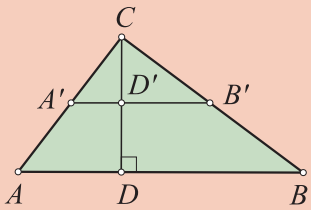
a) **b)**



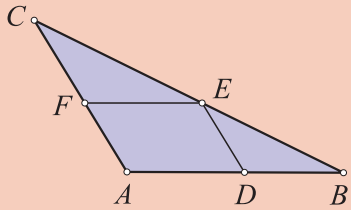
23. Koeficijent sličnosti jednakostraničnih trokuta ABC i $A'B'C'$ je $\frac{1}{7}$. Ako je duljina stranice manjeg trokuta ABC $5\ \text{cm}$, koliki je opseg trokuta $A'B'C'$?

24. Koeficijent sličnosti trokuta ABC i $A'B'C'$ je $\frac{3}{5}$. Ako je opseg manjeg trokuta ABC $120\ \text{cm}$, a duljine stranica su mu $a = 45\ \text{cm}$, $b = 39\ \text{cm}$, kolike su duljine stranica trokuta $A'B'C'$?

25. U trokutu ABC povučena je visina $\overline{CD}$ iz vrha C. Napiši sve parove sličnih trokuta ako je $\overline{AB} \| \overline{A'B'}$.



26. Napiši sve slične trokute koje vidiš na slici ako je $ED \| AC$, $EF \| AB$.



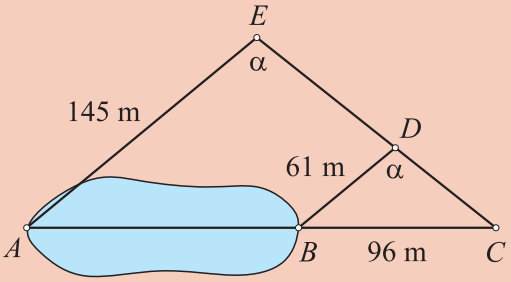
27. Jesu li trokuti ABC i $A'B'C'$ slični ako je:
a) $\alpha = 75°$, $b = 8\ \text{cm}$, $c = 20\ \text{cm}$, $\alpha' = 75°$, $b' = 6\ \text{cm}$, $c' = 15\ \text{cm}$
b) $\alpha = 62°$, $\beta = 48°$, $\alpha' = 62°$, $\beta' = 69°$?

28. Jesu li slični trokuti ABC i $A'B'C'$ ako je:

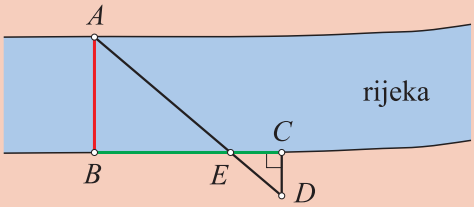
a) $|AC| = |CB|$, $\alpha = 35°$, $|A'C'| = |C'B'|$, $\gamma' = 110°$

b) $|AC| = |CB|$, $\alpha = 42°$, $|A'C'| = |C'B'|$, $\gamma' = 42°$?

29. Širina $\overline{AB}$ jezera ne može se izmjeriti. Zato su Zlatko i Zvonko označili i izmjerili stranice pomoćnih trokuta ACE i BCD (vidi sliku). Mogu li s pomoću tih pomoćnih trokuta izračunati duljinu $|AB|$?



30. Širina se rijeke ne može izmjeriti, ali se može izračunati s pomoću sličnosti. Prouči sliku i objasni kako se može izračunati širina rijeke koristeći dužine čije se duljine mogu izmjeriti.



31. Zgrada u jednom trenutku baca sjenu od 32 m. U istom trenutku prometni znak visine 2.5 m ima sjenu dugačku 3.6 m. Kolika je visina zgrade?

32. Stranice a i a' sličnih trokuta ABC i $A'B'C'$ odnose se kao $3 : 5$. Kolike su duljine tih stranica ako im je razlika 14 cm?

33. Opsezi o i o' sličnih trokuta ABC i $A'B'C'$ odnose se kao $7 : 11$. Njihov je zbroj 324 cm. Izračunaj opsege o i o'.

34. Konstruiraj trokut ABC ako je $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 60°$. Zatim konstruiraj njemu sličan trokut $A'B'C'$ ako je $a' : a = 3 : 2$.

35. Konstruiraj kvadrat sa stranicom $a = 4$ cm. Konstruiraj sličan kvadrat kojemu se stranica a' odnosi prema a kao:

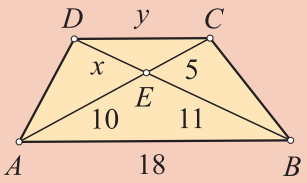
a) $1 : 2$ **b)** $2 : 5$ **c)** $5 : 3$ **d)** $7 : 5$.

36. Konstruiraj pravilni šesterokut sa stranicom $a = 2$ cm. Konstruiraj sličan šesterokut tako da se stranica a' odnosi prema a kao:

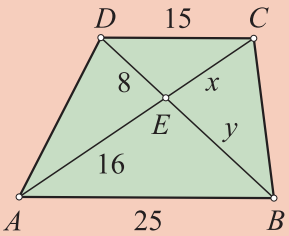
a) $2 : 1$ **b)** $2 : 3$.

37. Četverokut $ABCD$ je trapez, $\overline{AB} \| \overline{CD}$. Izračunaj nepoznate duljine x i y.

a)



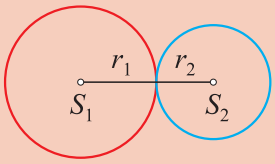
b)



38. Što vrijedi za $|S_1S_2|$?

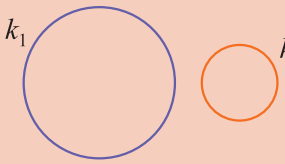
a) $|S_1S_2| = r_1 - r_2$ **b)** $|S_1S_2| = r_1 + r_2$

c) $|S_1S_2| < r_1 - r_2$

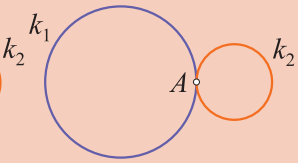


39. Kružnice k_1 i k_2 omeđuju krugove K_1 i K_2. Za svaki od navedenih položaja kružnice napiši čemu je jednak presjek krugova K_1 i K_2.

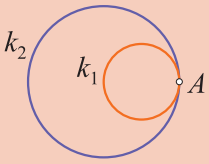
a)



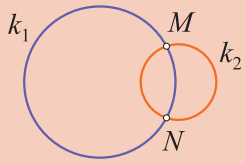
b)



c)



d)

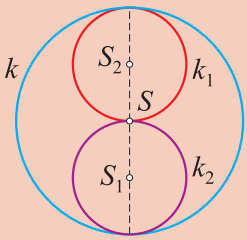


40. Prepiši u bilježnicu riječ koja odgovara istinitosti tvrdnje. Dvije kružnice s istim središtem nemaju zajedničkih točaka.

a) uvijek **b)** ponekad **c)** nikad

41. Lidija ima izrezane papirnate krugove čiji polumjeri su dugi 15 mm, 2 cm, 25 mm. Može li ih složiti tako da se dva i dva dodiruju izvana. Ako može, nacrtaj odgovarajuću sliku.

42. U krug su upisana dva sukladna kruga tako da se dodiruju u parovima. Duljina polumjera najvećeg kruga je 6 cm.



a) Kolike su duljine polumjera manjih krugova?

b) U kojem su omjeru opseg velikog kruga i zbroj opsega manjih krugova?

43. Nacrtaj kružnicu $k_1(A, r = 18\text{ mm})$. Gdje se nalaze središta svih kružnica polumjera 7 mm koje dodiruju kružnicu k_1:

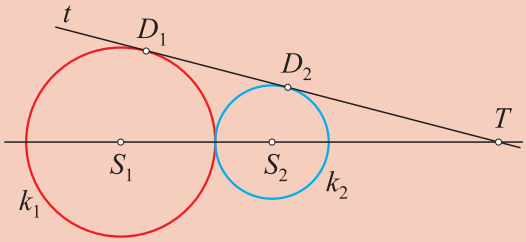
a) iznutra **b)** izvana?

Nacrtaj bar četiri kružnice koje k_1 dodiruju iznutra i bar 3 koje dodiruju k_1 izvana.

44. Kružnice $k_1(S_1, r_1 = 5\text{ cm})$ i $k_2(S_2, r_2 = 3\text{ cm})$ dodiruju se izvana. Povučen je pravac t koji je tangenta i na jednu i na drugu kružnicu.

a) Dokaži da su trokuti S_1D_1T i S_2D_2T slični.

b) Izračunaj $|S_1T|$.



45. Nacrtaj kvadrat $ABCD$ sa sjecištem dijagonala O i stranicom $a = 4\text{ cm}$. Rotiraj kvadrat oko O za $-45°$.

46. Nacrtaj tupokutan trokut ABC i rotiraj ga oko vrha C za $-45°$.

47. Konstruiraj trokut ako je zadano: $a = 3\text{ cm}$, $b = 2\text{ cm}$, $c = 4\text{ cm}$. Nacrtaj sliku trokuta ABC pri rotaciji za kut $\alpha = 30°$ oko vrha B.

48. U koordinatnom sustavu nacrtaj točke $A(3, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(-4, 1)$, $D(-5, -3)$ i rotiraj ih oko ishodišta za $-90°$.

49. Konstruiraj trokut ABC ako je $a = 4\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$, $\gamma = 60°$. Preslikaj ga centralnom simetrijom s obzirom na:

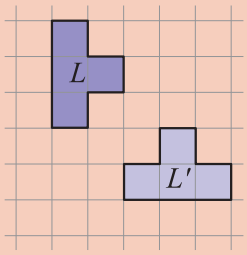
a) vrh A **b)** središte opisane kružnice.

50. Nacrtaj kružnicu $k(S, r = 2\text{ cm})$, a zatim ju translatiraj za vektor $\vec{v}$ koji odabereš po volji. Duljina vektora $\vec{v}$ je 3 cm. U kakvom su položaju te dvije kružnice?

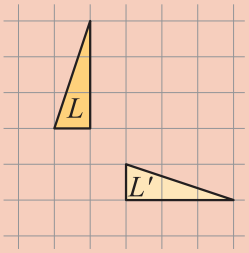
51. Nacrtaj u koordinatnom sustavu točke $A(3, 1)$, $B(5, 1)$, $C(4, 2)$, $D(3, 2)$. Četverokut $ABCD$ preslikaj osnom simetrijom s obzirom na pravac $x = 1$, a zatim ga translatiraj za vektor $\overrightarrow{MN}$ gdje su $M(0, 0)$, $N(0, 2)$.

52. Nađi kompoziciju dvaju preslikavanja kojima se lik L preslikava u lik L'.

a)



b)



ele-udzbenik.hr
U elektroničkoj inačici udžbenika pronađi više zadataka za uvježbavanje.

Jednostavni zadatci

1. Prepiši tablicu u bilježnicu i dopuni.

razmjer	vanjski članovi	unutarnji članovi
$4 : 5 = 12 : 15$	4 i 15	5 i 12
$10 : 49 = 20 : 98$		
	1 i 100	10 i 10
	a i y	b i x

2. Izračunaj nepoznati član razmjera:

a) $1 : 7 = x : 21$ **b)** $x : 10 = 80 : 100$

c) $x : 24 = 3 : 8$ **d)** $2 : 3 = 14 : x$.

3. Riješi jednadžbe:

a) $5 : (x - 1) = 15 : 12$

b) $(x + 2) : 3 = 15 : 9$.

4. Na parkiralištu ima 20 bijelih automobila i nepoznati broj tamnosivih. Omjer broja bijelih i broja tamnosivih je $2 : 3$. Koliko je tamnosivih automobila na parkiralištu?

5. Nacrtaj dužinu $\overline{CD}$ duljine 7 cm. S pomoću geometrijskog pribora podijeli je na:

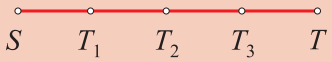
a) 5 **b)** 6

dijelova.

6. Nacrtaj dužinu $\overline{AB}$ duljine 8 cm. Točkom T podijeli je u omjeru:

a) $1 : 2$ **b)** $3 : 4$.

7. Dužina $\overline{ST}$ podijeljena je točkama T_1, T_2, T_3 na jednake dijelove.



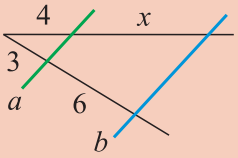
Izračunaj omjere:

a) $|ST_1| : |T_1T|$ **b)** $|ST_2| : |T_2T|$

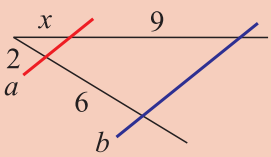
c) $|T_1T_2| : |T_2T|$ **d)** $|ST| : |ST_1|$.

8. Izračunaj nepoznatu duljinu x ako su pravci a i b usporedni.

a)



b)



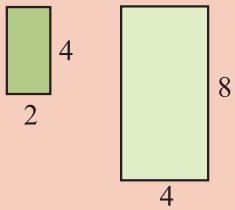
9. Trokuti ABC i $A'B'C'$ su slični. Prepiši u bilježnicu i popuni tablicu.

ABC	a b c	10 cm 8 cm 9 cm	12 dm	1 m 9 dm 8 dm
$A'B'C'$	a' b' c'	20 cm	4 dm 5 dm 5 dm	5 m

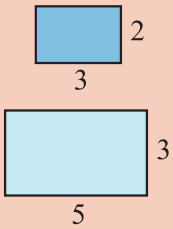
10. Koeficijent sličnosti je $k = 2$. U većem trokutu je $a = 26$ dm, $b = 22$ dm, a u manjem trokutu je $c' = 10$ dm. Izračunaj c, a' i b'.

11. Jesu li dva pravokutnika slična?

a)



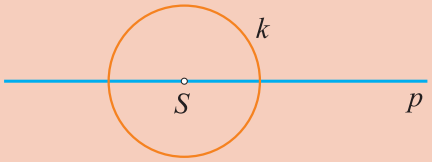
b)



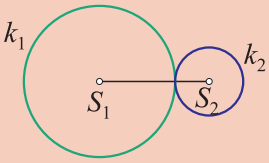
12. Neboder ima u jednom trenutku sjenu dugačku 80 m. U istom trenutku 150 cm visoka Jana ima sjenu dugačku 3 metra. Kolika je visina nebodera?

13. Nacrtaj točke S_1 i S_2 udaljene 5 cm. Zatim nacrtaj kružnice $k_1(S_1, 4\text{ cm})$, $k_2(S_2, 2\text{ cm})$. U kakvom su međusobnom položaju te kružnice?

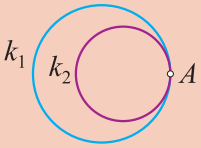
14. Nacrtana je kružnica $k(S, r = 3\text{ cm})$ i pravac p koji prolazi središtem S. Nacrtaj kružnicu k_2 čije središte je na pravcu p, a koja ne siječe kružnicu k.



15. Kružnice $k_1(S_1, r_1 = 2\text{ cm})$, $k_2(S_2, r_2 = 9\text{ mm})$ se dodiruju. Koliko je $r_1 + r_2$?



16. Što je presjek kružnica k_1 i k_2?



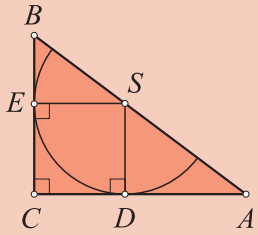
Složeniji zadatci

1. Trokuti ABC i $A'B'C'$ su slični s koeficijentom $k = \frac{a'}{a}$. Iz točke C povučena je visina na stranicu $\overline{AB}$, a iz točke C' visina na stranicu $\overline{A'B'}$. Dokaži da je $\frac{v'_c}{v_c} = k$.

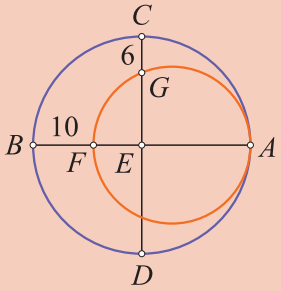
2. Paralelne stranice trapeza iznose 36 cm i 32 cm, a visina je 18 cm. Krakovi su produljeni do svojeg sjecišta S. Kolika je udaljenost točke S do dulje osnovice trapeza?

3. U trokutu ABC zadano je $a = 40$, $b = 30$, $\alpha - \beta = 90°$. Kolika je duljina stranice $\overline{AB}$?

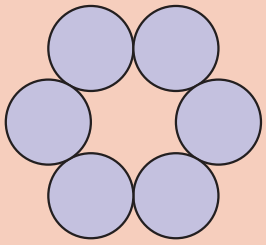
4. U pravokutni je trokut upisana kružnica čije središte je na hipotenuzi i koja dira obje katete. Središte kružnice je do točaka A i B udaljeno 40 cm i 30 cm. Izračunaj polumjer kružnice.



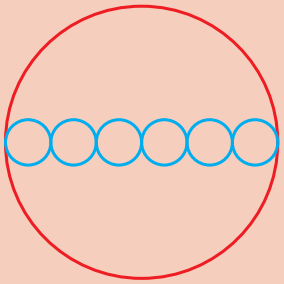
5. Dvije kružnice dodiruju se iznutra u točki A. Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ su dva međusobno okomita promjera veće kružnice. Ujedno je $|BF| = 10$ cm, $|CG| = 6$ cm. Koliki su polumjeri tih kružnica?



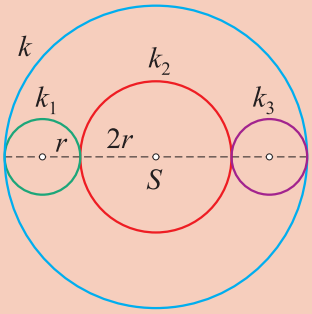
6. Maja je na jednom plakatu uočila ovakav motiv sa 6 sukladnih krugova. Željela ga je nacrtati u svoju bilježnicu. Kako to može učiniti?



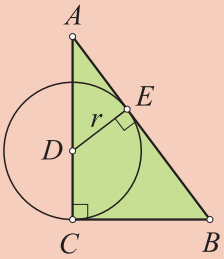
7. U kružnicu polumjera r upisano je 6 sukladnih kružnica koje se međusobno dodiruju kao na slici. Dokaži da je zbroj duljina malih kružnica jednak duljini velike kružnice.



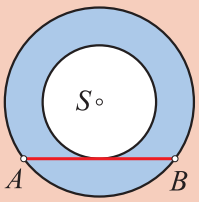
8. Kružnice na slici se dodiruju. Izračunaj omjer površine najvećeg kruga i zbroja površina triju manjih krugova.



9. U pravokutnom su trokutu ABC katete dugačke $a = 24$ cm, $b = 32$ cm. Nacrtana je kružnica kojoj je središte na kateti $\overline{AC}$, dodiruje hipotenuzu $\overline{AB}$ i prolazi točkom C. Koliki je polumjer te kružnice?

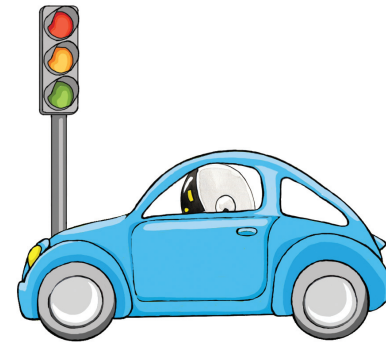


10. Zadani su kružni vijenac i dužina $\overline{AB}$ koja dira manju kružnicu. Kolika je površina kružnog vijenca ako je $|AB| = 4$?



6.9. SEMAFOR

U bilježnicu riješi zadatke i pokraj svakog zadatka nacrtaj krug. Krug oboji zelenom bojom ako zadatak u potpunosti razumiješ i točno je riješen. Žutom bojom oboji krug kraj zadatka za koji smatraš da još trebaš vježbati ili ako rezultat zadatka nije točan, a crvenom bojom ako ne znaš kojim postupkom riješiti zadatak.



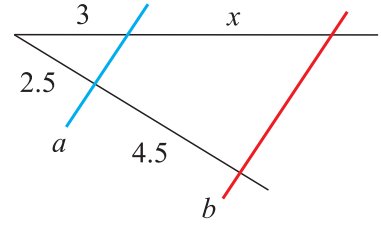
Zadatci

1. Riješi jednadžbu $(2x+1):3=(3x-1):4$.

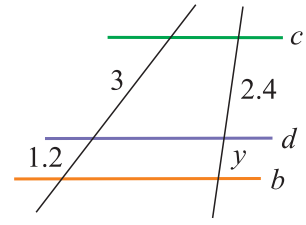
2. Na parkiralištu se nalazi 12 bijelih automobila. Omjer broja bijelih i automobila koji nisu bijeli je $3:5$. Koliko na parkiralištu ima automobila?

3. Nacrtaj dužinu $\overline{MN}$ duljine 5.8 cm. Točkom T je podijeli u omjeru $2:3$ računajući od točke M.

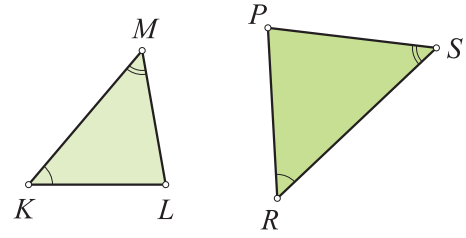
4. Pravci a i b su usporedni. Izračunaj duljinu x.



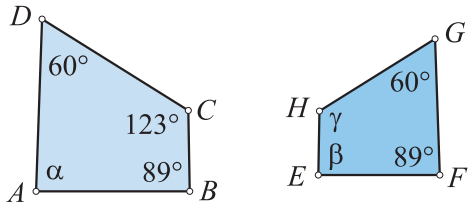
5. Izračunaj duljinu y ako su pravci b, c i d usporedni.



6. Trokuti na slici su slični. Zapiši tu tvrdnju matematičkim simbolima.

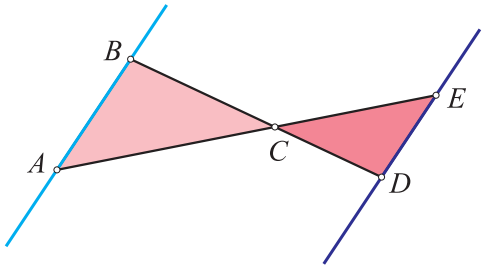


7. Na slici su dva slična četverokuta. Izračunaj veličine kutova α, β i γ.



8. Duljine stranica većeg trokuta su 21 cm, 28 cm i 25 cm. Kolike su duljine stranica manjeg sličnog trokuta ako je koeficijent sličnosti $k = \frac{7}{5}$?

9. Pravci AB i ED su usporedni. Jesu li trokuti ABC i EDC slični? Odgovor obrazloži.



10. Nacrtaj kružnicu $k_1(S_1, r_1 = 2.3\text{ cm})$ i na njoj označi točku B. Nacrtaj kružnicu $k_2(S_2, r)$ koja izvana dodiruje kružnicu k_1 u točki B.

11. Konstruiraj tupokutni trokut ABC ako je $\alpha = 120°$, $c = 3\text{ cm}$, $b = 2.5\text{ cm}$. Rotiraj ga oko vrha A za kut $60°$.

Za svaki zeleno obojeni krug osvajaš 2 boda, za svaki žuti krug 1 bod, a za crveni 0 bodova.

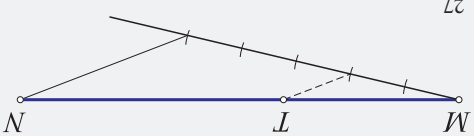
Intervali bodova

0 – 11:	Riješi još zadataka. Nemoj se obeshrabriti!
12 – 18:	Uvježbaj gradivo kako bi tvoja ocjena bila koeficijent sličnosti za trokute kojima je $a = 30\text{ cm}$, $a' = 6\text{ cm}$.
19 – 22:	Geometrija je baš super, zar ne?

Rješenja zadataka:

1. $x = 7$ **2.** Ima 32 automobila.

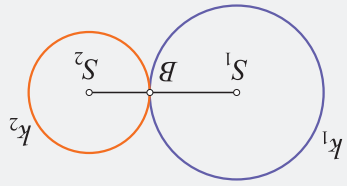
3.



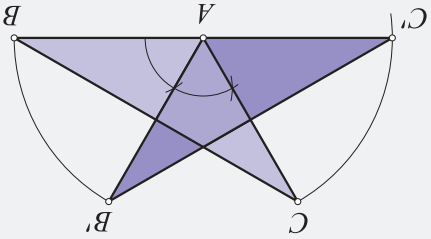
4. $x = \frac{27}{5}$. **5.** $y = 0.96$. **6.** $\triangle KLM \sim \triangle RPS$. **7.** $\alpha = 360° - (60° + 123° + 89°) = 88°$, $\beta = 88°$, $\gamma = 123°$.

8. $a' = 15\text{ cm}$, $b' = 20\text{ cm}$, $c' = \frac{125}{7} = 17\frac{6}{7}\text{ cm}$. **9.** Prema poučku o presječnici $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CED$. Kutovi $\sphericalangle BCA$ i $\sphericalangle ECD$ su sukladni jer su vršni. Prema K-K poučku o sličnosti ti su trokuti slični.

10.



11.



7 Geometrijska tijela – prizma i valjak

Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- prostoručno skicirati uspravne prizme i valjke u ravnini (kocka, kvadar, pravilna četverostrana prizma, valjak)
- matematičkim jezikom opisati prizmu i valjak
- na crtežu skicirati i matematičkim jezikom opisati elemente prizme i valjka (plošna i prostorna dijagonala, visina tijela, polumjer i promjer baze, izvodnice)
- prema modelu uspravnoga geometrijskog tijela opisati plohe koje ga omeđuju i na osnovi toga izraditi mrežu tijela koja je potrebna za određivanje njegova oplošja
- izrađivati modele uspravnih prizmi i valjka
- promatrati tijela koja te okružuju, imenovati ih, opisivati, analizirati i crtati njihove mreže
- opisivati oplošje i volumen nacrtane prizme i valjka
- oplošje povezati s mrežom geometrijskoga tijela
- uočavati i opisivati elemente prizmi i valjaka i veze među njima
- objašnjavati volumen kao mjeru prostora koje zauzima tijelo
- primjenjivati računanje oplošja i volumena prizmi i valjka u problemskim situacijama
- analizirati problemsku situaciju i zapisati ju linearnom i kvadratnom jednadžbom
- koristiti se površinom, oplošjem, volumenom, Pitagorinim poučkom za računanje nepoznatih elemenata prizme i valjka
- preračunavati mjerne jedinice za duljinu, masu, volumen, površinu
- odabirati odgovarajuću mjernu jedinicu pri rješavanju problema
- stvarati nove uratke i ideje složenije strukture
- kritički promišljati i vrednovati ideje uz pomoć učitelja
- procijeniti i odabrati potrebne među pronađenim informacijama
- izražavati se kreativno služeći se primjerenom tehnologijom za stvaranje ideja i razvijanje planova te primjenjivati različite načine poticanja kreativnosti
- samovrednovati proces učenja i svoje rezultate, procijeniti ostvareni napredak te na temelju toga planirati buduće učenje.

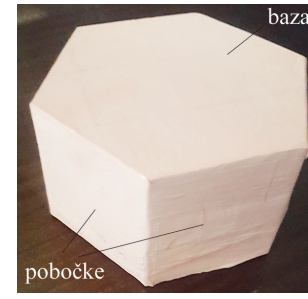
U ovom ćeš poglavlju saznati što je:

- prizma
- baze i vrhovi prizme
- pobočke i pobočje prizme
- plošna i prostorna dijagonala prizme
- dijagonalni presjek prizme
- oplošje i volumen prizme
- valjak
- baze i plašt valjka
- visina i izvodnice valjka
- osni presjek valjka
- oplošje i volumen valjka.

7.1. Prizme

Promotrimo geometrijska tijela na slici. Što im je zajedničko, a u čemu se razlikuju?
Zajedničko im je svojstvo da su sva tijela omeđena mnogokutima. Razlikuju se po vrsti i dimenzijama tih mnogokuta.

Primjećujemo kako se među mnogokutima dva ističu – sukladni su i usporedni. Nazivamo ih **baze** ili **osnovke**. Ostale plohe su pravokutnici. Nazivamo ih **pobočke** ili **pobočne strane**.
Ovakva geometrijska tijela nazivamo uspravne prizme.



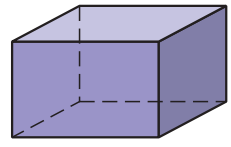
Uspravna prizma

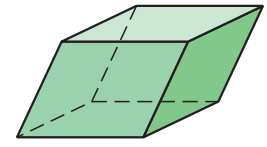
Uspravna prizma je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim n-terokutima i s n pravokutnika.

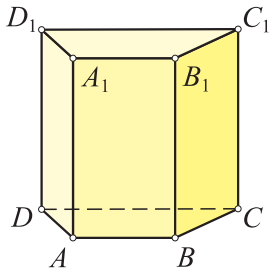
Prizme razlikujemo po vrsti mnogokuta koji su joj baze.

baza	trokut	četverokut	peterokut	...	n-terokut
prizma	trostrana	četverostrana	peterostrana	...	n-terostrana

Osim uspravnih postoje i kose prizme. Mi ćemo proučavati samo uspravne prizme, pa ćemo nadalje izostavljati riječ "uspravna".


uspravna prizma


kosa prizma

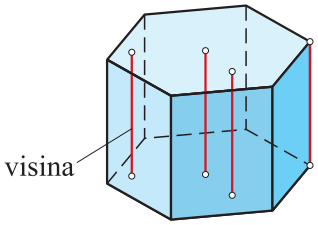


Stranice baze nazivaju se **osnovni bridovi**. Stranice pobočki koje nisu stranice baze nazivaju se **pobočni bridovi**. Sve pobočke čine **pobočje** prizme. Vrhovi obiju baza nazivaju se **vrhovi prizme**.

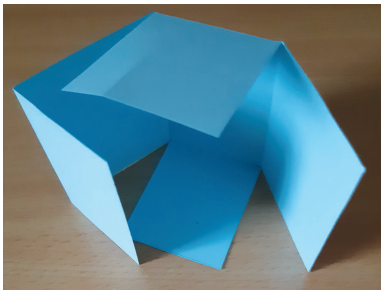
U prizmi $ABCDA_1B_1C_1D_1$ na slici osnovni bridovi su:
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$, $\overline{D_1A_1}$.
Pobočni bridovi su: $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$.

Kod uspravne je prizme, pobočni brid ujedno i **visina** prizme.

Općenito, visina je prizme dužina povučena iz bilo koje točke jedne baze okomito do ravnine u kojoj leži druga baza.



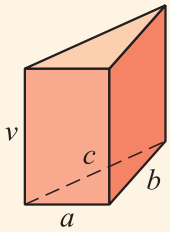
Ako je baza uspravne prizme pravilni mnogokut, nazivamo je **pravilna** prizma. Kocka je primjer pravilne četverostrane prizme.



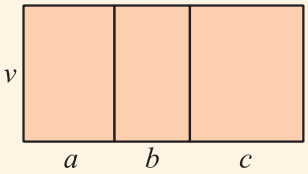
Zamislimo da smo danu prizmu razrezali po nekim bridovima tako da se baze i sve pobočke mogu položiti u ravninu. Lik koji dobivamo naziva se **mreža** prizme.

Primjer 1.

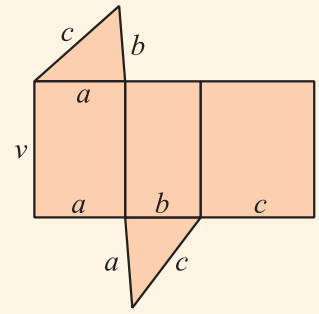
Na slici je prikazana trostrana prizma. Nacrtajmo joj mrežu ako je $a = 1.2$ cm, $b = 1$ cm, $c = 1.5$ cm, $v = 1.8$ cm.



Rješenje: Mrežu čine dva trokuta i tri pravokutnika. Prvo crtamo pobočje, tj. tri pravokutnika s jednakom stranicom v.



Potom crtamo baze, po jednu na nasuprotnim stranicama pravokutnika koje nisu dugačke v.



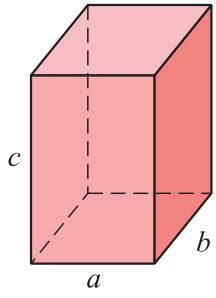
Dvije posebno značajne prizme već smo proučili i dobro su nam poznate. To su kocka i kvadar.

Kvadar i kocka

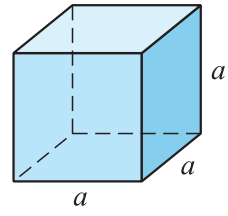
Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik.

Kocka je pravilna četverostrana prizma kojoj su svi bridovi jednake duljine.

Jasno je da je kocka vrsta kvadra. Kocka je kvadar kojemu je baza kvadrat i bočni bridovi su jednako dugi kao i osnovni bridovi.



kvadar

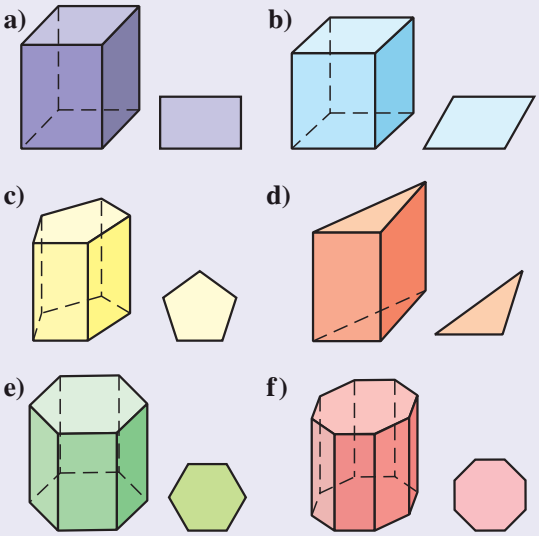


kocka

Kvadar je omeđen pravokutnicima, a kocka je omeđena sa 6 sukladnih kvadrata.

Zadatci 7.1.

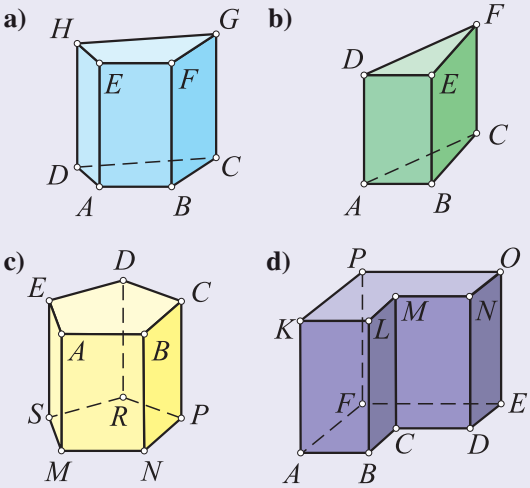
1. Na slikama su prizme i pogled na njih odozgo. Koji su nazivi tih prizmi?



2. Precrtaj u bilježnicu pa ispuni.

naziv prizme	baza	broj strana	broj vrhova
osmerostrana			
	trokut		
		6	
			24
		7	

3. Na slikama su prizme. Ispiši njihove vrhove, osnovne bridove i pobočne bridove.



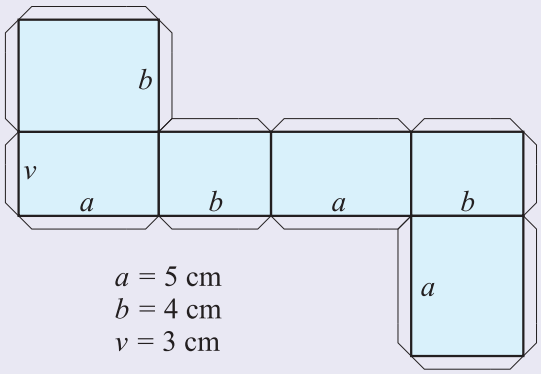
4. Nacrtaj mrežu trostrane prizme kojoj je duljina visine $v = 2$ cm, a baza je trokut sa stranicama 3 cm, 4 cm, 4.2 cm.

5. Nacrtaj mrežu četverostrane prizme kojoj je baza:

a) romb **b)** kvadrat **c)** paralelogram.

Dimenzije odaberi po volji.

6. Iskoristi model mreže i nacrtaj je na papiru prema zadanim dimenzijama. Izreži mrežu i napravi prizmu. Uoči da su na rubovima dodatci kako bi se papir mogao zalijepiti.



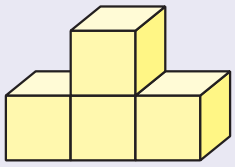
$a = 5$ cm
$b = 4$ cm
$v = 3$ cm

7. Nacrtaj mrežu pravilne:

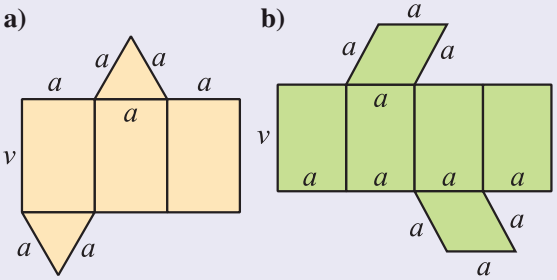
a) trostrane **b)** četverostrane

prizme s osnovnim bridom duljine 1.8 cm i visinom $v = 2.1$ cm.

8. Mira je od jediničnih kockica napravila tijelo kao na slici i ustvrdila: "Napravila sam osmerostranu prizmu." Slažeš li se s njezinom tvrdnjom? Kad bi to bila prizma, što bi joj bile baze?



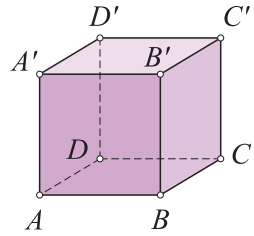
9. Koja od mreža nije mreža pravilne prizme?

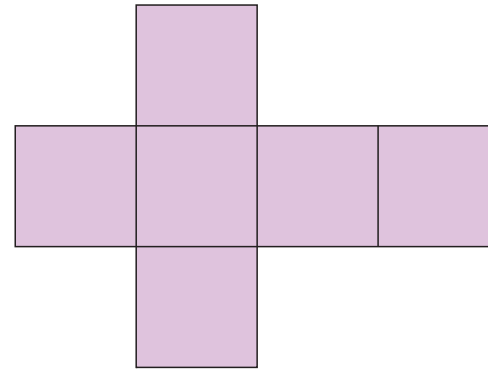


7.2. Kocka

Kocka

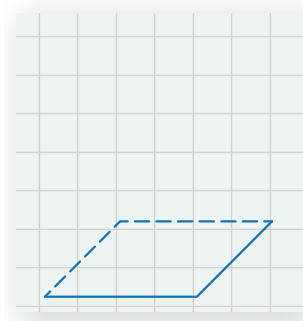
Kocka je pravilna četverostrana prizma kojoj su svi bridovi jednake duljine.



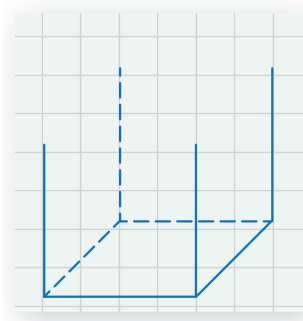


Sve strane kocke su kvadrati. Desno je dana jedna mreža kocke.

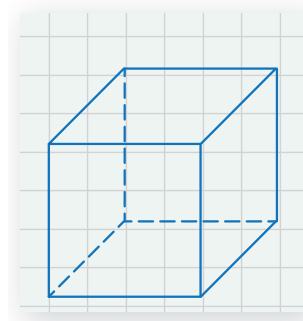
Kako nacrtati kocku?



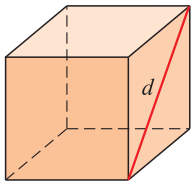
Nacrtamo paralelogram. Dvije stranice mu crtamo isprekidanom linijom. Vodoravna stranica dugačka je koliko i brid kocke.



U svakom vrhu paralelograma povučemo okomite bridove dugačke kao brid kocke.



Spojimo krajeve nacrtanih okomica. Bridovi koji su nevidljivi crtaju se isprekidanom linijom što ostavlja dojam trodimenzionalnosti.

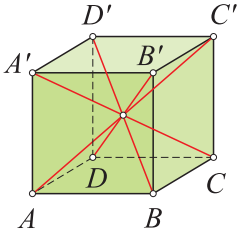


Kocka je omeđena sa šest sukladnih kvadrata. Dijagonale tih kvadrata nazivaju se **plošne dijagonale** kocke.

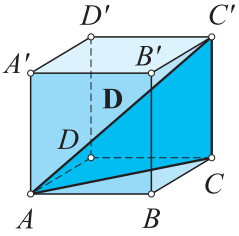
Budući da se radi o dijagonali kvadrata, njezina duljina je

$$d = a\sqrt{2},$$

gdje je a duljina brida kocke.



Prostorna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva vrha kocke što ne leže na istoj strani. Uz oznake kao na gornjoj slici, prostorne dijagonale su $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{CA'}$ i $\overline{DB'}$. One se sijeku u jednoj točki.



$\overline{AC'}$ je prostorna dijagonala kocke, a $\overline{AC}$ plošna dijagonala kocke.

Uočimo u kocki pravokutni trokut ACC' za čije stranice vrijedi: $|CC'| = a$, $|AC| = a\sqrt{2}$ i $|AC'| = D$. Primjenom Pitagorina poučka slijedi:

$$|AC'|^2 = |AC|^2 + |CC'|^2$$
$$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$$
$$D^2 = 2a^2 + a^2$$
$$D^2 = 3a^2$$
$$D = a\sqrt{3}.$$

Duljina plošne i prostorne dijagonale kocke

Duljina d plošne dijagonale kocke dana je formulom $d = a\sqrt{2}$, a duljina D prostorne dijagonale kocke dana je formulom $D = a\sqrt{3}$, pri čemu je a duljina brida kocke.

Primjer 1.

Izračunaj duljinu brida kocke kojoj je prostorna dijagonala duljine $16\sqrt{3}$ cm.

Rješenje: Iz $D = a\sqrt{3}$ slijedi $a = \dfrac{D}{\sqrt{3}}$, pa je $a = \dfrac{16\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 16$ cm.

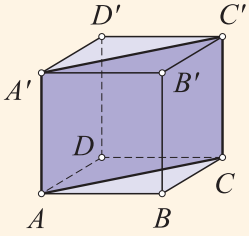
Primjer 2.

Dijagonalni presjek kocke je presjek kocke ravninom koja sadrži dvije paralelne plošne dijagonale.

Kolika je duljina brida kocke čiji dijagonalni presjek ima površinu $36\sqrt{2}$ cm^2?

Rješenje: Dijagonalni presjek kocke je pravokutnik $ACC'A'$ sa stranicama duljine a i $a\sqrt{2}$, a njegova je površina $P = a \cdot a\sqrt{2}$, tj. $P = a^2\sqrt{2}$.

U ovom zadatku imamo: $P = 36\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$, $a^2 = 36$, $a = 6$ cm. Duljina brida kocke je 6 cm.

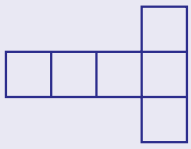


Zadatci 7.2.

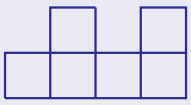
1. Koliko vrhova, bridova i strana ima kocka?

2. Koje od slika prikazuju mrežu kocke?

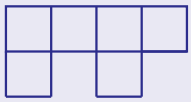
a)



b)

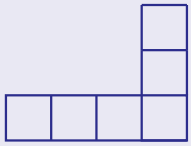


c)

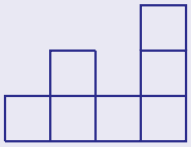


d)

e)



f)



3. Nacrtaj kocku čija je duljina brida:

a) 2 cm **b)** 2.5 cm

c) 3 cm **d)** 27 mm.

4. Nacrtaj mrežu kocke čija je duljina brida:

a) 2 cm **b)** 2.5 cm.

5. Izračunaj duljinu plošne i prostorne dijagonale kocke ako je duljina brida:

a) 4 cm **b)** 6.4 dm

c) $\frac{3}{4}$ cm **d)** $\frac{20}{7}$ cm.

6. Prepiši tablicu i dopuni ju. Elementi a, d i D su elementi kocke.

a	d	D
$\sqrt{2}$ cm		
	$4\sqrt{2}$ dm	
		$6\sqrt{3}$ m
$5\sqrt{3}$ cm		
	12 cm	
		$9\sqrt{6}$ dm

7. Spoji kartice na kojima je duljina stranice i duljina prostorne dijagonale kocke. Neke od kartica nemaju svoj par.

12 cm | $14\sqrt{3}$ m | $9\sqrt{2}$ dm | 9 dm | $9\sqrt{3}$ dm | 14 m | $12\sqrt{3}$ cm | $12\sqrt{3}$ dm | 14 dm

8. Izračunaj duljinu prostorne dijagonale kocke ako je duljina plošne dijagonale:

a) $8\sqrt{2}$ cm **b)** $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ cm

c) 12 dm **c)** 44 mm.

9. Soba ima oblik kocke duljine brida 4 m. Mrav se kreće po bridovima sobe od jednog vrha do njemu najudaljenije točke sobe, dok je bubamara preletjela put od tog vrha do njemu najudaljenije točke sobe. Za koliko je metara duži put kojim se kreće mrav od puta koji je preletjela bubamara?

10. Akvarij ima oblik kocke čiji je brid dugačak 65 cm. Koliku najveću udaljenost može preplivati ribica kad pliva pravocrtno?

11. Kolika je površina dijagonalnog presjeka kocke duljine brida:

a) $a = 9$ cm **b)** $a = 32$ cm

c) $a = 8\sqrt{2}$ cm **d)** $a = 0.5\sqrt{2}$ dm?

12. Izračunaj duljinu brida kocke ako je površina dijagonalnog presjeka:

a) $P = 100\sqrt{2}\ \text{cm}^2$ **b)** $P = 144\sqrt{2}\ \text{cm}^2$

c) $P = 300\sqrt{2}\ \text{dm}^2$ **d)** $P = 800\sqrt{2}\ \text{mm}^2$.

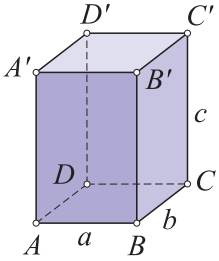
13. Prepisujući kratak matematički tekst, Matea je učinila nekoliko pogrešaka. Popravi tekst ako znaš da je prva rečenica točna.

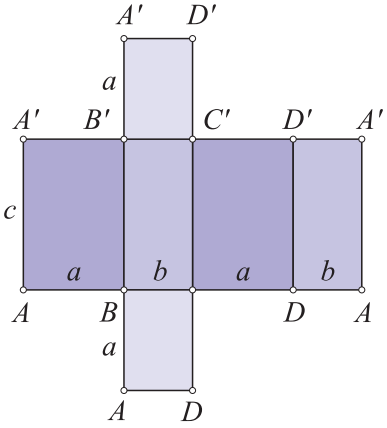
Duljina brida kocke je 6 cm. Duljina njezine prostorne dijagonale je $6\sqrt{2}$ cm, a plošne $6\sqrt{3}$ cm. Kad bi se duljina brida povećala četiri puta, tada bi se duljina plošne dijagonale povećala četiri puta, a prostorne 16 puta.

7.3. Kvadar

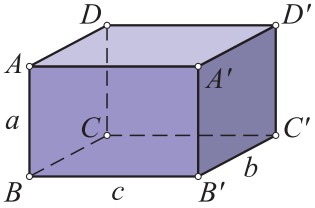
Kvadar

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik.



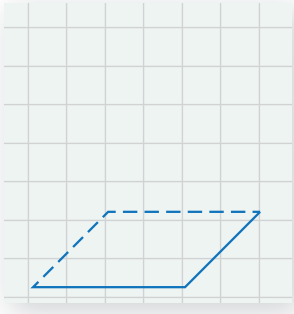


Ako duljine bridova kvadra iz jednog vrha označimo s a, b i c, strane kvadra su pravokutnici, i to: dva sukladna pravokutnika duljine stranica a i b, dva pravokutnika duljine stranica a i c te dva pravokutnika duljine stranica b i c.

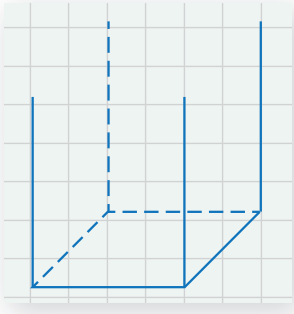


Svaka se strana kvadra može smatrati bazom. U gornjem kvadru baza je pravokutnik $ABCD$, a visina je $\overline{AA'}$. Položimo li gornji kvadar na stranu $BCC'B'$, dobivamo opet kvadar čijom bazom smatramo pravokutnik $BCC'B'$ dimenzija $c \times b$, a visine $\overline{AB}$, $|AB| = a$.

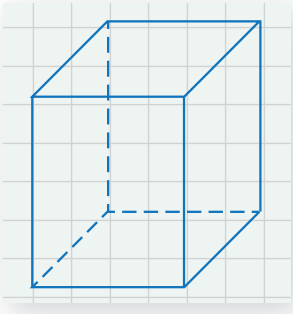
A mogli smo kvadar položiti i na neku drugu stranu. Evo kako crtamo kvadar.



Crtež baze je paralelogram kojemu su dvije stranice nacrtane isprekidanom linijom. Vodoravne dužine su dugačke a, dok su druge dvije stranice kraće od b.

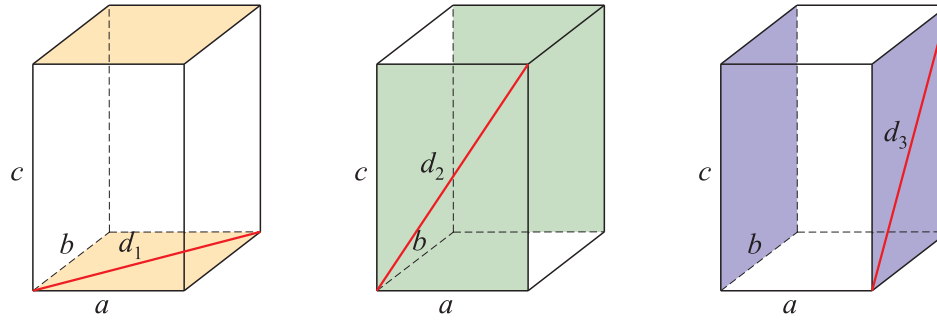


U vrhovima paralelograma nacrtajmo okomice koje su dugačke c.



Spojimo vrhove gornje baze. Bridovi koji su nevidljivi crtaju se isprekidanom linijom što ostavlja dojam trodimenzionalnosti.

Dijagonale pravokutnika koji omeđuju kvadar nazivamo **plošne dijagonale kvadra.**

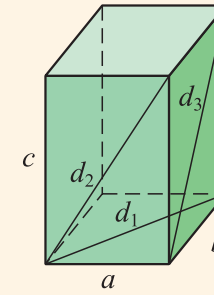


Duljine plošnih dijagonala redom su: $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$, $d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Primjer 1.

U kvadru su duljine bridova iz jednog vrha $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 24$ cm. Izračunajmo duljine svih plošnih dijagonala kvadra.

Rješenje:



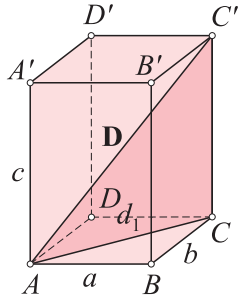
$a = 6$ cm
$b = 8$ cm
$c = 24$ cm
$d_1,\ d_2,\ d_3 = ?$

$d_1^2 = a^2 + b^2$ $\quad$ $d_2^2 = a^2 + c^2$ $\quad$ $d_3^2 = b^2 + c^2$

$d_1^2 = 6^2 + 8^2$ $\quad$ $d_2^2 = 6^2 + 24^2$ $\quad$ $d_3^2 = 8^2 + 24^2$

$d_1^2 = 100$ $\quad$ $d_2^2 = 612$ $\quad$ $d_3^2 = 640$

$d_1 = 10$ cm $\quad$ $d_2 = \sqrt{612} = 6\sqrt{17}$ cm $\quad$ $d_3 = \sqrt{640} = 8\sqrt{10}$ cm.



Prostorna dijagonala kvadra je dužina koja spaja dva vrha što ne leže na istoj plohi kvadra. Kvadar ima četiri prostorne dijagonale.

Uočimo pravokutni trokut ACC' duljine stranica: $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, c i D. Tada primjenom Pitagorina poučka dobijemo:

$$D^2 = c^2 + d_1^2$$
$$D^2 = c^2 + (a^2 + b^2), \quad \text{te je}$$
$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Prostorna dijagonala kvadra

Ako su a, b i c duljine bridova kvadra iz jednog vrha, duljina prostorne dijagonale kvadra dana je formulom:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Primjer 2.

Duljina prostorne dijagonale kvadra je 130 cm, a dva brida su dugačka 30 cm i 40 cm. Kolika je duljina trećeg brida?

Rješenje:

$D = 130\text{ cm}$
$a = 30\text{ cm}$
$b = 40\text{ cm}$
$c = ?$

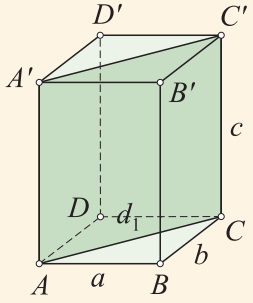
$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$
$c^2 = D^2 - a^2 - b^2$
$c^2 = 130^2 - 30^2 - 40^2$

$c^2 = 14\,400$
$c = \sqrt{14\,400}$
$c = 120\text{ cm}.$

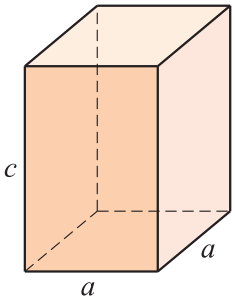
Duljina trećeg brida je 120 cm.

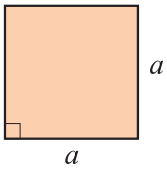
Primjer 3.

Bridovi $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ kvadra dugi su 10 cm i 24 cm. Izračunaj duljinu brida $\overline{AA'}$ ako je dijagonalni presjek dijagonalom baze $ABCD$ kvadrat.



Rješenje: **Dijagonalni presjek** kvadra je presjek kvadra ravninom koja je okomita na neku stranu kvadra i sadrži dijagonalu te strane. Općenito, dijagonalni presjek kvadra je pravokutnik.
U ovom je primjeru dijagonalni presjek kvadrat $ACC'A'$.
Slijedi da je $|AA'| = |AC|$, tj. $|AA'| = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26\text{ cm}$.
Duljina trećeg brida kvadra je 26 cm.





baza pravilne četverostrane prizme

Među kvadrima ističe se ona skupina kvadara čije su baze kvadrati. Takva se tijela nazivaju **pravilne četverostrane** prizme ili **kvadratne** prizme.

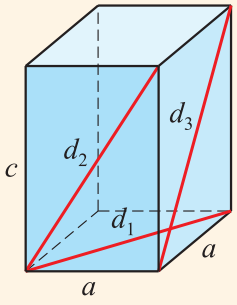
Primjer 4.

Izračunajmo duljine svih plošnih dijagonala pravilne četverostrane prizme kojoj je duljina brida baze $a = 4.2\text{ cm}$, a visina prizme i osnovni brid se odnose kao $3 : 1$.

Rješenje:

$a = 4.2\text{ cm}$
$c : a = 3 : 1$
$c,\ d_1,\ d_2,\ d_3 = ?$

$c = 3a,\ c = 3 \cdot 4.2,\ c = 12.6\text{ cm}$



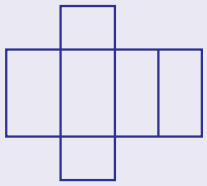
Duljina d_1 plošne dijagonale baze je $d_1 = a\sqrt{2}$ (jer je baza kvadrat), $d_1 = 4.2\sqrt{2}\text{ cm}$.

$d_2 = d_3 = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{176.4} = 4.2\sqrt{10}\text{ cm}.$

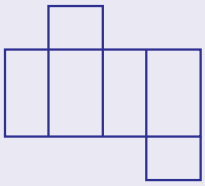
Zadatci 7.3.

1. Koje od slika prikazuju mrežu kvadra?

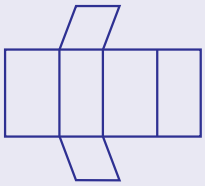
a)



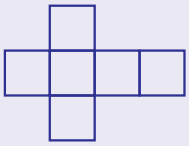
b)



c)



d)



2. Nacrtaj mrežu kvadra ako su mu zadane duljine bridova:

a) $a = 4.5\text{ cm}$, $b = 4\text{ cm}$, $c = 3\text{ cm}$

b) $a = 3.3\text{ cm}$, $b = 19\text{ mm}$, $c = 24\text{ mm}$

c) $a = 0.21\text{ dm}$, $b = 1.8\text{ cm}$, $c = 12\text{ mm}$.

3. Napravi model kvadra s bridovima duljine 4 cm, 6 cm, 12 cm.

4. Nacrtaj kvadar kojemu baza ima dimenzije $3\text{ cm} \times 2.9\text{ cm}$, a visina je duljine 1.5 cm.

5. Nacrtaj kvadar čiji bridovi iz jednog vrha su duljina 2 cm, 2.9 cm, 1.8 cm.

6. Prepiši u bilježnicu i spoji dimenzije kvadra s duljinom njegove prostorne dijagonale.

$a = 4\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$, $c = 12\text{ cm}$	$D = 3\sqrt{3}\text{ dm}$
$D = 17\text{ cm}$	1 dm x 1 dm x 5 dm
$a = 24\text{ dm}$, $b = 6\text{ dm}$, $c = 84\text{ dm}$	$D = 13\text{ cm}$
$D = 26\text{ dm}$	$a = 15\text{ cm}$, $b = 4\sqrt{3}\text{ cm}$, $c = 4\text{ cm}$

7. Prepiši i popuni tablicu za kvadar.

a	12 cm	10 cm	
b	16 cm	15 cm	8 m
c	48 cm		8 m
D		35 cm	
d_1			$4\sqrt{5}$ m
d_2			
d_3			

8. Zadana je duljina jedne plošne dijagonale kvadra i duljina brida koji ne pripada strani čija je plošna dijagonala dana. Izračunaj duljinu prostorne dijagonale kvadra ako je:

a) $d_1 = 40\text{ cm}$, $c = 96\text{ cm}$

b) $d_2 = 30\text{ cm}$, $a = 16\text{ cm}$

c) $d_3 = 26\text{ dm}$, $b = 168\text{ dm}$.

9. Izračunaj duljinu prostorne dijagonale kvadra čije plošne dijagonale su duge 30 cm, 26 cm i $\sqrt{86}\text{ cm}$.

10. Izračunaj duljinu prostorne dijagonale kvadra ako su duljine plošnih dijagonala:

a) $d_1 = 16\text{ cm}$, $d_2 = 10\text{ cm}$, $d_3 = 6\text{ cm}$

b) $d_1 = 4\text{ dm}$, $d_2 = 30\text{ cm}$, $d_3 = 3\text{ dm}$.

11. Baza kvadra je kvadrat duljine stranice 8 cm. Izračunaj duljinu visine kvadra ako je duljina prostorne dijagonale 12 cm.

12. Baza kvadra je kvadrat površine 144 mm^2. Izračunaj duljinu visine kvadra ako je duljina prostorne dijagonale 18 mm.

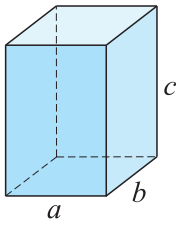
13. Baza kvadra je kvadrat. Dijagonalni presjek kvadra je također kvadrat površine 288 cm^2. Izračunaj duljine bridova kvadra.

14. Mrav i bubamara su iz sobe oblika kocke (vidi zadatak 9. u prethodnoj lekciji) prešli u sobu oblika kvadra. Visina sobe je 2.6 m, a pod ima dimenzije $3.4\text{ m} \times 4.1\text{ m}$. Mrav se opet kreće po rubovima sobe, a bubamara leti pravocrtno iz jednog kuta sobe do najudaljenije točke sobe. Za koliko je metara dulji put kojim se kreće mrav od bubamarinog leta?

15. Izmjeri dimenzije svoje sobe ili neke druge prostorije koja ima oblik kvadra. Kolike su duljine plošnih dijagonala sobe?

7.4. Oplošje kvadra

Oplošje bilo kojeg **geometrijskog tijela** je zbroj površina svih ploha kojima je to tijelo omeđeno.



Strane kvadra tri su para međusobno sukladnih pravokutnika, pa ako su a, b, c duljine bridova, oplošje je kvadra jednako

$$O = 2ab + 2bc + 2ac.$$

Oplošje kvadra

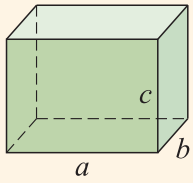
Ako su a, b i c duljine bridova kvadra iz istog vrha, tada je oplošje kvadra jednako

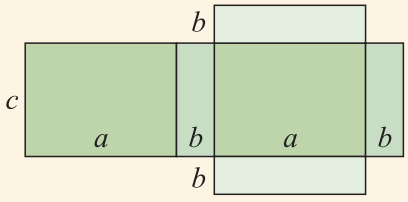
$$O = 2ab + 2ac + 2bc.$$

Primjer 1.

Nacrtajmo mrežu i izračunajmo oplošje kvadra kojemu su duljine bridova iz jednog vrha $a = 2\text{ cm}$, $b = 0.5\text{ cm}$, $c = 1.5\text{ cm}$.

Rješenje:





Oplošje kvadra je površina mreže kvadra.

$$O = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot 2 \cdot 0.5 + 2 \cdot 2 \cdot 1.5 + 2 \cdot 0.5 \cdot 1.5$$
$$= 2 + 6 + 1.5 = 9.5\text{ cm}^2.$$

Kocka je vrsta kvadra u kojem je $a = b = c$. Ona je omeđena sa šest kvadrata, pa je njezino oplošje $O = 6a^2$.

Oplošje kocke

Ako je duljina brida kocke jednaka a, oplošje kocke jednako je $O = 6a^2$.

Primjer 2.

Izračunajmo oplošje kocke kojoj je prostorna dijagonala duga $20\sqrt{6}\text{ cm}$.

Rješenje: Iz $D = a\sqrt{3}$ slijedi $a = \dfrac{D}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{2}\text{ cm}$, pa je oplošje kocke $O = 6a^2 = 6 \cdot (20\sqrt{2})^2 = 4\,800\text{ cm}^2$.

Zadatci 7.4.

1. Prepiši i dopuni tablicu za kocku.

a	12 cm	4 dm	$\sqrt{5}$ m		
O				96 cm^2	1 152 cm^2

2. Izračunaj oplošje kocke ako je duljina njezine prostorne dijagonale jednaka:

a) $12\sqrt{3}$ cm **b)** $8\sqrt{6}$ dm

c) $20\sqrt{3}$ m **d)** 24 cm.

3. Kolika je duljina prostorne dijagonale kocke ako joj je oplošje:

a) 864 dm^2 **b)** 72 cm^2

c) 34.56 mm^2 ?

4. Izračunaj duljinu prostorne dijagonale kocke čije oplošje je:

a) 1 536 cm^2 **b)** 600 mm^2

c) 288 dm^2 **d)** 25.92 cm^2.

5. Površina dijagonalnog presjeka kocke je $64\sqrt{2}$ cm^2. Izračunaj duljinu brida i oplošje.

6. Dijagonalni presjek kocke ima površinu $100\sqrt{2}$ cm^2. Koliko je oplošje kocke?

7. Poklon ima oblik kocke brida 12 cm. Treba ga zamotati u ukrasni papir. Koliko je ukrasnog papira potrebno ako se smatra da pri zamatanju trošimo 20 % više papira nego što je oplošje?

8. Izračunaj oplošje kvadra ako su dane duljine njegovih bridova

a) 3 cm, 4 cm, 6 cm

b) 1 cm, 0.1 dm, 10 mm.

9. Pretvori mjerne jedinice:

a) 1 m^2 =? cm^2 **b)** 1 dm^2 =? cm^2

c) 5 m^2 =? cm^2 **d)** 4.1 cm^2 =? mm^2

e) 1 cm^2 =? m^2 **f)** 1 mm^2 =? dm^2

g) 24 cm^2 =? dm^2 **h)** 3.9 dm^2 =? m^2

10. Prepiši i dopuni tablicu za kvadar.

a	10 m	0.6 dm	2.5 cm	12 cm
b	5 m		1.2 cm	0.7 dm
c		0.8 dm		21 mm
O	190 m^2	432 cm^2	13.4 cm^2	

11. Duljine dvaju bridova kvadra su 12 cm i 16 cm, a duljina prostorne dijagonale je 52 cm. Izračunaj oplošje kvadra.

12. Površine različitih pobočaka kvadra su 800 mm^2, 20 cm^2, 0.1 dm^2. Izračunaj duljine bridova kvadra.

13. Površine triju različitih strana kvadra su 12 cm^2, 24 cm^2 i 0.3 dm^2. Izračunaj oplošje kvadra.

14. Koliko će se promijeniti oplošje kvadra ako mu se svi bridovi

a) udvostruče **b)** smanje tri puta?

15. U bilježnicu prepiši istinitu tvrdnju.

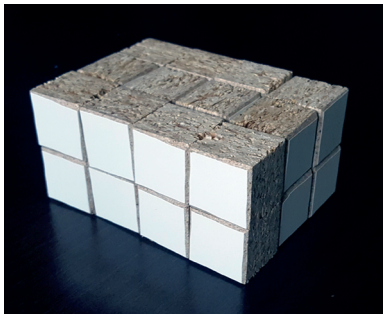
a) Duljina brida kocke i oplošje su proporcionalne veličine.

b) Ako se brid kocke poveća 4 puta, tada se njezino oplošje poveća 16 puta.

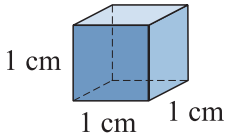
c) Ako se bridovi kvadra smanje dva puta, tada se oplošje smanji dva puta.

16. Bazen dimenzija 25 m × 50 m × 3 m treba popločiti keramičkim pločicama. Koliko paketa pločica treba ako u jednom paketu ima 1.2 m^2 pločica?

7.5. Volumen kvadra



Uz dužinu nas zanima njena duljina, uz lik u ravnini njegova površina, a uz tijelo njegov **volumen** ili **obujam**, tj. veličina prostora što tijelo zauzima. Kao što znamo (iz fizike), osnovna jedinica za duljinu je metar, za površinu kvadratni metar, a za volumen osnovna je mjerna jedinica kubični metar, m^3. Kubični metar je volumen (obujam) kocke s bridom duljine 1 metar. Za izražavanje volumena često služe i jedinice: $1\ mm^3$, $1\ cm^3$, $1\ dm^3$, $1\ km^3$, pri čemu slično kao za kubični metar, vrijedi da je $1\ cm^3$ volumen kocke s bridom duljine 1 cm itd.



Volumen kocke s bridom duljine 1 cm je $1\ cm^3$.

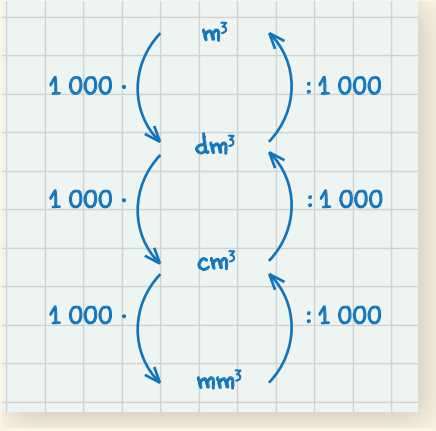
Katkad kao mjerna jedinica za volumen služi i litra uz odnos:

$$1 \text{ litra} = 1\ dm^3.$$

Primjer 1.

Pretvorimo:

a) $4\ m^3$ u cm^3 **b)** $2\ mm^3$ u dm^3.

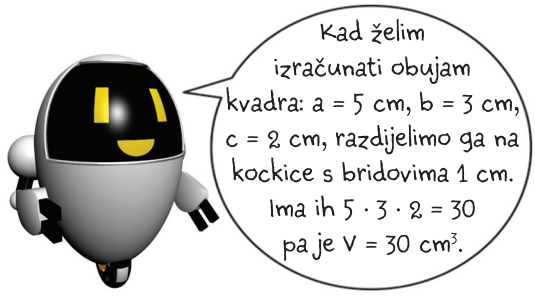


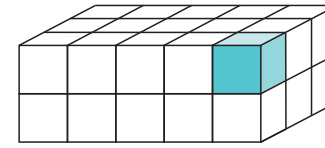
Rješenje:

a) 1 m ima 10 dm, pa $1\ m^3$ ima
$10\ dm \cdot 10\ dm \cdot 10\ dm = 1\,000\ dm^3$.
1 m ima 100 cm, pa $1\ m^3$ ima
$100\ cm \cdot 100\ cm \cdot 100\ cm$
$= 10^6\ cm^3 = 1\,000\,000\ cm^3$.
Tada je $4\ m^3 = 4\,000\,000\ cm^3$.

b) 1 mm iznosi $\frac{1}{100}$ dm jer 1 dm ima 100 mm.
Stoga je $1\ mm^3 = \left(\frac{1}{100}\right)^3 dm^3 = \frac{1}{10^6}\ dm^3$.
Vrijedi $2\ mm^3 = \frac{2}{10^6}\ dm^3 = 0.000\,002\ dm^3$.

U petom smo razredu volumen (obujam) kvadra računali s pomoću jediničnih kockica.





I općenito vrijedi, volumen kvadra s duljinama bridova a, b, c jednak je $V = abc$. Ako je kvadar ujedno i kocka, tj. kad je $a = b = c$, tada je $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.

Volumen kvadra i kocke

Ako su a, b, c duljine bridova kvadra iz istog vrha, volumen kvadra jednak je

$$V = abc.$$

Ako je a duljina brida kocke, tada je volumen kocke jednak

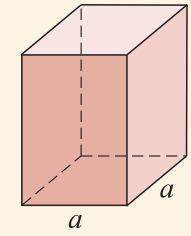
$$V = a^3.$$

Primjer 2.

Izračunajmo volumen pravilne četverostrane prizme kojoj je osnovni brid duljine $7\ \text{cm}$, a visina $20\ \text{cm}$.

Rješenje: Pravilna četverostrana prizma je kvadar kojemu su dvije strane kvadrati s bridovima a. Stoga je $a = b = 7\ \text{cm}$ i $c = 20\ \text{cm}$ pa je:

$$V = abc = 7 \cdot 7 \cdot 20 = 980\ \text{cm}^3.$$



Primjer 3.

Prostorna dijagonala kocke duga je $40\sqrt{3}\ \text{dm}$. Izračunajmo volumen kocke.

Rješenje: Iz $D = a\sqrt{3}$ slijedi $a = \dfrac{D}{\sqrt{3}} = 40\ \text{dm}$. Tada je njezin volumen $V = a^3 = 64\,000\ \text{dm}^3$.

Zadatci 7.5.

1. Pretvori mjerne jedinice:

a) $2\ \mathrm{m}^3 = ?\ \mathrm{dm}^3$ **b)** $6\ \mathrm{m}^3 = ?\ \mathrm{cm}^3$

c) $2.1\ \mathrm{dm}^3 = ?\ \mathrm{cm}^3$ **d)** $8.4\ \mathrm{cm}^3 = ?\ \mathrm{mm}^3$

e) $42\ \mathrm{dm}^3 = ?\ \mathrm{m}^3$ **f)** $25\ \mathrm{cm}^3 = ?\ \mathrm{dm}^3$

g) $14\ \mathrm{L} = ?\ \mathrm{dm}^3$ **h)** $23\ \mathrm{L} = ?\ \mathrm{m}^3$.

2. Prepiši i popuni tablicu za kocku.

a	6			1.1		
O		600			15.36	
V			8			64

3. Koliki je volumen kocke ako je duljina njezine prostorne dijagonale jednaka:

a) $4\sqrt{3}$ cm **b)** $5\sqrt{3}$ dm

c) $\sqrt{27}$ cm **d)** 18 m.

4. Izračunaj volumen i oplošje kocke čija je prostorna dijagonala duljine:

a) $\frac{1}{5}$ m **b)** $14\sqrt{3}$ dm

c) 1.2 cm **d)** $6\sqrt{6}$ m.

5. Osam olovnih kocaka duljine brida 1 cm pretopljeno je u jednu kocku. Kolika je duljina brida nove kocke?

6. Dijana ima tri srebrne kockice čiji bridovi su dugi 3 cm, 4 cm, 5 cm. Želi ih pretopiti u jednu kocku. Kolika će biti duljina brida novodobivene kocke?

7. Koliko se puta promijeni volumen kocke ako joj se brid poveća:

a) dva puta **b)** pet puta?

8. Kolika je masa mramorne kocke brida 2.4 m ako je gustoća mramora $\rho = 2\,800\ \mathrm{kg/m^3}$? ($m = \rho \cdot V$.)

9. Prepiši i popuni tablicu za kvadar.

a	2 cm		1.2 dm	15 dm
b	3 cm	8 cm	1.5 m	
c	5 cm	1.2 dm		2.5 m
V		48 cm^3	324 m^3	150 m^3

10. Volumen pravilne četverostrane prizme je $28\,800\ \mathrm{cm}^3$, dok joj je duljina osnovnog brida 48 cm. Izračunaj duljinu visine, prostorne dijagonale i oplošje prizme.

11. Duljine dvaju bridova kvadra su 240 cm i 16 dm, a duljina njegove prostorne dijagonale je 3.4 m. Izračunaj volumen i oplošje kvadra.

12. Kada za kupanje ima oblik kvadra dimenzija 60 cm × 55 cm × 110 cm. Koliko je litara vode potrebno da se kada napuni do vrha?

13. Kolika je masa željeznog kvadra s duljinama bridova 2 cm, 4 cm, 20 cm? Gustoća željeza je $7\,900\ \mathrm{kg/m^3}$.

14. Metalna bakrena posuda ima oblik kocke. Vanjski brid dna posude je duljine 15 cm, a unutarnji 14.5 cm. Kolika je masa te posude? Gustoća bakra je $8\,900\ \mathrm{kg/m^3}$.

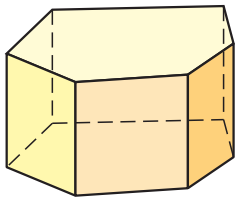
15. Poprečni presjek drvene grede duljine 6 m je kvadrat duljine stranice 20 cm. Kolika je masa grede ako je gustoća drva $700\ \mathrm{kg/m^3}$?

16. Cigla je oblika kvadra dimenzija 25 cm × 12 cm × 6.5 cm. Koliko komada cigli ima u $4\ \mathrm{m}^3$ zida?

17. Akvarij ima oblik kvadra kojemu je baza duga 60 cm, a široka 27 cm. Visina akvarija je 28 cm. U njemu se nalazi 35.64 litara vode. Do koje visine dopire voda?

7.6. Oplošje i volumen prizme

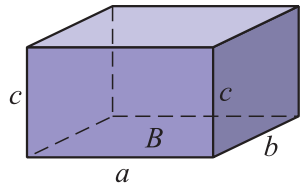
Oplošje bilo koje prizme zbroj je površina svih njezinih strana.



Prizma je omeđena dvjema sukladnim bazama i pravokutnicima koji čine pobočje pa je formula za oplošje prizme:

$$O = 2B + P$$

gdje je B površina baze, a P površina pobočja.

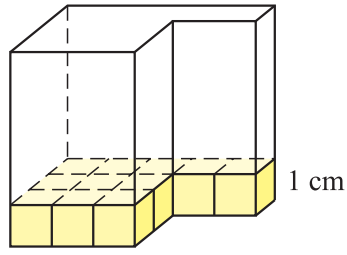


Izračunamo li oplošje kvadra prema toj formuli dobivamo

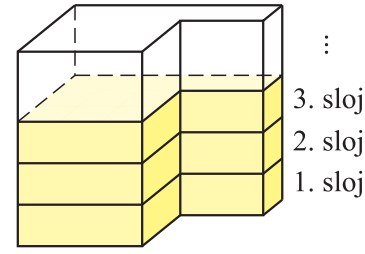
$O = 2B + P = 2 \cdot ab + (2 \cdot bc + 2 \cdot ac) = 2ab + 2bc + 2ac,$

što je upravo dobro nam poznata formula za kvadar.

Za volumen kvadra imamo: $V = abc = (ab)c = Bv$.
Formula $V = B \cdot v$ vrijedi za bilo koju prizmu.



Površina baze je B cm^2. Stoga na bazu stane jedan sloj od B jediničnih kockica (cm^3).



Ako je visina prizme duga v cm, tada u prizmu stane v slojeva s B kockica pa je volumen prizme $V = B \cdot v$.

Oplošje i volumen prizme

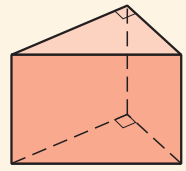
Formula za oplošje prizme je $O = 2B + P$. Formula za volumen prizme je $V = Bv$, gdje je B površina baze, P površina pobočja, v duljina visine prizme.

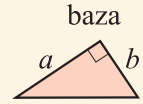
Primjer 1.

Izračunajmo oplošje i volumen trostrane prizme čija je baza pravokutan trokut s katetama $a = 6$ cm, $b = 8$ cm. Duljina visine prizme je $v = 6.5$ cm.

Rješenje:

$a = 6$ cm
$b = 8$ cm
$v = 6.5$ cm
$O,\ V = ?$





Prema Pitagorinu poučku imamo:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}.$$

Površina baze je površina pravokutnog trokuta:

$$B = \frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2.$$

Pobočke su pravokutnici dimenzija $a \times v$, $b \times v$, $c \times v$ pa je:

$$P = av + bv + cv = (a + b + c)v$$
$$= (6 + 8 + 10) \cdot 6.5 = 156 \text{ cm}^2$$
$$O = 2B + P = 2 \cdot 24 + 156 = 204 \text{ cm}^2$$
$$V = B \cdot v = 24 \cdot 6.5 = 156 \text{ cm}^3.$$

Zadatci 7.6.

1. Izračunaj oplošje prizme kojoj je zadana površina baze i pobočja:

a) $B = 20\ \text{cm}^2$, $P = 45\ \text{cm}^2$

b) $B = 42.5\ \text{dm}^2$, $P = 1.8\ \text{m}^2$.

2. Kolika je površina pobočja prizme ako joj je oplošje $2.4\ \text{m}^2$, a baza $28\ \text{dm}^2$?

3. Prepiši i dopuni rečenice.

Zadana je šesterostrana prizma. Duljine osnovnih bridova su a_1, a_2, _____. Duljina visine prizme je v.

Površine pobočki su a_1v, a_2v, _____.

Površina pobočja je zbroj površina pobočki $P = a_1v + a_2v +$ _____ $= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)v = ov$, gdje je o opseg baze.

Oplošje prizme je $O =$ ____ $= 2B + ov$.

Volumen prizme je $V =$ ____.

4. Prepiši i popuni tablicu za prizmu.

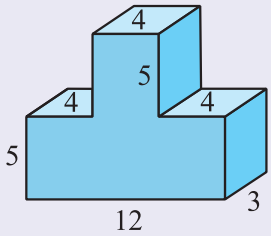
B	$10\ \text{cm}^2$	$49\ \text{m}^2$		$\frac{4}{3}\ \text{cm}^2$
v	$2\ \text{cm}$		$1.5\ \text{dm}$	$\frac{8}{5}\ \text{cm}$
V		$294\ \text{m}^3$	$330\ \text{dm}^3$	

5. Baza četverostrane prizme ima opseg $o = 12\ \text{cm}$. Visina prizme je $v = 5\ \text{cm}$. Izračunaj površinu pobočja.

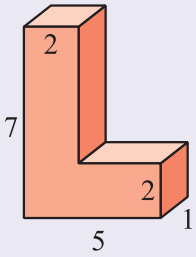
6. Baza šesterostrane prizme ima površinu $6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ i opseg 12. Visina prizme je $v = 4\ \text{cm}$. Izračunaj oplošje i volumen prizme.

7. Odredi što je baza, a što visina tijela na slikama pa izračunaj volumen i oplošje.

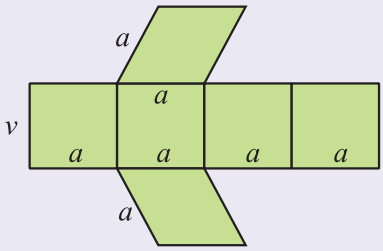
a)



b)



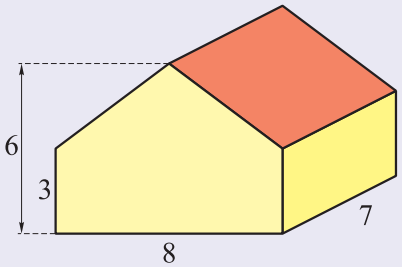
8. Nacrtana je mreža četverostrane prizme čija je baza romb. Duljine dijagonala romba su $40\ \text{cm}$ i $42\ \text{cm}$. Visina prizme je $10\ \text{cm}$.



a) Izračunaj oplošje prizme.

b) Izračunaj volumen prizme.

9. Sve su mjere na skici Zlatkove kuće u metrima.



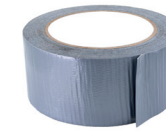
a) Prije početka gradnje, Zlatko je platio komunalni doprinos koji se plaća po volumenu koji zauzima kuća. Ako je cijena za $1\ \text{m}^3$ $50\ \text{kn}$, koliki je iznos komunalnog doprinosa platio Zlatko?

b) Cijena izrade $1\ \text{m}^2$ fasade je $310\ \text{kn}$. Kolika je cijena izrade fasade za cijelu kuću?

10. Pronađi informacije o oblicima kristalnih rešetki. Posebno obrati pažnju na rompske, tetragonsku i kubnu rešetku. S kojim su tijelima povezane te rešetke?

7.7. Valjak

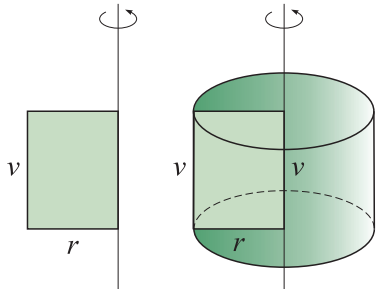




Kao što smo opisali prizmu, učinimo to i za valjak.

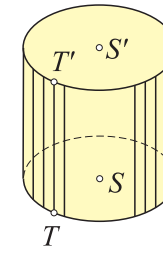
Uspravni valjak

Uspravni valjak je tijelo nastalo rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice.



U daljnjem tekstu umjesto naziva uspravni valjak koristimo samo riječ valjak.

Valjak je omeđen dvama sukladnim krugovima i zakrivljenom plohom. Krugovi se nazivaju **osnovke** ili **baze** valjka, a zakrivljena ploha se naziva **plašt valjka**.

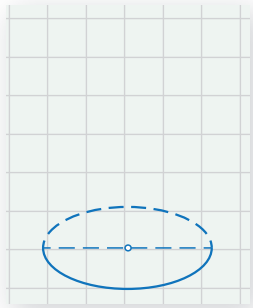


Neka su S i S' središta tih krugova. Pravac SS' naziva se **os valjka**.

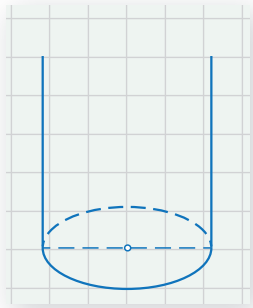
Plašt valjka čine sve dužine $\overline{TT'}$ paralelne sa $\overline{SS'}$ pri čemu točka T prolazi kružnicom $k(S, r)$. Te dužine nazivaju se **izvodnice** valjka.

Dužina $\overline{SS'}$ je **visina valjka** kao i sve dužine paralelne s njom koje počinju u jednoj bazi i završavaju u drugoj.

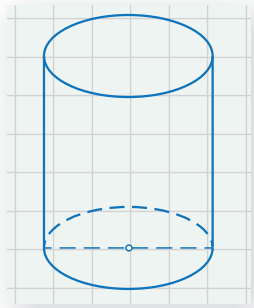
Pokažimo kako se crta valjak.



U stvarnosti baza valjka je krug, a na papiru se crta ovakva zakrivljena linija kojoj su krajnje lijeva i desna točka udaljene $2r$. Ta se linija zove elipsa.



Iz krajnje lijeve i krajnje desne točke nacrtane baze dignu se okomice koje su dugačke koliko i visina valjka.

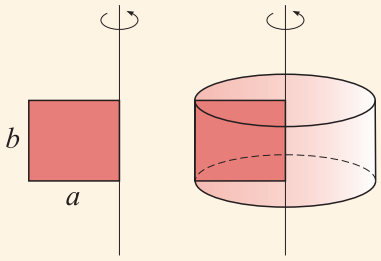


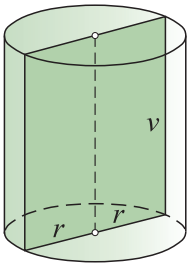
Nacrta se gornja baza.

Primjer 1.

Pravokutnik sa stranicama duljine $a = 4$ cm i $b = 3$ cm rotira oko stranice duljine b. Odredimo duljinu visine i polumjera baze valjka dobivenog tom rotacijom.

Rješenje: Duljina visine valjka je 3 cm, a duljina polumjera valjka je 4 cm.





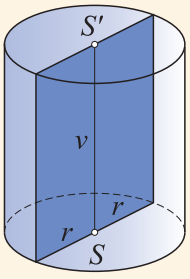
Osni presjek valjka je pravokutnik koji nastaje kad se valjak presiječe ravninom koja sadrži os valjka.

Duljine njegovih stranica su v i $2r$.

Primjer 2.

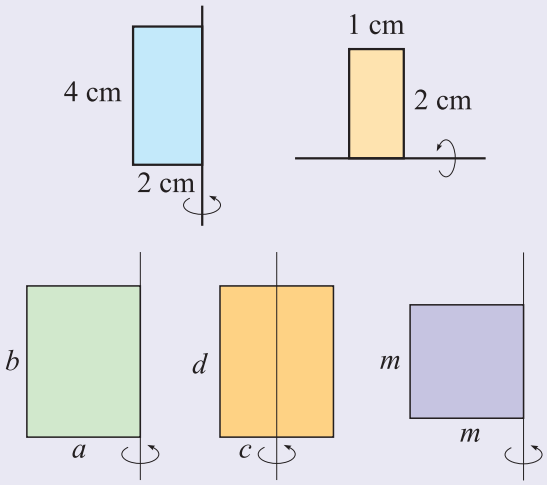
Osni presjek uspravnog valjka je kvadrat površine $16\ \text{cm}^2$. Izračunajmo duljinu polumjera i visine valjka.

Rješenje: U ovom zadatku osni je presjek kvadrat, pa slijedi da je $v = 2r$, a iz površine dobivamo da je $v = 4$ cm, pa je $r = 2$ cm.



Zadatci 7.7.

1. Odredi duljinu visine i duljinu polumjera valjaka dobivenih rotacijom pravokutnika prikazanih na slikama.



2. Nacrtaj valjak ako je:

a) $r = 2\text{ cm}$, $v = 3\text{ cm}$

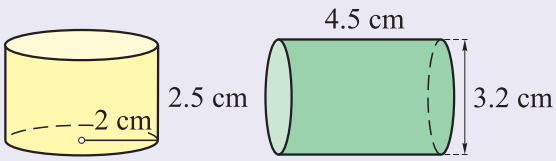
b) $r = 1.8\text{ cm}$, $v = 2.4\text{ dm}$

c) $2r = 4.2\text{ cm}$, $v = 15\text{ mm}$

d) $2r = 4.6\text{ cm}$, $v = 2\text{ cm}$.

3. Ovi valjci nastali su rotacijom nekih pravokutnika. Odredi dimenzije pravokutnika i pravac oko kojeg su rotirali pravokutnici.

a) **b)**



4. Izračunaj površinu osnog presjeka valjka ako je dana duljina polumjera r baze i duljina visine valjka:

a) $r = 2\text{ cm}$, $v = 1\text{ cm}$

b) $r = 5\text{ cm}$, $v = 0.4\text{ dm}$

c) $r = 1.5\text{ cm}$, $v = 12\text{ mm}$

d) $r = 1.2\text{ dm}$, $v = \frac{2}{3}\text{ dm}$.

5. Duljina promjera baze valjka je 28 cm, a površina osnog presjeka iznosi 280 cm^2. Izračunaj duljinu visine valjka.

6. Osni presjek valjka je kvadrat sa stranicom duljine 16 cm. Izračunaj duljinu polumjera baze i visine valjka.

7. Osni presjek valjka je kvadrat površine 576 cm^2. Izračunaj duljinu polumjera baze i duljinu visine valjka.

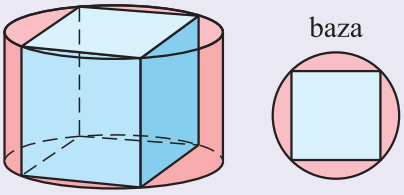
8. Osni presjek uspravnog valjka je kvadrat opsega 32 cm. Izračunaj duljinu polumjera i visine valjka.

9. Polumjer baze valjka je dva puta veći od visine valjka. Kolike su duljine polumjera i visine valjka ako je površina osnog presjeka 64 cm^2?

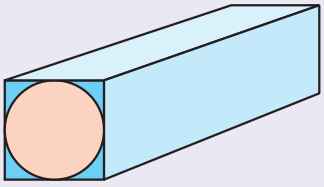
10. Dijagonala osnog presjeka valjka duga je 17 cm. Duljina promjera valjka je 8 cm. Kolika je duljina visine valjka?

11. Polumjer i visina valjka odnose se kao $3 : 4$. Površina osnog presjeka je 216 mm^2. Kolika je duljina promjera valjka?

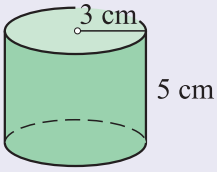
12. U valjak je upisana pravilna četverostrana prizma. Duljina polumjera valjka je 16 cm, a duljina visine 20 cm. Kolika je duljina osnovnog brida upisane prizme?



13. Od grede čiji je poprečni presjek kvadrat površine 100 cm^2 treba istokariti najveći mogući valjak. Koliki je promjer tog valjka?



14. Promatrajući valjak na slici, Marija i Dunja su izjavile sljedeće:



Marija: "Valjak je nastao rotacijom pravokutnika $3\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ oko dulje stranice."

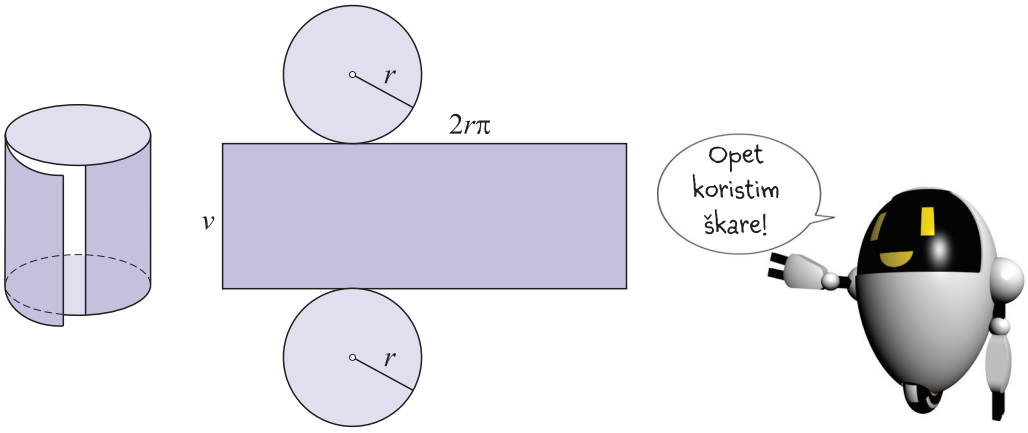
Dunja: "Valjak je nastao rotacijom pravokutnika $6\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ oko pravca koji raspolavlja dulje stranice pravokutnika."

Tko je od njih dvije u pravu?

7.8. Oplošje valjka

Promotrimo mrežu uspravnog valjka.

Razrežimo plašt valjka uzduž jedne od izvodnica i položimo ga u ravninu.



Plašt valjka, položen u ravnini, tvori pravokutnik kojemu je duljina jedne stranice jednaka opsegu kruga, a druga stranica jednaka je visini valjka. Dakle, slijedi da je površina plašta jednaka $P = 2r\pi v$. Mrežu valjka čine dva sukladna kruga i pravokutnik. Stoga je oplošje valjka dano formulom

$$O = 2B + P = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r\pi(r + v).$$

Oplošje valjka

Oplošje valjka zbroj je površina ploha koje ga omeđuju, pa je oplošje dano formulom:

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi v,$$

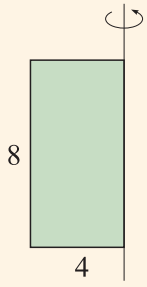
gdje je r duljina polumjera baza, a v duljina visine.

Površina plašta je

$$P = 2r\pi v.$$

Primjer 1.

Izračunajmo oplošje valjka nastalog rotacijom pravokutnika nacrtanog na slici.



Rješenje: Duljina polumjera baze je 4, a duljina visine je 8, pa je

$$O = 2r\pi(r + v) = 96\pi.$$

Zadatci 7.8.

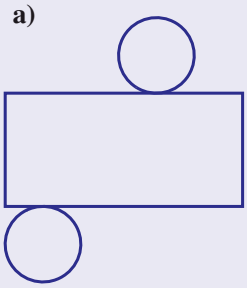
1. Nacrtaj mrežu valjka ako je dana duljina polumjera r baze i duljina visine valjka:

a) $r = 2\ \text{cm}$, $v = 1.8\ \text{cm}$

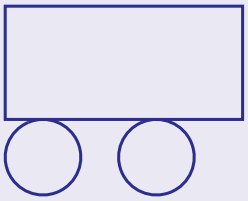
b) $r = 0.3\ \text{dm}$, $v = 9\ \text{mm}$.

2. Koje od slika prikazuju mrežu valjka?

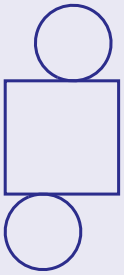
a)



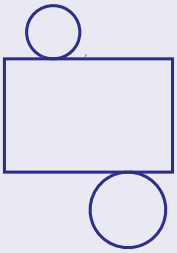
b)



c)

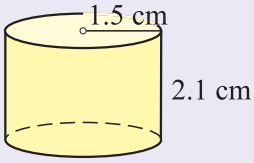


d)

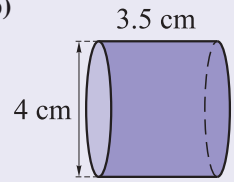


3. Nacrtaj mreže sljedećih valjaka.

a)



b)



4. Izračunaj oplošje valjka ako je dana duljina polumjera baze i duljina visine valjka:

a) $r = 8\ \text{cm}$, $v = 10\ \text{cm}$

b) $r = 2\ \text{dm}$, $v = \frac{1}{2}\ \text{m}$

c) $r = \frac{3}{2}\ \text{cm}$, $v = \frac{8}{3}\ \text{cm}$

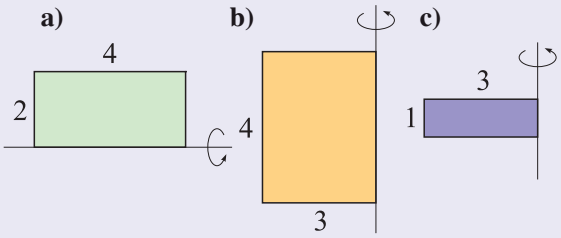
d) $r = 2.2\ \text{dm}$, $v = 4\ \text{cm}$.

5. Izračunaj oplošje valjka ako je zadana duljina promjera d baze i duljina visine valjka:

a) $d = 36\ \text{cm}$, $v = 8\ \text{cm}$

b) $d = 14\ \text{dm}$, $v = 0.5\ \text{m}$.

6. Odredi oplošja tijela nastalih rotacijom pravokutnika oko jedne od stranica.



7. Oplošje valjka je $42\pi\ \text{cm}^2$, a plašt je $24\pi\ \text{cm}^2$. Izračunaj duljinu polumjera baze.

8. Plašt valjka ima površinu $12\pi\ \text{cm}^2$, a visina valjka je $3\ \text{cm}$. Izračunaj oplošje valjka.

9. Osni presjek valjka je kvadrat stranice $10\ \text{cm}$. Izračunaj oplošje valjka.

10. Osni presjek valjka je kvadrat opsega $400\ \text{cm}$. Izračunaj oplošje valjka.

11. Plašt valjka je kvadrat površine $36\ \text{cm}^2$. Izračunaj mu oplošje.

12. Oplošje valjka je $56\pi\ \text{cm}^2$, a duljina polumjera mu je $4\ \text{cm}$. Kolika je duljina visine valjka?

13. Oplošje valjka je $160\pi\ \text{cm}^2$, a polumjer mu je 4 puta dulji od visine. Izračunaj duljinu polumjera i plašt valjka.

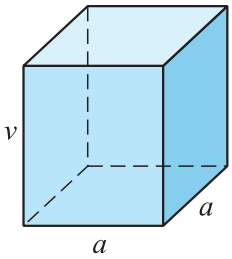
14. Polumjer baze valjka 4 puta je veći od visine valjka. Izračunaj oplošje valjka ako je površina plašta valjka $72\pi\ \text{dm}^2$.

15. Na balkonu se nalazi betonski stup oblika valjka. Promjer stupa je $42\ \text{cm}$, a visina $2.6\ \text{m}$. Koliko je litara boje potrebno za bojenje tog stupa ako se za $1\ \text{m}^2$ potroši $4\ \text{dL}$ boje?

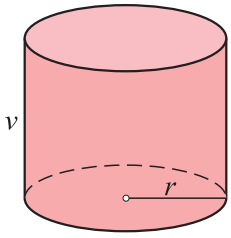
16. Reklamni stup je oblika valjka promjera $120\ \text{cm}$. Stup je visok $3.6\ \text{m}$. Koliko se reklamnih plakata može zalijepiti na taj stup ako je površina jednog plakata $113.04\ \text{dm}^2$?

7.9. Volumen valjka

Izvedi ovakav pokus. Napravi modele kvadra i valjka bez gornje plohe. Duljine a i v odaberi po svojoj volji. Kad izabereš a, tada za r uzmi vrijednost broja $\sqrt{\frac{a^2}{\pi}}$ zaokruženu na jednu decimalu.



Kvadar visine v. Površina baze je $B = a^2$.



Valjak visine v. Polumjer je $r = \sqrt{\frac{a^2}{\pi}}$ tako da je površina baze $B = a^2$.

Napuni rižom (ili solju ili pijeskom) kvadar do vrha i presipaj rižu u valjak. Što primjećuješ?

Riža je napunila valjak do vrha. To znači da su volumeni kvadra i valjka jednaki. Oba tijela imaju baze jednakih površina i visine jednakih duljina pa je:

$$V_{\text{valjka}} = V_{\text{kvadra}} = B \cdot v,$$

tj.

$$V_{\text{valjka}} = B \cdot v.$$

Budući da je

$$B = r^2\pi,$$

vrijedi

$$V_{\text{valjka}} = r^2\pi v.$$

Volumen ili obujam valjka

Volumen valjka jednak je umnošku površine njegove baze i duljine visine:

$$V = B \cdot v, \quad \text{tj.} \quad V = r^2\pi v.$$

Primjer 1.

Izračunajmo volumen valjka kojemu je duljina promjera $7\ \text{cm}$, a duljina visine $4\ \text{cm}$.

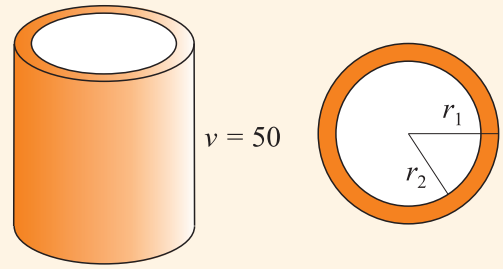
Rješenje: Iz podataka o promjeru dobivamo da je $r = 3.5\ \text{cm}$, pa je $V = r^2\pi v = 98\pi\ \text{cm}^3$. Volumen približno iznosi $V = 307.72\ \text{cm}^3$.

Primjer 2.

Koliko je olova potrebno za izradu cijevi duljine $50\ \text{cm}$, vanjskog promjera $20\ \text{cm}$, a širine stijenke $4\ \text{mm}$?

Rješenje: Označimo li vanjski polumjer s r_1, a unutarnji s r_2, debljina d stijenke jednaka je $r_1 - r_2$, tj. $r_2 = r_1 - d = 10 - 0.4 = 9.6\ \text{cm}$.

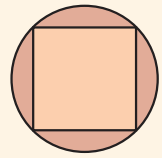
Količina potrebnog olova razlika je volumena valjaka s polumjerima r_1 i r_2, tj. $V = r_1^2\pi v - r_2^2\pi v \approx 1\,230.88\ \text{cm}^3$. Za izradu cijevi danih dimenzija potrebno je približno $1\,230.88\ \text{cm}^3$ olova.



Primjer 3.

Od okruglog debla oblikovana je greda čiji je poprečni presjek kvadrat najveće moguće površine. Promjer debla je $44\ \text{cm}$, a duljina $4\ \text{m}$. Odredimo dimenzije grede. Koliki je postotak otpadnog materijala?

Rješenje: Ovako izgleda pogled odozgo na deblo i gredu.



Promjer debla ujedno je dijagonala kvadrata:

$$d = 44$$
$$a\sqrt{2} = 44$$
$$a = \frac{44}{\sqrt{2}} = \frac{44\sqrt{2}}{2} = 22\sqrt{2}\ \text{cm}$$
$$a = 31.11\ \text{cm}.$$

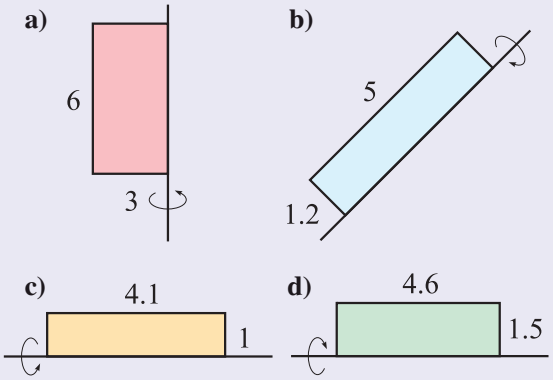
Greda je kvadar čija je baza kvadrat sa stranicom duljine $31.11\ \text{cm}$ i visinom $4\ \text{m}$.

$$V_{\text{debla}} = r^2\pi v = 22^2\pi \cdot 400 = 193\,600\pi = 607\,904\ \text{cm}^3$$
$$V_{\text{grede}} = a^2 v = (22\sqrt{2})^2 \cdot 400 = 387\,200\ \text{cm}^3$$
$$V_{\text{otpad}} = V_{\text{debla}} - V_{\text{grede}} = 220\,704\ \text{cm}^3$$
$$\frac{V_{\text{otpad}}}{V_{\text{debla}}} = 0.363 = 36.3\ \%.$$

Otpad iznosi $36.3\ \%$.

Zadatci 7.9.

1. Izračunaj volumen valjka nastalog rotacijom pravokutnika oko jedne od stranica.



2. Prepiši i dopuni tablicu s podatcima za valjak.

r	2 cm	2.4 dm		0.7 dm	
v	5 cm	0.36 m	1 dm		3.5 cm
V			40π cm^3	147π cm^3	703.36 cm^3

3. Izračunaj volumen valjka ako mu je zadana duljina polumjera baze i visine valjka:

a) $r = 2$ cm, $v = 5$ cm

b) $r = 2.4$ dm, $v = 0.36$ m.

4. Kolika je duljina polumjera baze valjka čiji volumen je V, a duljina visine je v ako je zadano:

a) $V = 40\pi$ cm^3, $v = 10$ cm

b) $V = 25\pi$ dm^3, $v = 4$ dm

c) $V = 147\pi$ cm^3, $v = 0.3$ dm

d) $V = 703.36$ cm^3, $v = 35$ mm?

5. Kako će se promijeniti volumen valjka ako mu se:

a) visina poveća dva puta

b) polumjer baze poveća dva puta?

6. Osni presjek valjka je kvadrat stranice 16 cm. Izračunaj mu oplošje i volumen.

7. Osni presjek valjka je kvadrat površine 196 cm^2. Izračunaj oplošje i volumen valjka.

8. Površina plašta valjka je 30π cm^2, a volumen iznosi 45π cm^3. Izračunaj duljinu polumjera i visine valjka.

9. Volumen valjka je 50π dm^3, a površina baze je 25π dm^2. Izračunaj oplošje valjka.

10. Oplošje valjka iznosi 360π m^2, a plašt je 72π m^2. Koliki je volumen valjka?

11. Površina plašta valjka brojčano je jednaka volumenu valjka. Kolika je duljina polumjera baze?

12. Izračunaj masu bakrene žice promjera 2 mm, duljine 42 m. Gustoća bakra je 8 900 kg/m^3.

13. Spremnik na vozilu za čišćenje ulica ima oblik valjka duljine 3.6 m i promjera 1.6 m. Koliko litara vode stane u taj spremnik?

14. Okrugli stup promjera 120 cm i visine 3.6 m napravljen je od mramora. Kolika je masa stupa ako je gustoća mramora 2 800 kg/m^3?

15. Unutrašnji promjer menzure je 3.2 cm, a visina menzure je 15 cm. U menzuri se nalazi 120 cm^3 vode. Do koje je visine stupac vode? Ako u menzuru ubacimo kuglice ukupnog volumena 10 cm^3, na kojoj će visini biti stupac vode?

16. U menzuri unutarnjeg promjera 3.6 cm nalazi se voda 5 cm do gornjeg ruba. U menzuru se ubaci kamen volumena 0.5 dm^3. Hoće li se voda preliti preko ruba menzure?

17. U lonac promjera 22 cm stane 3.5 L vode. Kolika je visina lonca?

18. U loncu unutarnjeg promjera 26 cm nalazi se voda. Za koliko se podigne razina vode kad se u lonac ubaci tijelo volumena 1 dm^3?

19. Kolika je masa bakrene žice promjera 2 mm i duljine 1 km. Gustoća bakra je 8 900 kg/m^3.

20. Plastična cijev duljine je 4 m, vanjskog promjera 20 cm i debljine stijenke 1 cm. Koliko je plastike potrebno za izradu takve cijevi? Koliko vode stane u tu cijev?

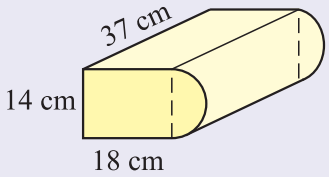
21. Betonske cijevi za odvod imaju vanjski promjer 1.6 m, a debljinu stijenki 12 cm. Koliko je m^3 betona potrebno za izradu 5 takvih cijevi duljine 1.2 m?

22. Biskvit za rođendansku tortu ima promjer 26 cm i visinu 8 cm. Slastičar ga je prerezao na tri dijela i stavio dva sloja kreme svaki visine 0.5 cm.

a) Koliki je volumen kreme?

b) Koliko se čokoladne glazure potrošilo za prekrivanje torte ako se za 1 dm^2 potroši 4 dag glazure?

23. Opiši tijelo na slici i izračunaj mu volumen.



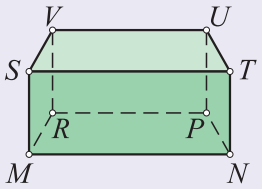
Zadatci za ponavljanje

1. Precrtaj u bilježnicu pa ispuni.

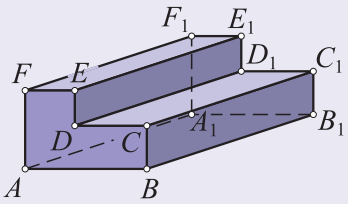
baza prizme	broj vrhova	broj strana	broj pobočki
trokut			
četverokut			
šesterokut			
deseterokut			
n-terokut			

2. Ispiši osnovne bridove prizme.

a)



b)

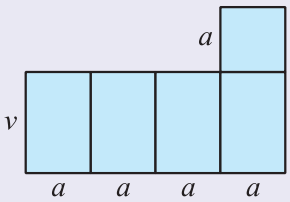


3. Nacrtaj mrežu pravilne trostrane prizme kojoj je duljina osnovnog brida $a = 18$ mm, a duljina visine je 2 cm.

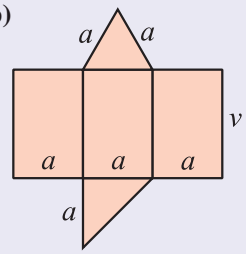
4. Nacrtaj mrežu pravilne šesterostrane prizme kojoj je duljina osnovnog brida $a = 19$ mm, a duljina visine je 1.5 cm.

5. Koja slika ne prikazuje mrežu prizme?

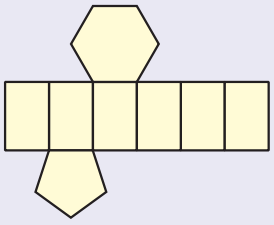
a)



b)



c)



6. Izračunaj plošnu i prostornu dijagonalu kocke kojoj je osnovni brid duljine 16 cm.

7. Izračunaj duljinu brida kocke ako je duljina prostorne dijagonale:

a) $D = 4\sqrt{3}$ cm

b) $D = 36\sqrt{3}$ dm

c) $D = 12\sqrt{3}$ cm

d) $D = 14\sqrt{6}$ m.

8. Izračunaj duljinu brida kocke ako je duljina prostorne dijagonale:

a) 18 cm **b)** $\frac{1}{2}$ dm

c) 6 mm **d)** 5 mm.

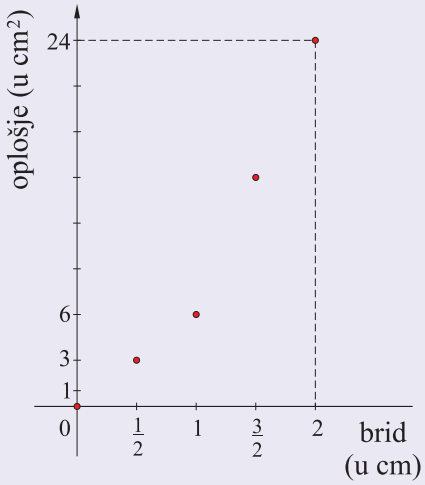
9. Koje su tvrdnje istinite?

a) Duljina osnovnog brida i duljina prostorne dijagonale kocke su proporcionalne veličine.

b) Duljina plošne dijagonale i duljina prostorne dijagonale su proporcionalne veličine.

c) Oplošje kocke i volumen kocke su proporcionalne veličine.

10. Matea je u koordinatni sustav unijela nekoliko točaka kojima je prva koordinata duljina brida kocke, a druga njezino oplošje. Je li to dobro učinila?



11. Izračunaj duljinu prostorne dijagonale kvadra ako su duljine bridova iz jednog vrha:

a) 4.5 cm, 6 cm, 18 cm

b) 9 dm, 12 dm, 3.6 m

c) $6\sqrt{2}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm, 22.5 cm.

12. Izračunaj duljinu prostorne i svih plošnih dijagonala kvadra ako su mu zadane duljine bridova iz jednog vrha:

a) $a = 9\text{ cm}$, $b = 12\text{ cm}$, $c = 36\text{ cm}$

b) $a = 15\text{ cm}$, $b = 22.5\text{ cm}$, $c = 4.5\text{ dm}$

c) $a = 6\text{ cm}$, $b = 12\text{ cm}$, $c = 0.12\text{ m}$.

13. Izračunaj duljinu trećeg brida kvadra ako je dana duljina prostorne dijagonale i duljine dvaju bridova:

a) $D = 26\text{ cm}$, $a = 6\text{ cm}$, $b = 8\text{ cm}$

b) $D = 17\text{ dm}$, $a = 9\text{ dm}$, $c = 12\text{ dm}$

c) $D = 49\text{ cm}$, $b = 1.4\text{ dm}$, $c = 4.2\text{ dm}$

14. Baza kvadra je kvadrat. Izračunaj duljine bridova tog kvadra ako je duljina prostorne dijagonale 30 cm, a duljina dijagonale pobočke 24 cm.

15. Baza kvadra je kvadrat. Izračunaj duljinu prostorne dijagonale i duljine bridova tog kvadra ako je duljina dijagonale baze $8\sqrt{2}\text{ dm}$, a duljina dijagonale pobočke je $4\sqrt{5}\text{ dm}$.

16. Izračunaj površine svih dijagonalnih presjeka kvadra čiji bridovi iz jednog vrha imaju duljine 8 cm, 15 cm i 6 cm.

17. Izračunaj oplošje kocke ako je duljina brida:

a) 18 cm **b)** 12 cm

c) 5.4 dm **d)** $3\sqrt{5}\text{ dm}$.

18. Izračunaj duljinu brida kocke ako je oplošje kocke:

a) 216 cm^2 **b)** $7\,776\text{ dm}^2$

c) $10\,368\text{ m}^2$ **d)** 13.5 dm^2.

19. Izračunaj volumen kocke brida duljine:

a) 0.2 cm **b)** $\frac{4}{3}\text{ dm}$

c) $2\sqrt{3}\text{ dm}$ **d)** $4\sqrt{2}\text{ dm}$.

20. Izračunaj volumen kocke čije oplošje iznosi:

a) 864 cm^2 **b)** 384 mm^2

c) 0.24 m^2 **d)** $2\,400\text{ m}^2$.

21. Koliko se puta poveća oplošje kocke ako joj se brid poveća:

a) dva puta **b)** pet puta?

22. Koliko se puta smanji oplošje kocke ako joj se brid smanji:

a) dva puta **b)** tri puta?

23. Koliko se puta promijeni volumen kocke ako joj se brid smanji:

a) šest puta **b)** dva puta?

24. Kad bi se svaki brid kocke povećao za 2 cm, njezino bi se oplošje povećalo za 96 cm^2. Kolika je duljina brida kocke?

25. Kolika je duljina brida kocke kojoj je brojčana vrijednost oplošja jednaka volumenu?

26. Oplošje kocke je $1\,176\text{ dm}^2$. Koliki je volumen one kocke:

a) čiji je brid dulji za 12 dm

b) čiji je brid kraći za 12 dm?

27. Oplošje kocke iznosi $5\,400\text{ cm}^2$. Kolika je duljina brida one kocke koja ima pet puta veće oplošje?

28. Imaš 12 jednakih kockica s bridom duljine 1 cm. Koliko različitih kvadara možeš složiti od njih? Za svaki kvadar mora se upotrijebiti svih 12 kockica. Kolika su oplošja tih kvadara?

29. Površine triju različitih strana kvadra su 12 cm^2, 15 cm^2 i 20 cm^2. Izračunaj duljine bridova kvadra i njegov volumen.

30. Površine triju različitih strana kvadra su 0.32 m^2, 48 dm^2 i 96 dm^2. Izračunaj duljine bridova kvadra i volumen.

31. Duljine bridova kvadra izražene u centimetrima tri su uzastopna broja. Kolike su duljine bridova ako je oplošje kvadra 22 cm^2?

32. Površina baze pravilne četverostrane prizme jednaka je površini pobočja. Koliki je volumen te prizme ako joj je visina $v = 2.5\text{ cm}$?

33. Oplošje pravilne četverostrane prizme je 160 dm^2, a površina pobočja je 128 dm^2. Koliki je volumen prizme?

34. Osnovni brid i visina pravilne četverostrane prizme odnose se kao $3 : 5$. Kolike su duljine osnovnog brida i visine ako:

a) oplošje prizme iznosi 702 dm^2

b) volumen prizme iznosi $2\,880\text{ m}^3$?

35. Duljine dvaju bridova kvadra su 12 cm i 16 cm, a duljina njegove prostorne dijagonale je 52 cm. Izračunaj mu volumen.

36. Metalni kvadar s bridovima duljine 4 cm, 8 cm i 16 cm pretopljen je u kocku. Kolika je duljina brida kocke?

37. Kolika je masa plutenog panoa čija je širina $1.5\ \text{m}$, visina $1\ \text{m}$, a debljina $1\ \text{cm}$? Gustoća pluta je $250\ \text{kg/m}^3$.

38. Nakon žetve zadruga je pšenicom napunila tri jednaka silosa oblika kvadra dimenzija $30\ \text{m} \times 20\ \text{m} \times 7\ \text{m}$. Tu pšenicu treba transportirati do mlina vagonima zapremnine $60\ \text{m}^3$. Koliko je vagona potrebno za prijevoz pšenice?

39. Bazen je dug $12\ \text{m}$, širok $16\ \text{m}$, a dubok $2.3\ \text{m}$. Koliko je litara vode potrebno za punjenje bazena tako da je razina vode $10\ \text{cm}$ ispod gornjeg ruba bazena?

40. Metalni spremnik ima oblik kvadra dimenzija $24\ \text{m} \times 2.4\ \text{m} \times 3\ \text{m}$. Koliko litara tekućine stane u taj spremnik?

41. Limena kutija bez poklopca ima oblik kvadra. Duljina i širina kutije su $12\ \text{cm}$ i $16\ \text{cm}$, a visina je $20\ \text{cm}$. Koliko je lima potrošeno za izradu te kutije? Koliki je volumen te kutije?

42. Za gradnju $1\ \text{m}^2$ zida upotrijebljeno je 25 cigli. Koliko je cigli upotrijebljeno za izgradnju zidova kuće kojoj temelji imaju dimenzije 9 m i 6 m, a zidovi su visoki 2.8 m?

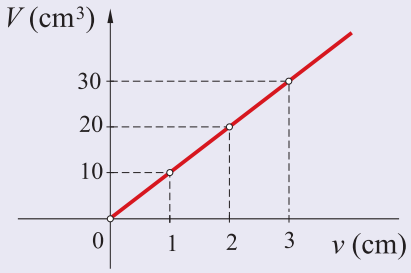
43. Bazen je dimenzija $24\ \text{m} \times 12\ \text{m}$ i dubine $3\ \text{m}$.

a) Koliko je vode potrebno uliti u bazen da se razina vode podigne za $10\ \text{cm}$?

b) U bazen je ušlo 58 ljudi. Prosječni volumen tijela svakog čovjeka je $1.4\ \text{m}^3$. Za koliko se centimetara podigla razina vode?

44. Dvije mljekare pakiraju mlijeko u kartonsko pakiranje tzv. tetrapak u obliku kvadra. Tetrapak jedne litre mlijeka u prvoj mljekari ima dimenzije $6\ \text{cm} \times 6\ \text{cm} \times 28\ \text{cm}$, a u drugoj $7\ \text{cm} \times 6.5\ \text{cm} \times 22\ \text{cm}$. Cijena $1\ \text{m}^2$ kartona je $1.5\ \text{kn}$. Kad svaka mljekara zapakira $1\,000\ \text{hL}$ mlijeka, koja od njih ima manji trošak pri izradi tetrapaka i za koliko?

45. Grafički prikaži ovisnost volumena prizme o visini. Baza prizme je $10\ \text{cm}^2$. Koja je to vrsta ovisnosti?



46. Duljina osnovnog brida pravilne šesterostrane prizme je $4\ \text{cm}$, a duljina visine je $15\ \text{cm}$. Izračunaj oplošje i volumen prizme.

47. Površina plašta valjka četiri je puta veća od površine njegove baze. Ako je visina valjka $10\ \text{cm}$, koliki mu je volumen?

48. Opseg osnog presjeka valjka iznosi $72\ \text{cm}$, a visina je valjka za $6\ \text{cm}$ dulja od polumjera baze. Izračunaj volumen valjka.

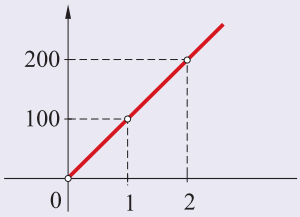
49. Polumjer baze i visina valjka odnose se kao $2 : 5$. Ako je volumen valjka $160\pi\ \text{cm}^3$, kolika je duljina visine valjka?

50. Svjećar od bloka voska treba napraviti svijeće. Dimenzije bloka voska su $0.5\ \text{m} \times 8\ \text{dm} \times 0.4\ \text{m}$. Svijeće su visoke $12\ \text{cm}$ i promjera $6\ \text{cm}$. Koliko komada svijeća može napraviti od tog bloka voska?

51. Dio gradskog vodovoda napravljen je od cijevi vanjskog promjera $30\ \text{cm}$, a unutarnjeg $28\ \text{cm}$. Koliko se vode treba pustiti u vodovod da se napune cijevi dugačke $2\ \text{km}$?

52. Mladi se grašak konzervira u konzervama oblika valjka. U jednoj se tvornici za konzerviranje $400\ \text{g}$ graška koriste konzerve duljine promjera $10\ \text{cm}$ i visine $11\ \text{cm}$, a u drugoj promjera $9\ \text{cm}$ i visine $13.58\ \text{cm}$. Oko svake konzerve se lijepi papirnata naljepnica s informacijama o proizvodu. U jednoj sezoni svaka tvornica konzervira $400\ \text{t}$ graška. Koja tvornica potroši manje papira za naljepnice i za koliko? Koliko stabala treba posjeći za izradu naljepnica u obje tvornice ako se od jednog stabla dobije prosječno $1\,042\ \text{m}^2$ papira?

53. Dubravko je nacrtao ovisnost između dviju veličina vezanih za valjak, ali njegov je mlađi brat obrisao oznake na osima. Između kojih je veličina ta ovisnost?



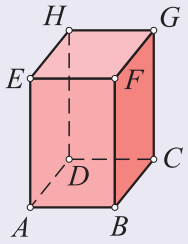
ele-udzbenik.hr

U elektroničkom dijelu udžbenika pronađi više zadataka za uvježbavanje.

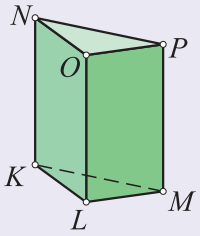
Jednostavni zadatci

1. Na slici je prizma. Napiši njezine vrhove, osnovne i pobočne bridove te baze.

a)



b)



2. Koliko bridova i strana ima n-terostrana prizma ako je:

a) $n = 3$ **b)** $n = 8$

c) $n = 20$ **d)** $n = 25$?

3. Što je baza:

a) četverostrane prizme? **b)** šesterostrane

4. Koliko vrhova, bridova i strana ima:

a) četverostrana prizma? **b)** trostrana

5. Izračunaj oplošje i volumen kvadra kojemu su bridovi iz jednog vrha dugački:

a) 2 cm, 5 cm, 12 cm

b) 1 m, 1 dm, 1 cm.

6. Duljina osnovnog brida kocke je $a = 6\text{ cm}$. Izračunaj duljinu plošne dijagonale i prostorne dijagonale kocke, oplošje i volumen kocke.

7. Prepiši i popuni tablicu za kvadar.

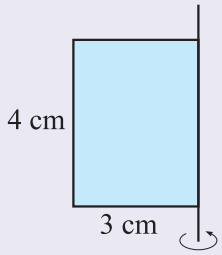
a	b	c	D	O	V
1 cm	1 cm	2 cm			
3 dm	4 dm				60 dm^3
	12 m	8 m	17 m		
2 m		2 dm			200 dm^3

8. Kupaonska kada je oblika kvadra duljine 1.4 m, širine 0.7 m i visine 0.6 m. Napunjena je vodom do 10 cm ispod gornjeg ruba. Koliko m^3 vode je u kadi?

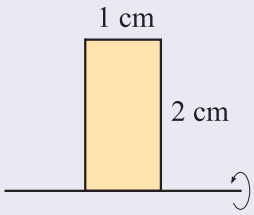
9. Metalni kontejner ima dimenzije $2\text{ m} \times 7\text{ m} \times 3\text{ m}$. Koliko je litara boje potrebno za bojenje svih strana kontejnera ako za 5 m^2 treba 1 litra boje?

10. Izračunaj oplošje i volumen valjka nastalog rotacijom pravokutnika.

a)

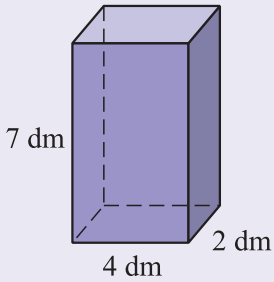


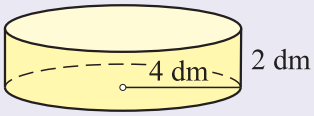
b)



11. Tina je kupila mlijeko u tetrapaku koji je oblika kvadra dimenzija $8\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 16\text{ cm}$ te ga je prelila u lonac čiji je unutarnji promjer 14 cm. Do koje je visine mlijeko u tom loncu?

12. Koje tijelo ima veći volumen?





Složeniji zadatci

1. Izračunaj duljinu bridova kvadra ako je zadana duljina prostorne dijagonale i omjer bridova:

a) $D = 130\text{ cm}$, $a : b : c = 4 : 3 : 12$

b) $D = 65\text{ cm}$, $a : b : c = 3 : 4 : 12$

c) $D = 255\text{ mm}$, $a : b : c = 84 : 12 : 5$

d) $D = 14\sqrt{2}\text{ dm}$, $a : b : c = 5 : 3 : 8$.

2. Bridovi kvadra odnose se kao $3 : 4 : 12$. Izračunaj im duljine ako je najmanja plošna dijagonala kvadra duga 80 cm.

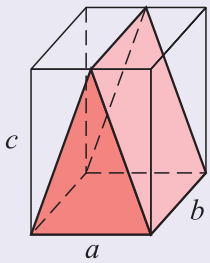
3. Duljine bridova kvadra odnose se kao $12 : 3 : 4$. Izračunaj duljinu prostorne dijagonale ako je oplošje kvadra $4\,800\text{ cm}^2$.

4. Duljine bridova kvadra odnose se kao $2 : 5 : 8$. Izračunaj duljine bridova ako mu je oplošje $4\,752\text{ cm}^2$.

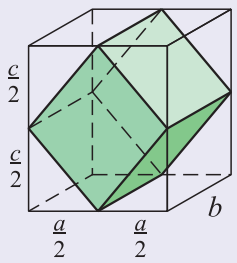
5. Bridovi kvadra odnose se kao $12 : 16 : 21$. Kolike su duljine bridova ako dijagonalni presjek dijagonalom strane određene s dvama manjim bridovima ima površinu $1\,680\text{ dm}^2$?

6. Iz kvadra ($a = 8\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$, $c = 15\text{ cm}$) izrezana su tijela. Izračunaj im volumen.

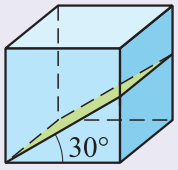
a)



b)



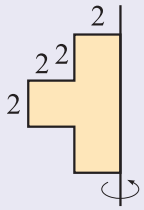
7. Kocka je presječena ravninom koja prolazi jednim bridom kocke. Kolika je površina tog presjeka ako je duljina brida $a = 6\text{ cm}$?



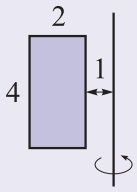
8. Volumen valjka je $150\pi\text{ cm}^3$, a površina njegova plašta je $60\pi\text{ cm}^2$. Koliko je oplošje valjka?

9. Izračunaj volumen tijela nastalog rotacijom likova.

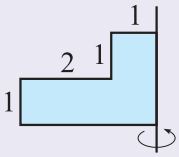
a)



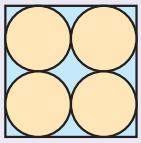
b)



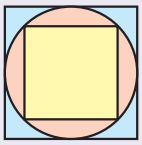
c)



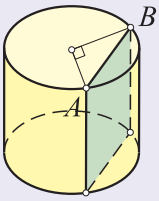
10. U kvadar visine 10 cm upisana su 4 jednaka valjka. Na slici je prikazan pogled na bazu. Kad se iz kvadra izrežu ti valjci, koliko cm^3 materijala je ostalo? Baza kvadra je kvadrat duljine stranice $a = 8\text{ cm}$.



11. U pravilnu četverostranu prizmu upisan je valjak tako da je baza valjka upisana bazi prizme. Zatim je u valjak upisana pravilna četverostrana prizma. Kako se odnose volumeni veće i manje prizme? Na slici je dan pogled na bazu.



12. Valjak je presječen ravninom paralelnom s osi koja prolazi tetivom $\overline{AB}$. Kolika je površina tog presjeka ako je polumjer baze $r = 5\text{ cm}$, a visina $v = 8\text{ cm}$?



13. Valjku je upisana šesterostrana prizma. Polumjer baze valjka je $r = 5\text{ cm}$, a duljina visine je 9 cm. Za koliko je posto volumen valjka veći od volumena prizme?

Zabavni kutak

Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb

Nacionalna i sveučilišna knjižnica, Zagreb

Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb

Cibonin toranj, Zagreb

Crkva sv. Trojstva, Split

Tower Centar, Rijeka

Građevinsko-geodetska škola, Osijek

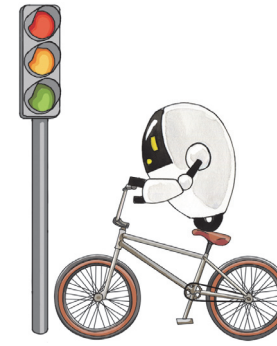
Arheološki muzej, Zadar

Meštrovićev paviljon, Zagreb

Izvori: Wikipedija, slike deklarirane kao *public domain*, Građevinsko-geodetska škola, Osijek: `https://baumit.hr`.

7.10. SEMAFOR

U bilježnicu riješi zadatke i pokraj svakog zadatka nacrtaj krug. Krug oboji zelenom bojom ako zadatak u potpunosti razumiješ i točno je riješen. Žutom bojom oboji krug kraj zadatka za koji smatraš da još trebaš vježbati ili ako rezultat zadatka nije točan, a crvenom bojom ako ne znaš kojim postupkom riješiti zadatak.

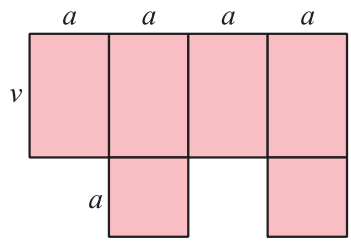


Zadatci

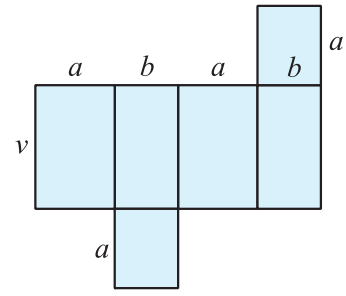
1. Nacrtaj kocku čija je duljina brida $2\ \text{cm}$.

2. Koja slika ne prikazuje mrežu kvadra? Odgovora može biti više.

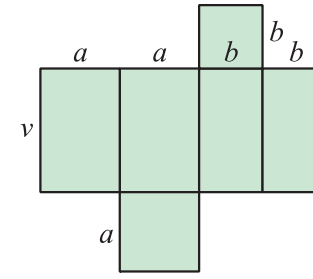
a)



b)



c)

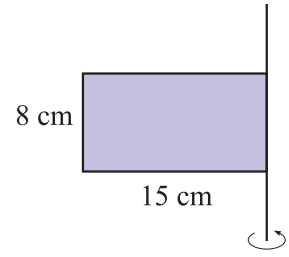


3. Prostorna dijagonala kocke duga je $11\sqrt{3}\ \text{cm}$. Koliko iznosi oplošje kocke?

4. Oplošje kvadra je $392\ \text{cm}^2$, a dva su brida duljine $12\ \text{cm}$ i $5\ \text{cm}$. Koliko iznosi volumen kvadra?

5. Kupaonska kada dugačka je $140\ \text{cm}$, široka $65\ \text{cm}$ i duboka $70\ \text{cm}$. Napunjena je vodom $30\ \text{cm}$ od gornjeg ruba. Kad se u kadu pusti još 91 litra vode, do koje će se visine podići razina vode?

6. Odredi oplošje tijela nastalog rotacijom pravokutnika na slici.



7. Nacrtaj mrežu valjka čiji polumjer je duljine $15\ \text{mm}$, a visina $2\ \text{cm}$.

8. Volumen valjka je $3\,600\pi\ \text{cm}^3$, a duljina visine mu je $16\ \text{cm}$. Kolika je površina osnog presjeka tog valjka?

9. Promjer baze i visina valjka odnose se kao $2:3$. Ako je oplošje valjka $72\pi\ \text{dm}^2$, kolika je duljina polumjera baze valjka?

10. Valent želi svijeću visine $20\ \text{cm}$ i polumjera $3\ \text{cm}$ pretopiti u novu svijeću dvostruko većeg polumjera. Koja je od danih tvrdnji istinita? Odgovor obrazloži.

a) Visina nove svijeće je dvostruko veća od stare.

b) Visina nove svijeće je dvostruko manja od stare.

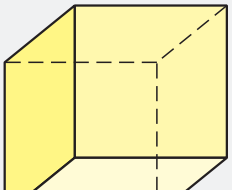
c) Visina nove svijeće je četiri puta manja od stare.

Za svaki zeleno obojeni krug osvajaš 2 boda, za svaki žuti krug 1 bod, a za crveni 0 bodova.

Intervali bodova

0 – 10:	Znaš što ti je činiti... Nakon još vježbe sigurno će biti bolji rezultat!
11 – 17:	Još ponovi i posebice uvježbaj ono u čemu griješiš!
18 – 20:	Na pravom si putu za sljedeće poglavlje!

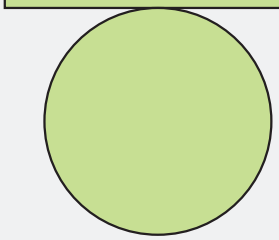
Rješenja zadataka:

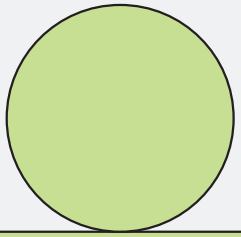
1. 

2. a) i **c)** **3.** $O = 726\ \text{cm}^2$. **4.** $c = 8\ \text{cm}$, $V = 480\ \text{cm}^3$.

5. Do $20\ \text{cm}$ od gornjeg ruba. **6.** $O = 690\pi\ \text{cm}^2$.

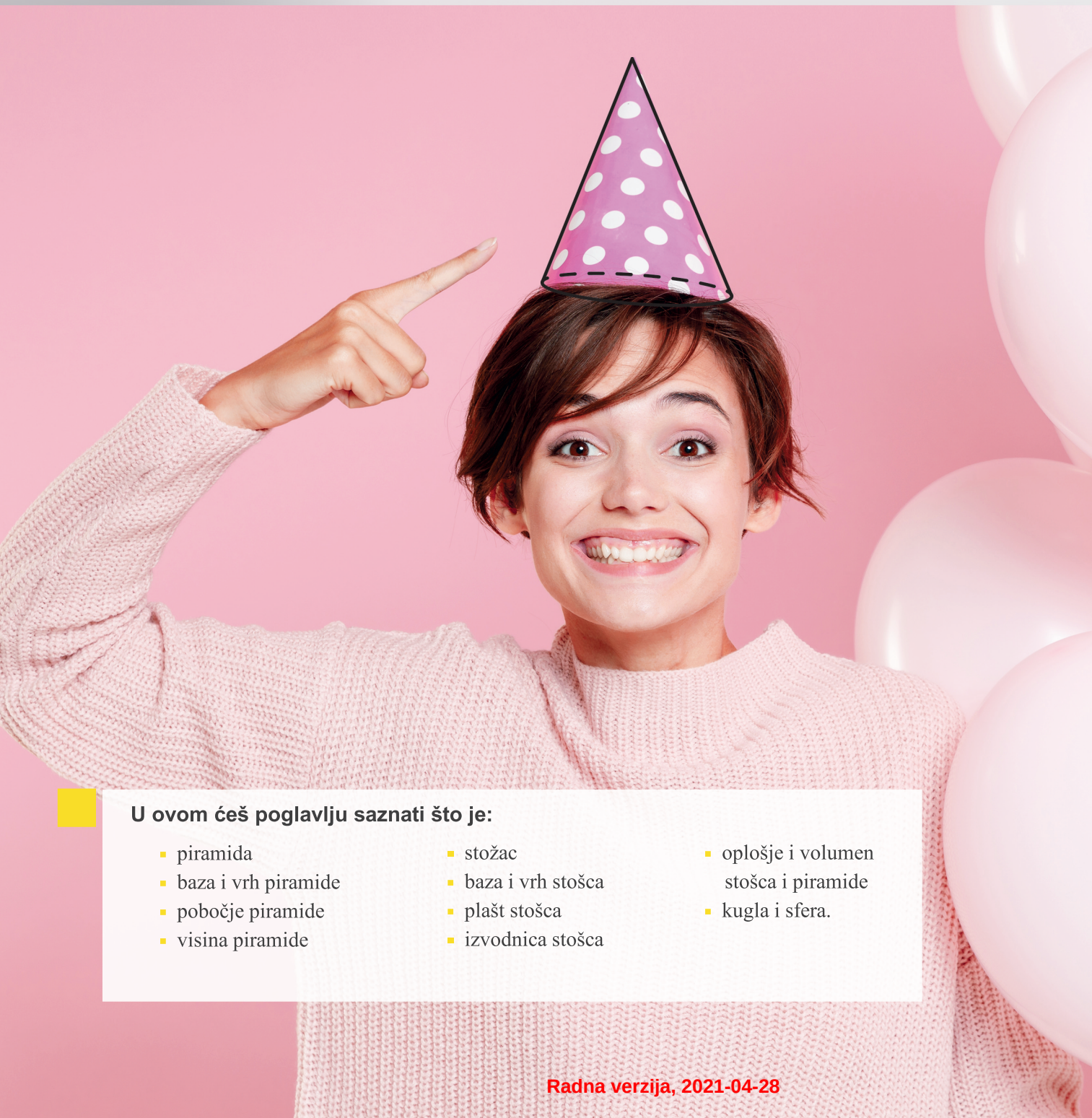
7.





8. $r = 15$, $P = 2r \cdot v = 480\ \text{cm}^2$. **9.** $2r : v = 2 : 3$, $r : v = 1 : 3$, $v = 3r$. $O = 2r\pi(r + v)$, $72\pi = 2r\pi \cdot 4r$, $r^2 = 9$, $r = 3\ \text{dm}$. **10. c)** Volumen je $180\pi\ \text{cm}^3$ pa je nova visina $5\ \text{cm}$.

8 Geometrijska tijela – piramida i stožac



U ovom ćeš poglavlju saznati što je:

- piramida
- baza i vrh piramide
- pobočje piramide
- visina piramide
- stožac
- baza i vrh stošca
- plašt stošca
- izvodnica stošca
- oplošje i volumen stošca i piramide
- kugla i sfera.

Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- prostoručno skicirati pravilnu četverostranu piramidu i stožac
- matematičkim jezikom opisati piramidu i stožac
- skicirati i matematičkim jezikom opisati elemente piramide i stošca (dijagonalni presjek, osni presjek, visina pobočke, visina tijela, polumjer i promjer baze, izvodnice)
- opisati oplošje i volumen nacrtanoga geometrijskog tijela
- oplošje povezati s mrežom geometrijskoga tijela
- uočavati i opisivati elemente tijela i veze među njima
- primijeniti računanje oplošja i volumena geometrijskih tijela kao što su piramide i stošci u problemskim situacijama
- istražiti i otkriti odnose volumena prizme i piramide
- preračunavati mjerne jedinice za duljinu, masu, volumen, površinu i mjeru kuta
- odabirati odgovarajuću mjernu jedinicu pri rješavanju problema
- analizirati problemsku situaciju i zapisivati ju linearnom i kvadratnom jednadžbom
- koristiti se površinom, oplošjem, volumenom i Pitagorinim poučkom za računanje nepoznatih elemenata piramide i stošca
- stvarati nove uratke i ideje složenije strukture
- kritički promišljati i vrednovati ideje uz pomoć učitelja
- procijeniti i odabrati potrebne među pronađenim informacijama
- pratiti učinkovitost učenja i svoje napredovanje tijekom učenja.

Oni koji žele znati više moći će:

- opisati kuglu i sferu
- računati oplošje i volumen kugle
- na modelu kvadra istražiti međusobne odnose pravaca u prostoru (usporednost, okomitost, mimoilaznost)
- na modelu kvadra istražiti međusobne odnose ravnina u prostoru (usporednost, okomitost).

8.1. Piramide

Na desnoj ploči uočavamo šiljke na tijelima. Jedna vrsta takvih tijela su piramide. Svakako najpoznatije piramide su građevine u Egiptu, ali piramide pronalazimo i u našoj bližoj okolini kad podignemo pogled do krovova kuća ili zvonika.

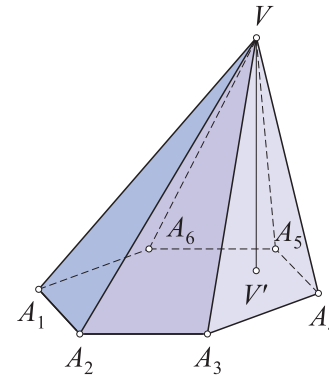
Piramida

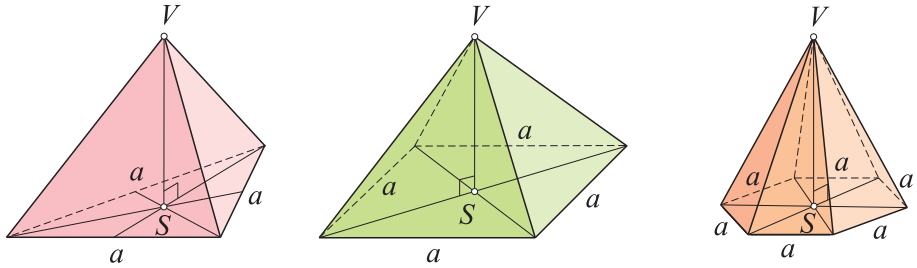
Neka je $A_1A_2\ldots A_n$ mnogokut, a V točka koja ne leži u ravnini tog mnogokuta. Tijelo omeđeno mnogokutom $A_1A_2\ldots A_n$ i s n trokuta VA_1A_2, VA_2A_3,..., VA_nA_1 zovemo **n-terostrana piramida.**

Mnogokut $A_1A_2\ldots A_n$ nazivamo **osnovka** ili **baza piramide**, a trokute A_1A_2V, A_2A_3V,..., A_nA_1V nazivamo **pobočke** ili **bočne strane piramide**. Sve trokute zajedno zovemo **pobočje piramide**.

Bridove baze nazivamo **osnovnim bridovima**, a dužine $\overline{VA_1}, \ldots \overline{VA_n}$ **pobočnim bridovima**.

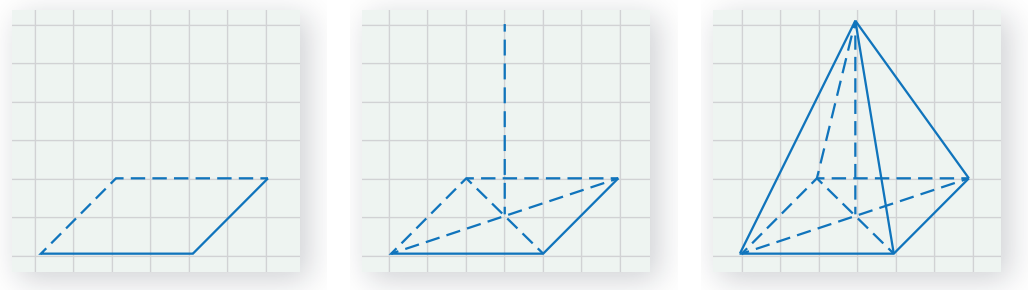
Točka V **vrh** je **piramide**. Spustimo iz V okomicu na bazu i njezino nožište (točka u kojoj siječe bazu) označimo s V'. Dužinu $\overline{VV'}$ nazivamo **visina piramide**. Ako je baza piramide pravilni mnogokut, a nožište visine upravo u središtu tome mnogokutu opisane kružnice, tada piramidu nazivamo **pravilna piramida**.





Na slici su prikazane pravilna trostrana, četverostrana i šesterostrana piramida. Njihove osnovke redom su jednakostraničan trokut, kvadrat i pravilan šesterokut, a nožište okomice iz vrha V središte je opisane kružnice tog mnogokuta.

Pokažimo kako se crta pravilna četverostrana piramida.



Crtež osnovke je paralelogram. Vodoravna crta dugačka je koliko i osnovni brid a.

Iznad sjecišta dijagonala paralelograma digne se okomica koja je duga kao i visina piramide.

Spoje se vrhovi osnovke s vrhom piramide. Isprekidane bridove sprijeda ne vidimo.

Primjer 1.

Baza pravilne četverostrane piramide je kvadrat sa stranicom duljine 12 cm. Duljina visine piramide je 6 cm. Izračunajmo duljinu pobočnog brida te piramide i površinu dijagonalnog presjeka piramide.

Rješenje: Uočimo u piramidi pravokutni trokut VSC. $\overline{VS}$ je visina piramide, $\overline{VC}$ pobočni brid, a $\overline{SC}$ polumjer opisane kružnice baze. Kako je baza kvadrat, $\overline{SC}$ je polovina dijagonale kvadrata.

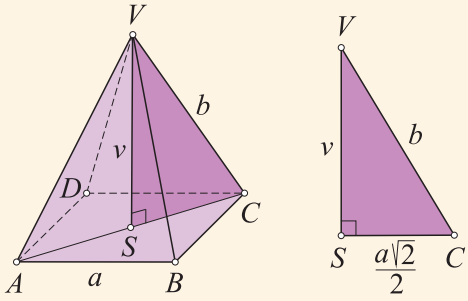
Prema Pitagorinu poučku vrijedi

$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$b^2 = 6^2 + (6\sqrt{2})^2 = 54$$

$$b = 6\sqrt{3}\text{ cm}.$$

Duljina pobočnog brida je $6\sqrt{3}\text{ cm}$.



Dijagonalni presjek je trokut VAC, tj. trokut koji sadrži vrh piramide i jednu dijagonalu baze. Njegova površina je:

$$P(VAC) = \frac{|AC| \cdot |VS|}{2} = \frac{a\sqrt{2}v}{2}$$

$$P(VAC) = \frac{12\sqrt{2} \cdot 6}{2}$$

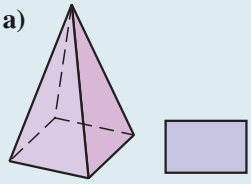
$$P(VAC) = 36\sqrt{2}\text{ cm}^2.$$

Površina dijagonalnog presjeka je $36\sqrt{2}\text{ cm}^2$.

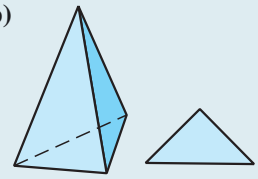
Zadatci 8.1.

1. Na slikama su piramide, kraj njih su nacrtane njihove baze. Koji su nazivi tih tijela?

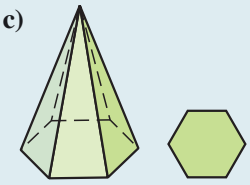
a)



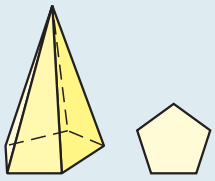
b)



c)



d)

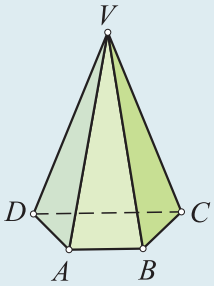


2. Prepiši pa ispuni tablicu.

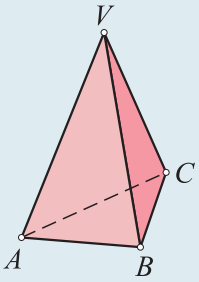
baza piramide	broj pobočki	broj bridova	broj strana
trokut			
četverokut			
šesterokut			
osmerokut			
n-terokut			

3. Na slikama su piramide. Ispiši njihove osnovne i pobočne bridove.

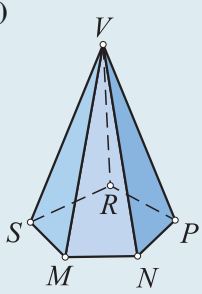
a)



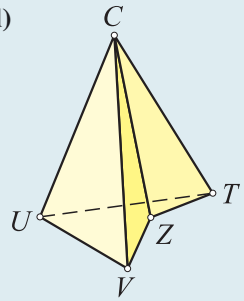
b)



c)



d)



4. Izračunaj visinu pravilne četverostrane piramide ako je dana duljina a stranice baze i duljina b pobočnog brida:

a) $a = 8\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$

b) $a = 3\sqrt{2}\text{ dm}$, $b = 500\text{ mm}$.

5. Nacrtaj pravilnu četverostranu piramidu s osnovnim bridom duljine $a = 2.5\text{ cm}$ i visinom $v = 2\text{ cm}$.

6. Izračunaj duljinu pobočnog brida pravilne četverostrane piramide ako su dane duljine osnovnog brida i visine piramide:

a) $a = 32\text{ cm}$, $v = 28\text{ cm}$

b) $a = 16\text{ cm}$, $v = 8\sqrt{2}\text{ cm}$

c) $a = 24\text{ dm}$, $v = 1.4\text{ m}$

d) $a = 2\sqrt{2}\text{ m}$, $v = 2\sqrt{3}\text{ m}$.

7. Izračunaj površinu baze pravilne četverostrane piramide ako su dane duljine pobočnog brida i visine piramide:

a) $b = 44\text{ cm}$, $v = 28\text{ cm}$

b) $b = 18\text{ dm}$, $v = 1.4\text{ m}$.

8. Izračunaj duljinu visine pobočke pravilne četverostrane piramide ako su dane duljine osnovnog i pobočnog brida:

a) $a = 20\text{ cm}$, $b = 26\text{ cm}$

b) $a = 24\text{ dm}$, $b = 2\text{ m}$.

9. Izračunaj duljinu visine pobočke pravilne četverostrane piramide ako su zadane duljine osnovnog brida i visine piramide:

a) $a = 20\text{ cm}$, $v = 24\text{ cm}$

b) $a = 12\text{ dm}$, $v = 80\text{ cm}$.

10. Izračunaj duljinu stranice baze pravilne četverostrane piramide ako je zadana duljina visine piramide v i duljina visine pobočke v_1:

a) $v = 16\text{ cm}$, $v_1 = 2\text{ dm}$

b) $v = 16\text{ dm}$, $v_1 = 34\text{ dm}$.

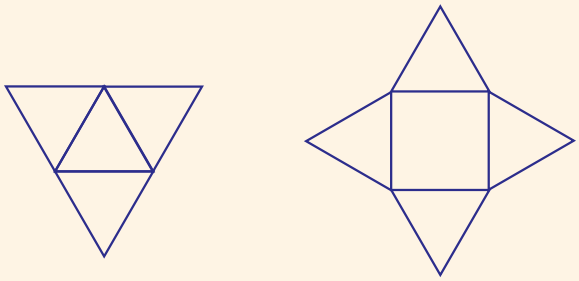
8.2. Oplošje piramide

Piramida (n -terostrana) je omeđena jednom bazom i s n trokuta koji čine pobočje piramide. Ti likovi čine mrežu piramide.

Primjer 1.

Nacrtajmo mreže pravilne trostrane i četverostrane piramide kojima su svi bridovi jednakih duljina.

Rješenje: Mreža zadane trostrane piramide sastoji se od četiriju jednakostraničnih trokuta – jedne baze i triju pobočaka. Ta se piramida naziva još i **pravilni tetraedar**. Mreža zadane četverostrane piramide sastoji se od kvadrata (baza) i četiriju jednakostraničnih trokuta (pobočke).



Zbrojimo li površinu baze i površine svih trokuta, dobit ćemo **oplošje piramide.**

Oplošje piramide

Oplošje piramide zbroj je površina svih njezinih strana, tj.

$$O = B + P,$$

gdje je B površina baze, a P površina pobočja.

U pravilnoj n -terostranoj piramidi pobočje čini n jednakokračnih trokuta, a površina svakog od njih glasi:

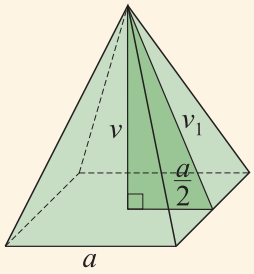
$$P_{\triangle} = \frac{a \cdot v_1}{2},$$

gdje je a duljina stranice baze, a v_1 duljina visine pobočnog trokuta.

Primjer 2.

Izračunajmo oplošje pravilne četverostrane piramide kojoj baza ima stranice duljine 48 cm, a duljina visine piramide je 10 cm.

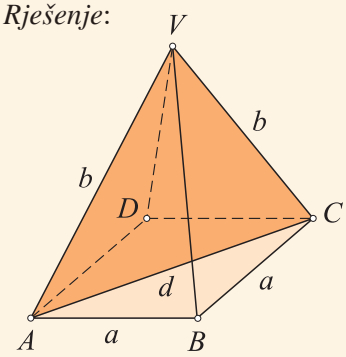
Rješenje: Iz $v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ dobivamo $v_1^2 = 10^2 + 24^2$, $v_1 = 26\,\text{cm}$, pa je površina pobočnog trokuta $P_{\triangle} = \frac{av_1}{2} = 624\,\text{cm}^2$. Površina baze je $B = a^2 = 2\,304\,\text{cm}^2$, pa oplošje iznosi $O = B + 4P_{\triangle} = 2\,304 + 4 \cdot 624 = 4\,800\,\text{cm}^2$.



Primjer 3.

Dijagonalni presjek pravilne četverostrane piramide je jednakokračan trokut sa stranicama duljina 5 cm, 5 cm, $6\sqrt{2}\text{ cm}$. Izračunajmo oplošje piramide.

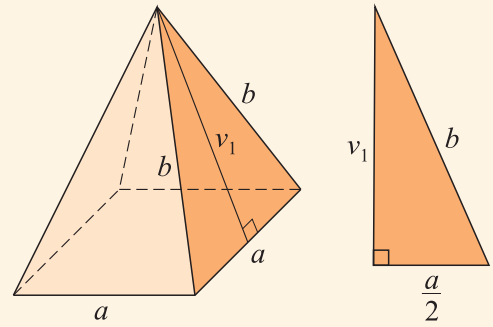
Rješenje:



Dijagonalni presjek pravilne piramide je jednakokračan trokut ACV kojemu su kraci upravo pobočni bridovi piramide, tj. $b = 5\text{ cm}$, a osnovica mu je dijagonala baze. U ovom slučaju, dijagonala baze ima duljinu $d = a\sqrt{2}$ jer se radi o dijagonali kvadrata. Dakle, imamo:

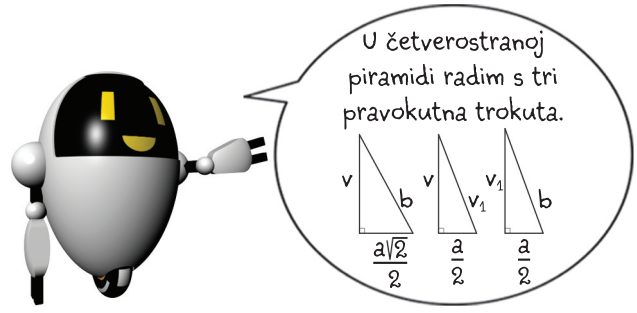
$$d = 6\sqrt{2}, \quad a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}, \quad a = 6\text{ cm}.$$

Za oplošje piramide treba poznavati duljinu visine v_1 bočne strane.



Pobočka ove piramide je jednakokračan trokut s krakovima duljine b i osnovicom duljine a, pa duljinu visine v_1 računamo prema Pitagorinu poučku:

$$v_1^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$v_1^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$
$$v_1 = 4\text{ cm}.$$
$$O = B + P = a^2 + 4 \cdot \frac{av_1}{2} = 6^2 + 2 \cdot 6.4 = 36 + 48 = 84\text{ cm}^2.$$



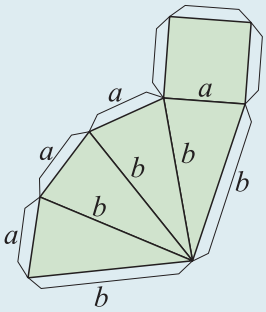
Zadatci 8.2.

1. Nacrtaj mrežu pravilne trostrane piramide ako je zadana duljina a osnovnog i duljina b pobočnog brida:

a) $a = 4\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$

b) $a = b = 3.5\text{ cm}$.

2. Na papiru nacrtaj mrežu kao na slici s danim dimenzijama. Izreži mrežu i napravi piramidu.



3. Nacrtaj mrežu pravilne četverostrane piramide ako je duljina stranice baze 3 cm i duljina pobočnog brida je 5 cm.

4. Nacrtaj mrežu pravilne četverostrane piramide ako je zadana duljina a osnovnog brida i duljina v_1 visine pobočke:

a) $a = 3\text{ cm}$, $v_1 = 2\text{ cm}$

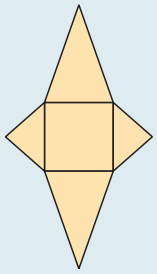
b) $a = v_1 = 2.5\text{ cm}$.

5. Nacrtaj mrežu pravilne šesterostrane piramide čiji bridovi su jednakih duljina.

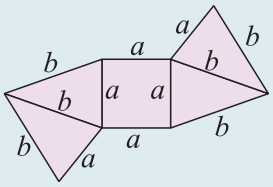
6. Nacrtaj mrežu pravilne šesterostrane piramide ako je duljina stranice baze 2 cm, a duljina visine pobočke je 3 cm.

7. Koja slika ne prikazuje mrežu pravilne četverostrane piramide?

a)



b)



8. Izračunaj oplošje pravilne četverostrane piramide ako je zadana duljina a stranice baze i duljina v visine piramide:

a) $a = 12\text{ cm}$, $v = 2\sqrt{7}\text{ cm}$

b) $a = 24\text{ cm}$, $v = 22\text{ mm}$.

9. Izračunaj oplošje pravilne četverostrane piramide kojoj su dane visine piramide i visine pobočke:

a) $v = 48\text{ cm}$, $v_1 = 52\text{ cm}$

b) $v = 1.6\text{ m}$, $v_1 = 34\text{ dm}$.

10. Izračunaj oplošje pravilne četverostrane piramide kojoj su dane duljina osnovnog i pobočnog brida:

a) $a = 24\text{ cm}$, $b = 0.2\text{ m}$

b) $a = 32\text{ dm}$, $b = 34\text{ dm}$.

11. Izračunaj oplošje pravilne četverostrane piramide ako su dane duljina osnovnog brida i visine pobočke piramide:

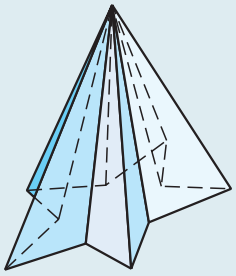
a) $a = 10\text{ cm}$, $v_1 = 12\text{ cm}$

b) $a = 8\text{ cm}$, $v_1 = 0.8\text{ dm}$.

12. Površina baze pravilne četverostrane piramide je 400 cm^2, a duljina visine piramide je 24 cm. Izračunaj oplošje piramide.

13. Površina baze pravilne četverostrane piramide dvostruko je manja od pobočja. Kolike su duljine osnovnog i pobočnog brida ako je visina piramide duga $4\sqrt{3}\text{ cm}$?

14. U trgovini božićnim ukrasima Tina je pronašla ukras kao na slici. Izjavila je: "Evo jedne lijepe piramide za moje drvce." Slažeš li se s njezinom tvrdnjom da je to piramida?



15. Kako će se promijeniti oplošje pravilne četverostrane piramide ako se osnovni brid smanji dva puta, a visina poveća dva puta?

8.3. Volumen piramide

Napravimo od tvrđeg papira modele prizme i piramide jednakih baza i visina, ali bez jedne baze.

Napunimo piramidu rižom (ili šećerom, pijeskom i sl.) i tu rižu presipajmo u model prizme.

Ponovimo taj postupak još dva puta.

Nakon trećeg presipavanja, prizma je potpuno napunjena.

Taj pokus možemo izvesti s modelima raznovrsnih prizama i piramida: trostranim, četverostranim i drugim.

Dakle, volumen prizme trostruko je veći od volumena piramide sukladne baze i visine jednake duljine, tj.

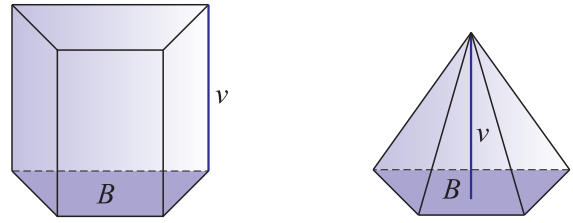
$$V_{\text{piramide}} = \frac{1}{3} V_{\text{prizme}}$$
$$V_{\text{piramide}} = \frac{1}{3} Bv.$$

Volumen ili obujam piramide

Volumen piramide jednak je trećini umnoška površine baze i duljine visine piramide, tj.

$$V = \frac{1}{3} Bv.$$

Budući da je $B \cdot v$ jednak volumenu prizme s površinom baze B i visinom v, često ćemo za volumen piramide reći da je jednak trećini volumena prizme jednake baze i jednake visine.



Ako prizma i piramida imaju baze jednakih površina, a visine jednakih duljina, tada je volumen prizme tri puta veći od volumena piramide.

Primjer 1.

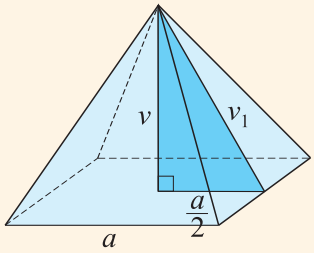
Duljina stranice baze pravilne trostrane piramide je $6\ \text{cm}$, a duljina visine piramide $2\sqrt{3}\ \text{cm}$. Izračunaj volumen piramide.

Rješenje: Iz $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i $V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot v$ slijedi $V = \dfrac{a^2 v\sqrt{3}}{12} = 18\ \text{cm}^3$.

Primjer 2.

Oplošje pravilne četverostrane piramide iznosi $4\,800\ \text{cm}^2$. Izračunaj volumen te piramide ako joj je duljina stranice baze $48\ \text{cm}$.

Rješenje: Površina baze je $B = a^2 = 2\,304\ \text{cm}^2$, pa je površina pobočja jednaka $P = O - B = 2\,496\ \text{cm}^2$. No, pobočje čine 4 jednakokračna trokuta površine $P_\triangle = \frac{av_1}{2}$, pa je $P = 4P_\triangle = 2av_1$ i $v_1 = \frac{P}{2a} = 26\ \text{cm}$.



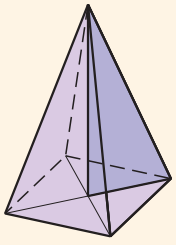
$$v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$26^2 = v^2 + \left(\frac{48}{2}\right)^2$$
$$v^2 = 676 - 576 = 100$$
$$v = 10\ \text{cm}$$
$$V = \frac{1}{3}Bv = \frac{1}{3}\cdot 2\,304 \cdot 10 = 7\,680\ \text{cm}^3.$$

Volumen piramide je $7\,680\ \text{cm}^3$.

Primjer 3.

Visina i pobočni brid pravilne četverostrane piramide odnose se kao $4 : 5$. Duljina osnovnog brida je $6\sqrt{2}\ \text{dm}$. Izračunajmo volumen te piramide.

Rješenje:



$v : b = 4 : 5$

$\underline{a = 6\sqrt{2}\ \text{dm}}$

$V = ?$

Prema Pitagorinu poučku vrijedi:

$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{5}{4}v\right)^2 = v^2 + \left(\frac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$\frac{25}{16}v^2 = v^2 + 36$$
$$\frac{25}{16}v^2 - v^2 = 36$$
$$\frac{9}{16}v^2 = 36$$
$$v^2 = 36 \cdot \frac{16}{9} = 4 \cdot 16$$
$$v = 8\ \text{dm}$$

$$V = \frac{1}{3}Bv$$
$$V = \frac{1}{3}(6\sqrt{2})^2 \cdot 8$$
$$V = 192\ \text{dm}^3.$$

Volumen piramide je $192\ \text{dm}^3$.

Zadatci 8.3.

1. Prepiši i popuni tablicu u kojoj je v duljina visine piramide, B je površina baze, a V je volumen piramide.

B	v	V
$120\ \text{cm}^2$	7 cm	
$8\ \text{dm}^2$	6 cm	
$42\ \text{mm}^2$	0.5 mm	
$100\ \text{cm}^2$		$2\,000\ \text{cm}^3$
$81\ \text{cm}^2$		$72.9\ \text{dm}^3$
	12 m	$144\ \text{m}^3$
	0.5 dm	$12.5\ \text{cm}^3$

2. Izračunaj volumen pravilne četverostrane piramide čiji osnovni brid i visina imaju duljine:

a) $a = 40\ \text{cm}$, $v = 12\ \text{cm}$

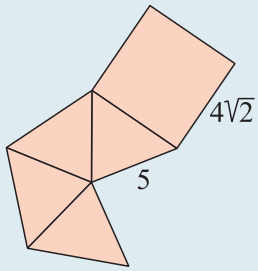
b) $a = 72\ \text{cm}$, $v = 6.6\ \text{dm}$.

3. Izračunaj volumen pravilne četverostrane piramide čiji pobočni i osnovni brid imaju duljine:

a) $a = 40\ \text{cm}$, $b = 20\sqrt{6}\ \text{cm}$

b) $a = 8\sqrt{2}\ \text{cm}$, $b = 0.1\ \text{m}$.

4. Mreža pravilne četverostrane piramide prikazana je na slici. Izračunaj njezin volumen.



5. Izračunaj volumen pravilne četverostrane piramide čiji pobočni brid i visina imaju duljine:

a) $v = 40\ \text{cm}$, $b = 58\ \text{cm}$

b) $v = 4\sqrt{2}\ \text{cm}$, $b = 0.8\ \text{dm}$.

6. Izračunaj volumen pravilne četverostrane piramide čija visina pobočke i visina piramide imaju duljine:

a) $v = 24\ \text{cm}$, $v_1 = 26\ \text{cm}$

b) $v = 32\ \text{cm}$, $v_1 = 0.68\ \text{m}$.

7. Opseg baze pravilne četverostrane piramide je $48\ \text{cm}$, a njezina je visina $27\ \text{cm}$. Koliki joj je volumen?

8. Dijagonalni presjek pravilne četverostrane piramide je jednakostraničan trokut duljine stranice $3\sqrt{2}\ \text{dm}$. Izračunaj joj volumen.

9. Dijagonalni presjek pravilne četverostrane piramide je jednakostraničan trokut površine $\frac{225\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$. Izračunaj volumen te piramide.

10. Visina i osnovni brid pravilne četverostrane piramide odnose se kao $3 : 8$. Visina je pobočke duga $15\ \text{dm}$. Izračunaj oplošje i volumen te piramide.

11. Metalna pravilna uspravna četverostrana piramida s osnovnim bridom duljine $12\ \text{cm}$ i visinom duljine $36\ \text{cm}$ pretopljena je u kocku. Koliki je brid kocke?

12. Mramorni ukras na stupu ima oblik četverostrane pravilne piramide visine $12\ \text{cm}$. Duljina brida baze je $24\ \text{cm}$. Koliku masu ima taj ukras ako je gustoća mramora $2\,800\ \text{kg/m}^3$? Koliko košta poliranje tog mramornog ukrasa ako je cijena poliranja $1\ \text{dm}^2$ 50 kuna?

13. Staklena piramida čija je baza kvadrat stranice $4\ \text{cm}$ do vrha je napunjena vodom. Ta je voda prelivena u kvadar čija je baza kvadrat stranice $4\ \text{cm}$. Voda je u kvadru do visine $2.5\ \text{cm}$. Kolika je visina piramide?

14. U sljedećem tekstu o piramidi nalazi se nekoliko pogrešaka. Pronađi te pogreške i ispravi ih.

Piramida ima dvije baze. Svakoj se piramidi volumen računa pomoću formule $V = \frac{1}{3}Bv$. Ako je B stalna veličina, tada su veličine V i v proporcionalne. Ako je volumen V stalan, tada su veličine B i v proporcionalne. Ako u pravilnoj četverostranoj piramidi osnovni brid povećamo dva puta, a visina ostane jednaka, tada će se volumen povećati dva puta.

8.4. Stožac

Pogledajmo slike na kojima su prikazani krovovi tornjeva, kornet sladoleda, vrh olovke.

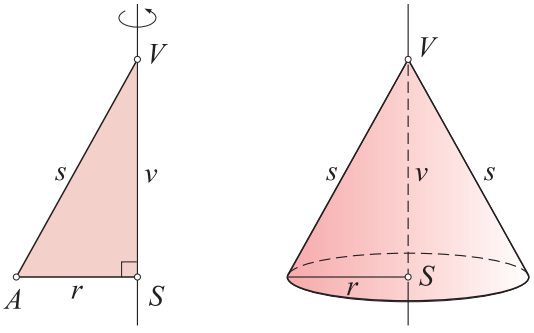


To su predmeti oblika stošca.

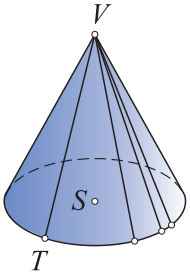
Opišimo i nacrtajmo to geometrijsko tijelo.

Uspravni stožac

Uspravni stožac je tijelo nastalo rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne svoje katete.



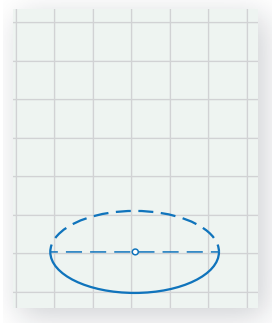
Krug koji nastaje rotacijom katete $\overline{AS}$ naziva se **baza** ili **osnovka** stošca. Polumjer mu je duljine r. Točka V naziva se **vrh stošca**, a pravac VS **os stošca**.



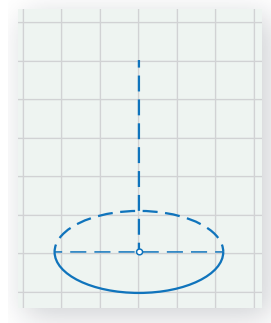
Dužine $\overline{VT}$, pri čemu je T na kružnici $k(S,r)$ zovu se **izvodnice stošca**. Njihova je duljina označena sa s. Sve izvodnice zajedno čine jednu zakrivljenu plohu koju zovemo **plašt stošca**. Dužina $\overline{VS}$ naziva se **visina stošca** i njezinu duljinu označavamo s v. Prema Pitagorinu poučku vrijedi

$$s^2 = v^2 + r^2.$$

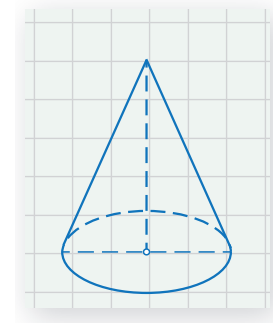
Pokažimo kako se crta uspravni stožac.



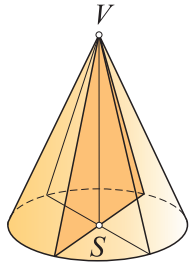
U stvarnosti baza stošca je krug, a na slici crtamo elipsu.

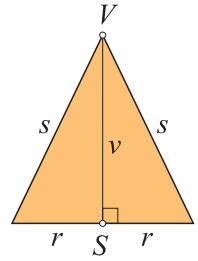


Iz središta te elipse nacrta se okomica koja je dugačka kao i visina stošca.



Iz vrha se povuku pravci koji dodiruju elipsu.



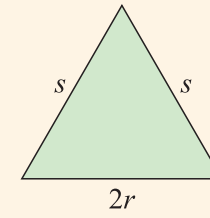


Presjek stošca i ravnine koja sadrži os VS zove se **osni presjek**. U uspravnom stošcu svaki je osni presjek jednakokračan trokut s osnovicom duljine $2r$ i krakom duljine s.

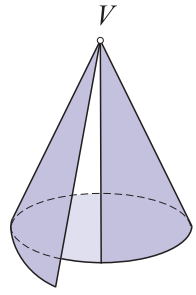
Primjer 1.

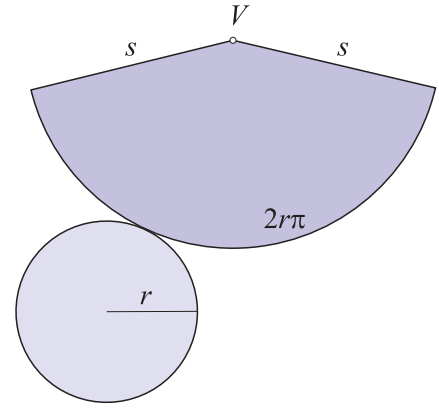
Izračunajmo duljine: visine, izvodnice stošca i polumjera njegove baze ako mu je osni presjek jednakostraničan trokut površine $P = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Rješenje: Budući da je osni presjek stošca jednakostraničan trokut vrijedi da je $s = 2r$, a iz $P = \dfrac{s^2\sqrt{3}}{4}$, slijedi da je $s = 12\ \text{cm}$. Tada je $r = 6\ \text{cm}$, a kako je visina stošca ujedno i visina toga jednakostraničnog trokuta, vrijedi $v = \dfrac{s\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$.



Kakva je mreža stošca? Razrežemo li plašt stošca po jednoj izvodnici i položimo li ga u ravninu, dobit ćemo kružni isječak polumjera s kojemu je duljina luka jednaka opsegu baze, tj. duljine $2r\pi$.





Dakle, mreža stošca sastoji se od kružnog isječka i kruga, pri čemu je duljina luka kružnog isječka jednaka opsegu kruga.

Izvedimo formulu za površinu plašta stošca.

Plašt je kružni isječak s polumjerom s. Njegova površina je:

$$P = \frac{s^2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha$$
$$P = \frac{s}{2} \cdot \frac{s\pi}{180^\circ} \cdot \alpha.$$

Broj $l = \frac{s\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$ je duljina kružnog luka s polumjerom s, a to je upravo jednako opsegu baze stošca:

$$l = \frac{s\pi}{180^\circ}\alpha = 2r\pi$$
$$P = \frac{s}{2} \cdot \frac{s\pi}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{s}{2} \cdot 2r\pi = r\pi s.$$

Površina cijele mreže, tj. oplošje stošca jednako je zbroju površine kruga i plašta, pa formula glasi:

$$O = r^2\pi + r\pi s,$$

a možemo je pisati i drukčije $O = r\pi(r+s)$.

Oplošje stošca

Oplošje stošca jednako je zbroju površina baze i plašta stošca, tj. $O = r\pi(r+s)$, gdje je r duljina polumjera baze, a s duljina izvodnice stošca.

Površina plašta dana je formulom: $P = r\pi s$.

Primjer 2.

Izračunajmo oplošje stošca kojemu je duljina visine $20\sqrt{2}$ cm, a duljina polumjera baze 10 cm. Odredimo kut kružnog isječka koji se dobiva polaganjem plašta u ravninu.

Rješenje:

$v = 20\sqrt{2}$ cm
$r = 10$ cm
$O,\ \alpha = ?$

$s^2 = r^2 + v^2$
$s^2 = 10^2 + (20\sqrt{2})^2$
$s^2 = 900$
$s = 30$ cm

$l = 2r\pi$
$l = 20\pi$ cm

$O = r\pi(r+s)$
$O = 10\pi(10+30)$
$O = 400\pi$ cm^2
$l = \frac{s\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$

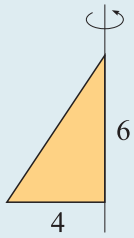
$20\pi = \frac{30\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$
$\alpha = \frac{20\pi \cdot 180^\circ}{30\pi}$
$\alpha = 120^\circ.$

Oplošje je 400π cm^2, a kut je 120°.

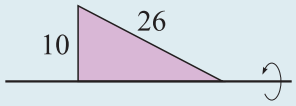
Zadatci 8.4.

1. Odredi duljinu visine i polumjera baze stošca koji nastaju rotacijom likova na slikama.

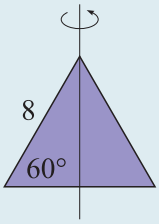
a)



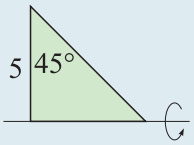
b)



c)

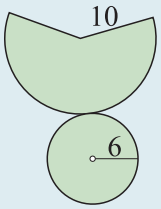


d)

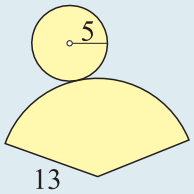


2. Nacrtana je mreža stošca. Odredi duljinu polumjera baze i duljinu visine tog stošca.

a)



b)



3. Nacrtaj stožac ako su mu zadani r i v:

a) $r = 2\ \text{cm}$, $v = 1.5\ \text{cm}$

b) $r = 3.5\ \text{cm}$, $v = 2.8\ \text{cm}$.

4. Prepiši tablicu i popuni je ako su r, v, s elementi stošca.

r	3 cm	1.6 dm			1 m
v	4 cm	30 cm	6 cm	6 m	
s			1 dm	610 cm	26 dm

5. Izvodnica stošca je za 2 cm dulja od polumjera baze. Izračunaj duljinu polumjera baze stošca ako je duljina visine 6 cm.

6. Osni presjek uspravnog stošca je jednakostraničan trokut sa stranicom duljine 36 cm. Izračunaj duljine polumjera baze, izvodnice i visine stošca.

7. Osni presjek uspravnog stošca je jednakokračan pravokutan trokut s katetom duljine 18 cm. Izračunaj duljine polumjera baze, izvodnice i visine stošca.

8. Izvodnica uspravnog stošca s ravninom baze zatvara kut od 30°. Izračunaj duljinu visine stošca i duljinu polumjera njegove baze ako je duljina izvodnice 14 dm.

9. Plašt stošca razvijen u ravninu je polovina kruga polumjera 8 cm. Izračunaj duljinu polumjera baze i duljinu visine stošca.

10. Plašt stošca razvijen u ravninu je isječak kruga polumjera 21 cm s pripadnim središnjim kutom 120°. Izračunaj duljinu polumjera baze i duljinu visine stošca.

11. Izračunaj oplošje uspravnog stošca ako je dana duljina polumjera baze i duljina izvodnice:

a) $r = 8\ \text{cm}$, $s = 12\ \text{cm}$

b) $r = 4.2\ \text{dm}$, $s = 24\ \text{cm}$.

12. Oplošje stošca je $640\pi\ \text{cm}^2$, a duljina polumjera baze je 16 cm. Izračunaj duljinu izvodnice, visine i površinu plašta.

13. Opseg baze stošca je 128π cm. Izračunaj mu oplošje ako je izvodnica jednaka promjeru.

14. Površina baze je $64\pi\ \text{cm}^2$. Izračunaj oplošje stošca ako mu je izvodnica dvostruko dulja od polumjera.

15. Izračunaj oplošje stošca čiji je plašt, kad se razmota u ravnini, četvrtina kruga polumjera 16 cm.

16. Koliko iznosi oplošje stošca kojemu je duljina polumjera baze 12 cm, a plašt razvijen u ravnini kružni je isječak sa središnjim kutom od 216°?

17. Osni presjek stošca ima površinu $2\,880\ \text{cm}^2$, a duljina polumjera baze mu je 60 cm. Izračunaj duljinu visine i izvodnice stošca.

18. Plašt stošca ima površinu 188.4 cm, a izvodnica je duga 1 dm. Izračunaj oplošje stošca.

8.5. Volumen stošca

Pokusima s piramidom i prizmom jednakih visina i baza pokazali smo da je volumen prizme tri puta veći od volumena piramide. Za stožac i valjak vrijedi isti odnos volumena.

Uz pomoć sličnog pokusa možemo se uvjeriti da kad imamo stožac i valjak kojima su baze sukladni krugovi i visine jednake, tada je volumen stošca tri puta manji od volumena valjka. Dakle, vrijedi:

$$V_{\text{stošca}} = \frac{1}{3} V_{\text{valjka}}.$$

Volumen ili obujam stošca

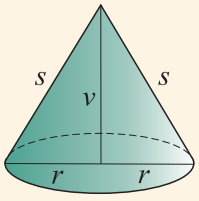
Volumen stošca jednak je trećini umnoška površine baze i duljine visine, tj.

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi v.$$

Primjer 1.

Izračunajmo volumen stošca čiji je osni presjek jednakostraničan trokut sa stranicom duljine $12\ \text{cm}$.

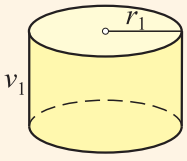
Rješenje: Budući da je osni presjek jednakostraničan trokut, vrijedi da je $s = 2r = 12\ \text{cm}$, pa je $r = 6\ \text{cm}$, a visina $v = \frac{s\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$. Tada je volumen stošca jednak $V = \frac{1}{3} r^2 \pi v = \frac{1}{3} 6^2 \pi \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$.



Primjer 2.

Svijeća ima oblik valjka polumjera baze $3\ \text{cm}$ i visine $4\ \text{cm}$. Treba je pretopiti u svijeću oblika stošca kojemu je baza četiri puta veća od baze valjka. Kolika će biti visina stošca?

Rješenje:



$B_{\text{valjka}} = r_1^2 \pi$

$B_{\text{valjka}} = 3^2 \pi = 9\pi\ \text{cm}^2$

$V_{\text{valjka}} = B_{\text{valjka}} \cdot v_1 = 36\pi\ \text{cm}^3$

$B_{\text{stošca}} = 4 B_{\text{valjka}}$

$B_{\text{stošca}} = 4 \cdot 9\pi = 36\pi\ \text{cm}^2$

Pri pretapanju volumeni se ne mijenjaju.

$V_{\text{stošca}} = V_{\text{valjka}} = 36\pi\ \text{cm}^3$

$V_{\text{stošca}} = \frac{1}{3} B_{\text{stošca}} \cdot v$

$36\pi = \frac{1}{3} \cdot 36\pi \cdot v$

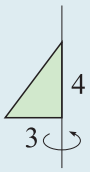
$v = 3\ \text{cm}.$

Duljina visine stošca je $3\ \text{cm}$.

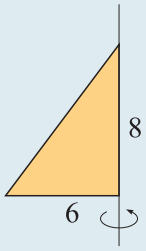
Zadatci 8.5.

1. Izračunaj oplošje i volumen tijela nastalog rotacijom lika prikazanog na slikama.

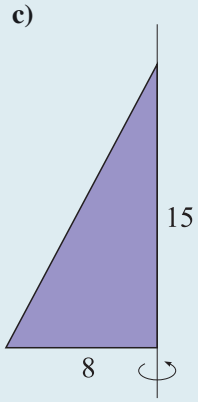
a)



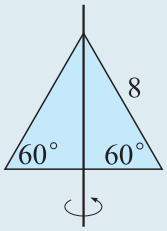
b)



c)



d)



2. Izračunaj volumen stošca ako je zadana površina baze i duljina visine:

a) $B = 128\pi\ \text{cm}^2$, $v = 1\ \text{cm}$

b) $B = 492\ \text{dm}^2$, $v = 8\ \text{cm}$.

3. Izračunaj volumen stošca kojem su dane duljine izvodnice i visine:

a) $v = 16\ \text{cm}$, $s = 2\ \text{dm}$

b) $v = 0.18\ \text{mm}$, $s = 0.82\ \text{mm}$.

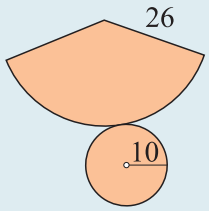
4. Osni presjek stošca ima površinu $768\ \text{cm}^2$, a duljina visine mu je $16\ \text{cm}$. Izračunaj oplošje i volumen stošca.

5. Osni presjek stošca ima površinu $192\ \text{cm}^2$, a polumjer baze mu je $10\ \text{cm}$. Izračunaj volumen stošca.

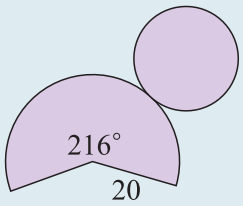
6. Opseg baze stošca je $84\pi\ \text{dm}$, a visina mu je duga $72\ \text{dm}$. Odredi duljinu polumjera baze i volumen stošca.

7. Izračunaj volumen stošca ako mu je zadana mreža.

a)



b)



8. Plašt stošca razgrnut u ravninu čini polukrug polumjera $20\ \text{cm}$. Koliko iznosi volumen tog stošca?

9. Oplošje stošca iznosi $480\pi\ \text{cm}^2$, a duljina polumjera baze mu je $12\ \text{cm}$. Izračunaj volumen ovog stošca.

10. Pijesak stoji u hrpama oblika stošca visine $1.8\ \text{m}$ i promjera baze $8\ \text{m}$. Koliko je takvih hrpa pijeska potrebno da bi se napunio spremnik vagona valjkastog oblika dužine $18.75\ \text{m}$, a promjera $3.2\ \text{m}$?

11. Osni presjek stošca je jednakostraničan trokut. Izračunaj volumen stošca ako mu je oplošje $1\,350\pi$.

12. Od vrha do kraja olovke ima $18\ \text{cm}$, a duljina nenašiljenog dijela olovke je $16.2\ \text{cm}$. Ako je promjer olovke $16\ \text{mm}$, koliki joj je volumen?

13. Hrpa pšenice ima oblik stošca promjera $12\ \text{m}$ i visinu $2.5\ \text{m}$. Koliko je kg pšenice u toj hrpi ako $1\ \text{hl}$ pšenice ima masu $75\ \text{kg}$?

14. Čaša ima oblik stošca s unutarnjim promjerom $7\ \text{cm}$ i visinom $6\ \text{cm}$. Koliko se čaša može napuniti rastakanjem 1 litre soka?

15. Koja je od ovih rečenica istinita?

a) Ako se polumjer stošca poveća dva puta, tada se njegov volumen poveća četiri puta.

b) Ako se polumjer stošca smanji tri puta, tada se njegov volumen smanji tri puta.

c) Ako se visina stošca poveća pet puta, tada se njegov volumen poveća pet puta.

d) Ako se visina stošca smanji 10 puta, tada se njegov volumen smanji 100 puta.

8.6. Sfera i kugla

Često nailazimo na predmete koji imaju oblik kugle. To su kuglice sladoleda, okruglice od šljiva, dječje lopte, mjehuri zraka u vodi, mjehuri sapunice, kuglice u kugličnim ležajevima i dr. Čak i za naš planet Zemlju kažemo da ima oblik kugle iako je zbog rotacije spljoštena na polovima.



Opišimo sferu i kuglu matematičkim jezikom.

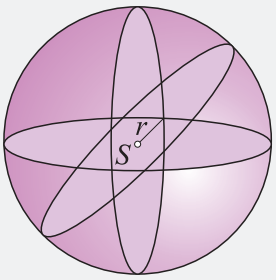
Sfera

Sfera je skup svih točaka prostora koje su od jedne čvrste točke S tog prostora jednako udaljene.

Točka S naziva se **središte sfere**, a udaljenost od točke sfere do S zovemo **polumjer sfere** i označavamo ga s r.

Kugla

Kugla je skup svih točaka prostora čija je udaljenost od čvrste točke S tog prostora manja ili jednaka r, $r > 0$.



Sfera je rub kugle.
Površina sfere je oplošje kugle.

Oplošje i volumen kugle polumjera r dani su sljedećim formulama.

Oplošje i volumen kugle

Formule za oplošje i volumen kugle polumjera r su

$$O = 4r^2\pi \qquad \text{i} \qquad V = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Primjer 1.

Ako je oplošje kugle $576\pi\ \text{cm}^2$, izračunajmo joj polumjer, volumen i površinu presjeka ravninom koja sadrži središte.

Rješenje:

$\underline{O = 576\pi\ \text{cm}^2}$

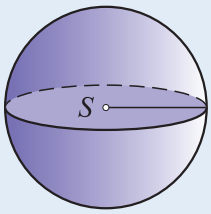
$r,\ V,\ P = ?$

$$O = 4r^2\pi$$
$$576\pi = 4r^2\pi$$
$$r^2 = 144$$
$$r = 12\ \text{cm}$$

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi$$
$$V = \frac{4}{3}\cdot 12^3\pi$$
$$V = 2\,304\pi\ \text{cm}^3.$$

Kad presiječemo kuglu ravninom koja sadrži središte, dobivamo krug čiji polumjer je r. Taj krug naziva se **glavni krug**.

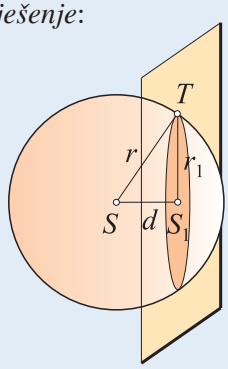
$$P = r^2\pi = 12^2\pi = 144\pi\ \text{cm}^2.$$



Primjer 2.

Na kojoj je udaljenosti od središta kugle ravnina čiji presjek s kuglom ima površinu $576\pi\ \text{cm}^2$? Polumjer kugle je $26\ \text{cm}$.

Rješenje:



Presiječemo li kuglu ravninom koja ne prolazi središtem, dobit ćemo krug. Iz podatka da je površina presjeka 576π, zaključujemo da je polumjer toga kruga $r_1 = 24\ \text{cm}$. U pravokutnom trokutu SS_1T vrijedi $d^2 = r^2 - r_1^2$, $d = 10\ \text{cm}$. Dakle, presječna ravnina udaljena je $10\ \text{cm}$ od središta kugle.

Zadatci 8.6.

1. Izračunaj oplošje i volumen kugle čiji polumjer je:

a) $r = 8\ \text{cm}$ **b)** $r = 0.4\ \text{dm}$

c) $r = 0.5\ \text{dm}$ **d)** $r = 1.5\ \text{cm}$.

2. Izračunaj oplošje i volumen kugle ako je promjer kugle:

a) $d = 28\ \text{cm}$ **b)** $d = 24.8\ \text{dm}$.

3. Izračunaj polumjer kugle ako je zadano njezino oplošje:

a) $O = 16\pi\ \text{cm}^2$ **b)** $O = 576\pi\ \text{dm}^2$

c) $O = 2\,461.76\ \text{cm}^2$.

4. Izračunaj volumen kugle ako je zadano njezino oplošje:

a) $576\pi\ \text{cm}^2$ **b)** $100\pi\ \text{dm}^2$

c) $144\pi\ \text{cm}^2$ **d)** $\pi\ \text{cm}^2$.

5. Površina glavnog kruga kugle je $64\pi\ \text{cm}^2$. Koliki je volumen te kugle?

6. Izračunaj polumjer kugle čiji je volumen:

a) $V = \frac{32}{3}\pi\ \text{cm}^3$ **b)** $V = \frac{4\,000}{3}\pi\ \text{cm}^3$

c) $V = 0.288\pi\ \text{dm}^3$ **d)** $V = \frac{256}{3}\pi\ \text{dm}^3$.

7. Prepiši u bilježnicu i dopuni tablice, pri čemu je r polumjer kugle, a O i V njezini oplošje i volumen.

r	8			2.4
O		100π		
V	$\frac{2\,048}{3}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	

r			
O	324π		200.96
V		288π	

8. Koliki je polumjer kugle čije je oplošje brojčano jednako volumenu?

9. Kugla polumjera $r = 61\ \text{cm}$ presječena je ravninom čija udaljenost od središta je $11\ \text{cm}$. Kolika je površina presjeka?

10. Kugla je presječena ravninom koja se nalazi na udaljenosti $6\ \text{cm}$ od središta. Opseg dobivenog kruga je $16\pi\ \text{cm}$. Izračunaj oplošje i volumen kugle.

11. Na kojoj udaljenosti od središta kugle treba postaviti ravninu tako da presjek kugle i ravnine bude 4 puta manji od površine glavnog kruga? Promjer kugle je $16\ \text{cm}$.

12. Balon ima oblik lopte promjera $10\ \text{m}$. Koliko je m^2 platna upotrijebljeno pri izradi tog balona?

13. Reklamni stup pokriven je polukuglastom kupolom promjera $120\ \text{cm}$. Koliko je oplošje i volumen te kupole?

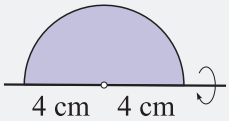
14. Izračunaj oplošje i volumen kugle dobivene rotacijom (vrtnjom) kruga polumjera $8\ \text{cm}$ oko njegove osi simetrije.

15. Koliko je bakra potrebno za prekrivanje kupole crkve koja je oblika polukugle promjera $12\ \text{m}$?

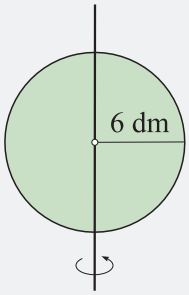
16. Kupola stupa je oblika polukugle vanjskog promjera $1.6\ \text{m}$, a unutarnjeg $1.55\ \text{m}$. Kolika je masa kupole ako je napravljena od bronce? Gustoća bronce je $8\,500\ \text{kg/m}^3$.

17. Izračunaj volumen tijela nastalih rotacijom ovih likova.

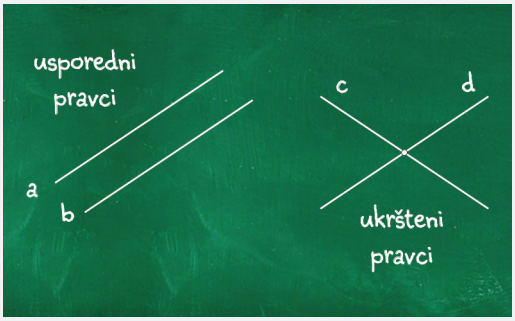
a)



b)



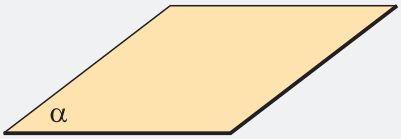
8.7. Pravci i ravnine u prostoru



Mnogo toga znamo o pravcima u ravnini. Znamo da su određeni točno dvjema različitim točkama; na svakom se pravcu nalazi beskonačno mnogo točaka. Dva se pravca u ravnini mogu sjeći u jednoj točki i mogu biti usporedni. Usporedni pravci ili nemaju nijednu zajedničku točku ili se podudaraju.

U prostoru imamo malo bogatiju situaciju. U prostoru postoji ne samo jedna već beskonačno mnogo ravnina, a u svakoj od njih nalazi se beskonačno mnogo pravaca.

Već smo naučili da točke označavamo velikim slovima, pravce malim slovima, a ravnine ćemo označavati malim grčkim slovima: α, β, γ, π itd. ili trima točkama koje ih određuju, primjerice ABC.



Ravninu predočavamo paralelogramom, ali ne zaboravljamo da je beskonačna.

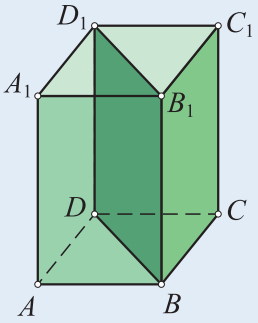
Za lakše promatranje odnosa točaka, pravaca i ravnina u prostoru upotrijebit ćemo kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Primjer 1.

Na kvadru $ABCDA_1B_1C_1D_1$ istaknimo ravninu određenu točkama B, D, B_1.

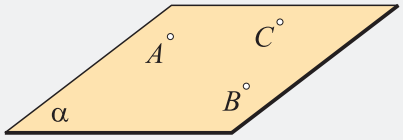
Rješenje:

Budući da je ravnina određena točkama B, D i B_1, kratko ćemo je označiti: BDB_1.

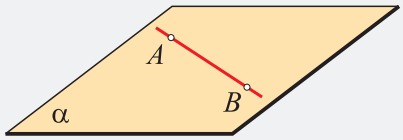


Neka od osnovnih svojstava prostora su sljedeća:

- kroz svake dvije točke prostora prolazi točno jedan pravac
- svake tri točke prostora koje ne pripadaju istom pravcu određuju točno jednu ravninu
- ako pravac i ravnina imaju zajedničke dvije različite točke, tada sve točke tog pravca pripadaju ravnini. Kažemo da pravac leži u ravnini.



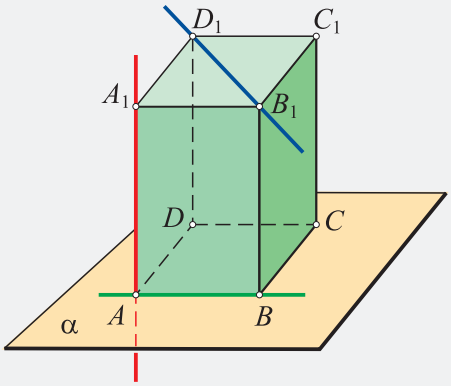
α je ravnina određena točkama A, B, C.



Ako A, $B \in \alpha$, tada $AB \subset \alpha$.

Znači kad pravac i ravnina imaju zajedničke bar dvije različite točke, tada pravac leži u ravnini. Pravac i ravnina mogu biti u još dva različita međusobna položaja u prostoru: njihov presjek može biti samo jedna točka, a može se dogoditi da uopće nemaju zajedničkih točaka.

Prikažimo na modelu kvadra sva tri međusobna položaja pravca i ravnine.



Pravac AB leži u ravnini $\alpha = ABC$. Pišemo: $AB \subset \alpha$. Vrijedi $AB \cap \alpha = AB$.

Pravac B_1D_1 nema zajedničkih točaka s ravninom α. Kažemo da je B_1D_1 usporedan (paralelan) s ravninom α i pišemo $B_1D_1 \| \alpha$. Vrijedi: $B_1D_1 \cap \alpha = \emptyset$.

Pojam usporednosti (paralelnosti) pravca i ravnine obuhvaća obje ove situacije. Dakle, kad kažemo da je pravac p usporedan s ravninom α tada vrijedi ili $p \subset \alpha$ ili $p \cap \alpha = \emptyset$.

Treći položaj pravca i ravnine je situacija kad pravac siječe ravninu u jednoj točki. Primjerice, pravac AA_1 siječe ravninu α u jednoj točki, tj. $AA_1 \cap \alpha = \{A\}$. Točka A naziva se **probodište** pravca i ravnine.

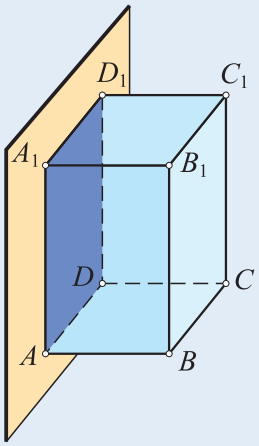
Primjer 2.

Napišimo sve pravce određene vrhovima kvadra $ABCDA_1B_1C_1D_1$ koji su usporedni s ravninom ADD_1.

Rješenje:

Prvo ispišimo sve pravce koji leže u toj ravnini: AD, AD_1, AA_1, DD_1, DA_1, D_1A_1.

Zatim ispišimo sve pravce koji nemaju zajedničke točke s ravninom ADD_1: BC, BC_1, BB_1, CC_1, CB_1, C_1B_1.



Opišimo međusobne položaje dviju ravnina.

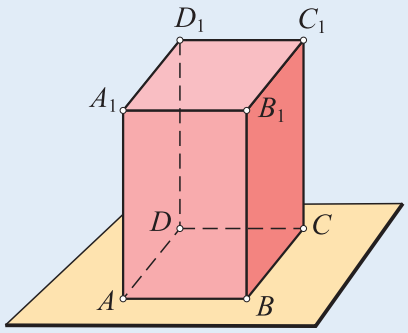
Primjer 3.

U kvadru $ABCDA_1B_1C_1D_1$ promotrimo i opišimo položaj parova ravnina:

a) ABC i ACD **b)** ABC i $B_1C_1D_1$ **c)** ABC i ADD_1.

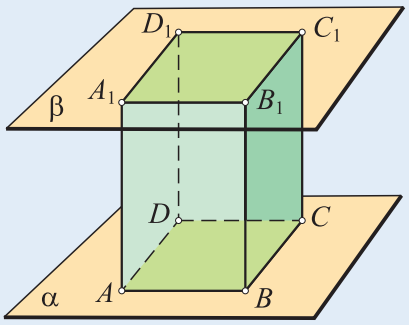
Rješenje:

a) Ravnine ABC i ACD se podudaraju, tj. $ABC = ACD$.

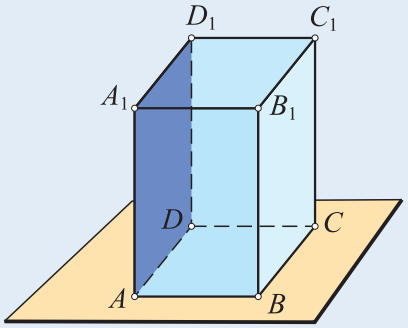


Uvijek kad dvije ravnine imaju zajedničke tri točke koje ne leže na jednom pravcu, tada te ravnine imaju zajedničke i sve preostale točke, tj. ravnine se podudaraju.

b) Ravnine ABC i $B_1C_1D_1$ nemaju zajedničkih točaka, tj. disjunktne su. Vrijedi $ABC \cap B_1C_1D_1 = \emptyset$.
Ako se dvije ravnine α i β podudaraju ili nemaju zajedničkih točaka, kažemo da su usporedne ili paralelne i pišemo: $\alpha \| \beta$.



c) Ravnine ABC i ADD_1 sijeku se i njihov je presjek pravac AD, tj. $ABC \cap ADD_1 = AD$. Zajednički pravac dviju ravnina naziva se **presječnica ravnina**.



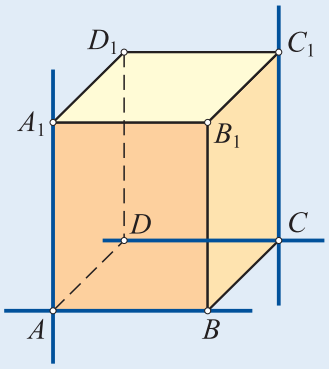
U sljedećem primjeru opisani su međusobni položaji dvaju pravaca u prostoru.

Primjer 4.

U kvadru $ABCDA_1B_1C_1D_1$ promotrimo i opišimo položaj parova pravaca:

a) AB i CD
b) AB i AA_1
c) AB i CC_1.

Rješenje:

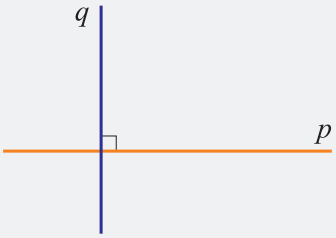


a) Pravci AB i CD leže u istoj ravnini ABC i nemaju zajedničkih točaka. Oni su usporedni ili paralelni pravci. Pišemo $AB \| CD$.

b) Pravci AB i AA_1 sijeku se u točki A. Oni su ukršteni pravci i $AB \cap AA_1 = \{A\}$.

c) Pravci AB i CC_1 ne leže u jednoj ravnini niti imaju zajedničku točku. Takve pravce nazivamo **mimosmjerni** ili **mimoilazni** pravci.

Proučimo okomitost pravca i ravnine te okomitost dviju ravnina. Prisjetimo se što znamo o okomitosti dvaju pravaca.

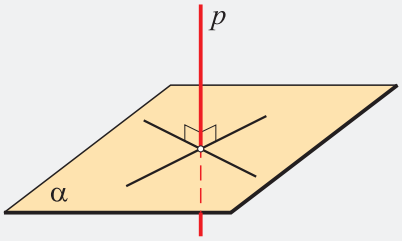


Dva ukrštena pravca p i q iste ravnine tvore četiri kuta. Kad su sva ta četiri kuta sukladna, kažemo da su pravci p i q **okomiti**, a kutove nazivamo **pravi kutovi**. Pišemo: $p \perp q$.

U prostoru možemo govoriti o okomitosti pravca i ravnine.

Okomitost pravca i ravnine

Pravac p je okomit na ravninu α ako je siječe i ako je okomit na svaki pravac te ravnine koji prolazi probodištem pravca i ravnine. Pišemo: $p \perp \alpha$.



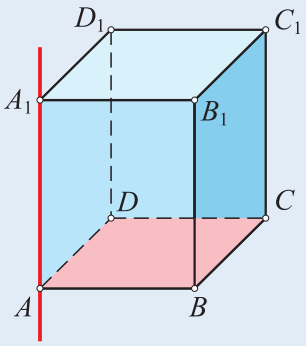
Pravac p nazivamo okomica na ravninu α. Može se pokazati da je dovoljno zahtijevati da je pravac okomit na dva različita pravca ravnine α koji prolaze probodištem.

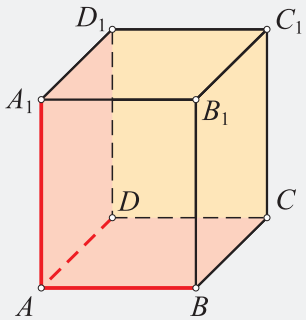
Primjer 5.

Odredimo ravnine koje su okomite na pravac AA_1.

Rješenje:

Pravac AA_1 okomit je na pravac AB jer je ABB_1A_1 pravokutnik.
Pravac AA_1 okomit je na pravac AD jer je ADD_1A_1 pravokutnik.
Dakle, pravac AA_1 okomit je na dva pravca ravnine ABC koji prolaze probodištem pravca AA_1 i ravnine. Stoga je pravac AA_1 okomit na ravninu ABC i pišemo: $AA_1 \perp ABC$.
Na isti način se pokaže da vrijedi i $AA_1 \perp A_1B_1C_1$.

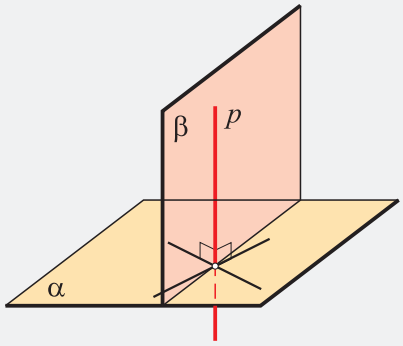




Promotrimo ravnine ABC i ADD_1. Njihova presječnica je pravac AD. Uzmimo jednu točku te presječnice, primjerice točku A i uočimo pravac AA_1 koji leži u ravnini ADD_1. Pravac AA_1 je okomit na pravce AB i AD, pa je stoga okomit na cijelu ravninu ABC.

Kad u jednoj ravnini postoji pravac koji je okomit na drugu ravninu, tada kažemo da su te dvije ravnine okomite. Stoga su ravnine ABC i ADD_1 okomite i pišemo:

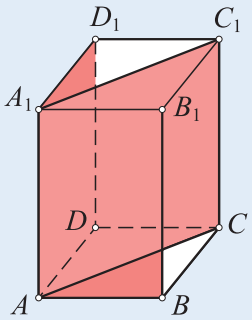
$$ABC \perp ADD_1.$$



Primjer 6.

U kvadru $ABCDA_1B_1C_1D_1$ odredimo sve ravnine koje su okomite na ravninu ABC.

Rješenje:



Pravac AA_1 okomit je na ABC pa su sve ravnine koje njega sadrže okomite na ABC, tj. ravnine ABA_1, ACA_1, ADA_1 su okomite na ABC.

Pravac BB_1 okomit je na ABC te promatrajući ravnine koje ga sadrže dobivamo da su i BCB_1, BDB_1 okomite na ABC. Tu smo imali i ravninu BAB_1, ali ona je već zapisana jer se podudara s ABA_1. Promatrajući pravac CC_1 dobivamo da je još i ravnina CDC_1 okomita na ABC, dok promatranjem pravca DD_1 ne dobivamo neku ravninu koja već nije zapisana.

Zadatci 8.7.

U zadatcima s kvadrom $ABCDA_1B_1C_1D_1$ traže se pravci i ravnine određeni samo vrhovima tog kvadra, tj. ne uvode se neke nove točke.

1. Zadane su dvije različite točke prostora A i B.

a) Nađi sve pravce koji sadrže obje točke A i B. Koliko ih je?

b) Nađi sve ravnine koje sadrže obje točke A i B. Koliko ih je?

2. Koliko ravnina sadrži:

a) tri različite točke prostora

b) četiri različite točke prostora?

3. Nacrtaj kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ispiši i istakni ravnine koje sadrže:

a) točku B **b)** točku D_1.

4. Nacrtaj kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i istakni ravnine koje su određene

a) točkom B i pravcem DD_1

b) pravcima AB_1 i BA_1

c) pravcima BC_1 i AD_1.

5. U prostoru je dan mnogokut čija dva vrha pripadaju ravnini α. Prepiši u bilježnicu odgovor koji odgovara istinitosti ove tvrdnje:

Mnogokut leži u ravnini α.

uvijek | ponekad | nikad

6. Nacrtaj kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i istakni ravnine određene stranama koje ne sijeku pravac

a) AD **b)** BD.

7. Zadan je kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Koje ravnine određene stranama probada (tj. siječe u jednoj točki) pravac

a) BA_1 **b)** A_1B_1?

8. Zadan je kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Koji su pravci usporedni s ravninom:

a) BCD **b)** ADD_1?

9. Prepiši u bilježnicu i spoji usporedne ravnine i pravce. Sve kartice moraju biti upotrijebljene.

ABC | AA_1 | A_1B_1 | BCC_1

DD_1 | ABB_1 | CDD_1 | CC_1

10. Može li pravac biti usporedan s točno jednom stranom kvadra?

11. Mogu li pravac i ravnina imati zajedničke točno

a) jednu točku **b)** dvije točke

c) dvanaest točaka?

12. Ako su α i β usporedne ravnine i pravac p siječe ravninu α, u kakvom su položaju pravac p i ravnina β?

13. Nacrtaj kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$. U kakvom su međusobnom položaju pravci

a) CD i CB **b)** A_1D_1 i AB

c) AA_1 i CC_1 **d)** AA_1 i BC?

14. U kvadru $ABCDA_1B_1C_1D_1$ odredi sve pravce određene vrhovima koji su

a) mimoilazni s A_1B_1 **b)** ukršteni s A_1B_1.

15. Ako je $a \| b$ i $b \| c$, u kakvom su položaju pravci a i c?

16. U kvadru $ABCDA_1B_1C_1D_1$ odredi ravnine koje su usporedne s ravninom

a) BCD **b)** BCC_1.

17. U kakvom su položaju ravnine ACC_1 i BDD_1 u kvadru $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

18. Mogu li dvije ravnine imati zajedničku samo jednu točku?

19. U kvadru $ABCDA_1B_1C_1D_1$ odredi sve pravce okomite na ravninu:

a) ABC **b)** ADD_1.

20. U kvadru $ABCDA_1B_1C_1D_1$ odredi sve ravnine okomite na ravninu

a) ABC **b)** BCC_1.

21. U bilježnicu prepiši istinite tvrdnje. U tvrdnjama su a, b, c pravci i α, β, γ ravnine.

a) Ako je $a \| b$ i $b \| c$, tada je $a \| c$.

b) Ako je $\alpha \| \beta$ i $\beta \| \gamma$, tada je $\alpha \| \gamma$.

c) Ako je $\alpha \perp \beta$ i $\beta \perp \gamma$, tada je $\alpha \perp \gamma$.

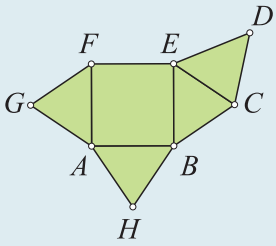
d) Ako je $p \perp \alpha$ i $\alpha \| \beta$, tada je $p \perp \beta$.

e) Ako je $p \perp \alpha$ i $p \perp \beta$, tada je $\alpha \perp \beta$.

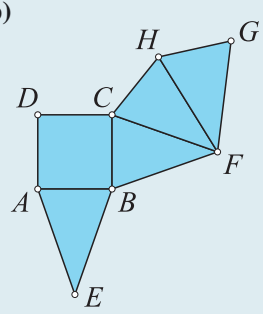
Zadatci za ponavljanje

1. Koji će se vrhovi mreže piramide podudarati prilikom sastavljanja piramide?

a)



b)



2. Nacrtaj mrežu pravilne četverostrane piramide čiji je osnovni brid $3\ \text{cm}$, a visina pobočke je $3.5\ \text{cm}$.

3. Nacrtaj mrežu pravilne četverostrane piramide čiji je bočni brid dugačak $5\ \text{cm}$, a visina pobočke je duga $4\ \text{cm}$.

4. Nacrtaj mrežu pravilne šesterostrane piramide čiji je osnovni brid $a = 2\ \text{cm}$, a pobočni su bridovi dugački $2.8\ \text{cm}$.

5. Prepiši u bilježnicu i spoji kartice koje pripadaju istoj pravilnoj četverostranoj piramidi.

$a = 40\ \text{cm}$, $v = 21\ \text{cm}$

$v_1 = 29\ \text{cm}$

$v_1 = 17\ \text{cm}$

$a = 8\ \text{cm}$, $v = 3\ \text{cm}$

$a = 16\ \text{cm}$, $v = 15\ \text{cm}$

$v_1 = 5\ \text{cm}$

6. Izračunaj površinu baze pravilne četverostrane piramide ako su dane duljine bočnog brida i visine piramide:

a) $b = 34\ \text{dm}$, $v = 16\ \text{dm}$

b) $b = 30\ \text{m}$, $v = 1\,800\ \text{cm}$.

7. Izračunaj duljinu visine pobočke pravilne četverostrane piramide ako su dane duljine osnovnog i pobočnog brida:

a) $a = 12\ \text{cm}$, $b = 12\ \text{cm}$

b) $a = 4\sqrt{5}\ \text{m}$, $b = 60\ \text{dm}$.

8. Izračunaj duljinu visine pobočke pravilne četverostrane piramide ako su zadane duljine osnovnog brida i visine piramide:

a) $a = 32\ \text{cm}$, $v = 3\ \text{dm}$

b) $a = 4\sqrt{2}\ \text{m}$, $v = 2\sqrt{7}\ \text{m}$.

9. Izračunaj površinu dijagonalnog presjeka pravilne četverostrane piramide ako su dane duljine bočnog brida i visine piramide:

a) $b = 44\ \text{cm}$, $v = 28\ \text{cm}$

b) $b = 18\ \text{dm}$, $v = 1.4\ \text{m}$.

10. Izračunaj površinu pobočja pravilne četverostrane piramide ako je osnovni brid $10\ \text{dm}$, a visina je piramide duljine $12\ \text{dm}$.

11. Oplošje pravilne četverostrane piramide iznosi $384\ \text{mm}^2$, a osnovni joj je brid dugačak $12\ \text{mm}$. Izračunaj duljinu visine piramide.

12. Oplošje pravilne četverostrane piramide iznosi $872\ \text{dm}^2$, a površina pobočja je $556\ \text{dm}^2$. Kolika je duljina osnovnog brida piramide?

13. Površina baze pravilne četverostrane piramide je $100\ \text{cm}^2$, a oplošje iznosi $400\ \text{cm}^2$. Kolika je duljina visine pobočke?

14. Izračunaj oplošje pravilne četverostrane piramide kojoj je duljina bočnog brida $10\ \text{cm}$, a duljina visine pobočke je $8\ \text{cm}$.

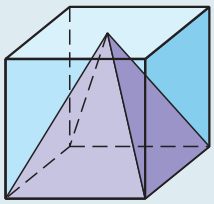
15. Pobočke pravilne četverostrane piramide jednakostranični su trokuti stranice duljine $6\ \text{cm}$. Izračunaj oplošje i volumen piramide.

16. Svi bridovi trostrane piramide jednake su duljine. Oplošje piramide je $72\sqrt{3}\ \text{m}^2$. Kolika je duljina osnovnog brida?

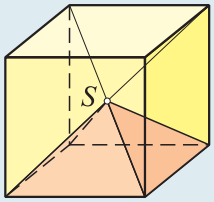
17. Krov ima oblik pravilne četverostrane piramide. Osnovni brid je duljine $5.5\ \text{m}$, a visina krova je $3\ \text{m}$. Koliko je komada crjepova potrebno za prekrivanje krova ako je za prekrivanje jednog kvadratnog metra potrebno 12 crjepova?

18. Dijagonalni presjek pravilne četverostrane piramide je pravokutan jednakokračan trokut s katetom $6\sqrt{2}\ \text{dm}$. Izračunaj volumen piramide.

19. U kocku brida $8\ \text{cm}$ upisana je pravilna četverostrana piramida kao na slici. Koliki je volumen upisane piramide?

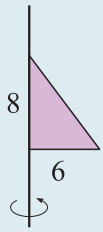


20. U kocku brida $4\ \text{cm}$ upisana je pravilna četverostrana piramida kojoj je vrh u sjecištu prostornih dijagonala kocke, a baza se podudara s bazom kocke. Koliki je volumen piramide?

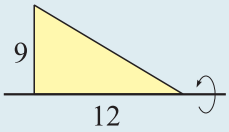


21. Odredi duljinu visine, polumjera baze i izvodnice stošca koji nastaje rotacijom ovih likova:

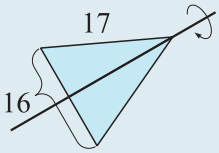
a)



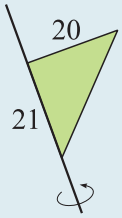
b)



c)

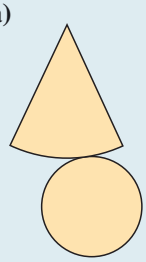


d)

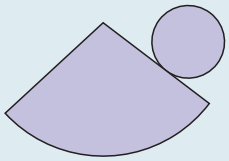


22. Koja od nacrtanih mreža nije mreža nekog stošca?

a)

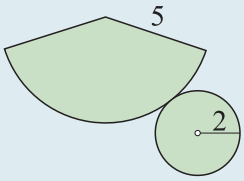


b)

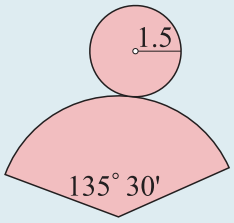


23. Nacrtane su mreže stošca. Odredi mu duljinu polumjera i izvodnice.

a)



b)



24. Izračunaj duljinu izvodnice uspravnog stošca ako je dan polumjer baze i duljina visine stošca:

a) $r = 9\ \text{cm}$, $v = 12\ \text{cm}$

b) $r = 0.08\ \text{dm}$, $v = 1.5\ \text{cm}$.

25. Izračunaj promjer baze uspravnog stošca ako su zadane duljine visine i izvodnice stošca:

a) $v = 0.6\ \text{cm}$, $s = 1\ \text{cm}$

b) $v = 6\ \text{m}$, $s = 61\ \text{dm}$.

26. Visina je stošca za $4\ \text{cm}$ kraća od njegove izvodnice. Izračunaj duljinu visine ako je polumjer baze $8\ \text{cm}$.

27. Polumjer baze i visina stošca odnose se kao $8 : 15$. Kolika je duljina visine ako je izvodnica stošca $51\ \text{dm}$?

28. Osni presjek stošca je jednakokračan trokut s duljinom osnovice $4\ \text{dm}$ i duljinom kraka $29\ \text{cm}$. Kolika je duljina visine stošca?

29. Osni presjek stošca je jednakostraničan trokut površine $64\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Izračunaj površinu plašta stošca.

30. Koliko iznosi oplošje stošca čiji je razmotani plašt u ravnini kružni isječak polumjera $8\ \text{cm}$ i kuta $110°40'$?

31. Razgrnuti plašt stošca u ravnini je kružni isječak s kutom $130°45'$ i polumjerom $10\ \text{cm}$. Kolika je duljina polumjera baze stošca?

32. Plašt stošca razvijen u ravnini je šestina kruga polumjera $52\ \text{cm}$. Izračunaj polumjer baze i duljinu visine stošca.

33. Oplošje stošca je $108\pi\ \text{cm}^2$, a izvodnica je dvostruko veća od polumjera baze. Izračunaj polumjer baze i duljinu visine stošca.

34. Plašt stošca ima površinu $7\,536\ \text{mm}^2$, a polumjer mu je $3\ \text{cm}$. Izračunaj duljinu visine i površinu osnog presjeka.

35. Osni presjek stošca ima površinu $24\ \text{cm}^2$, a duljina visine mu je $6\ \text{cm}$. Izračunaj polumjer baze stošca i oplošje.

36. Osni presjek stošca ima površinu $48\ \text{cm}^2$, a duljina visine mu je $4\ \text{cm}$. Izračunaj polumjer baze stošca i oplošje.

37. Osni presjek stošca ima površinu $400\ \text{cm}^2$, a polumjer baze mu je $10\ \text{cm}$. Izračunaj duljinu visine i izvodnice stošca.

38. Plašt stošca ima površinu 75.36, a polumjer mu je 3. Izračunaj oplošje.

39. Opseg baze stošca je 14π, a visina mu je duga 12. Odredi polumjer baze, oplošje i površinu plašta.

40. Visina je stošca za $14\ \text{cm}$ dulja od polumjera, a duljina izvodnice je $34\ \text{cm}$. Izračunaj volumen stošca.

41. Izvodnica i polumjer baze stošca odnose se kao $29 : 21$. Koliki mu je volumen ako je duljina visine $60\ \text{cm}$?

42. Razgrnuti plašt stošca u ravnini je polukrug površine $72\pi\ \text{cm}^2$. Koliki je volumen tog stošca?

43. Koje su od sljedećih rečenica istinite? Prepiši ih u bilježnicu.

a) Ako se u stošcu visina poveća 4 puta, a polumjer ostane isti, tada se volumen stošca poveća 4 puta.

b) Ako se u stošcu polumjer baze poveća 4 puta, a visina ostane ista, tada se volumen stošca poveća 4 puta.

c) Ako je stalan polumjer baze, duljina visine i volumen stošca su proporcionalne veličine.

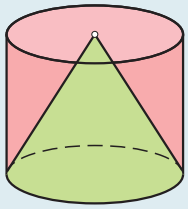
d) Ako je stalna površina plašta, duljina polumjera baze i duljina izvodnice su obrnuto proporcionalne veličine.

e) Ako piramida i stožac imaju baze jednake površine, tada su im i volumeni jednaki.

44. Osam metalnih stožaca treba pretopiti u valjak polumjera baze $2\ \text{m}$. Stošcima je polumjer baze $1.5\ \text{m}$, a visina $1.8\ \text{m}$. Kolika je visina dobivenog valjka?

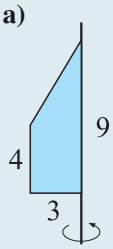
45. Koliko je lima potrebno za izradu lijevka promjera $18\ \text{cm}$ i duljine izvodnice $15\ \text{cm}$?

46. U valjak upisan je stožac tako da mu se baza podudara s bazom valjka, a vrh mu je u središtu gornje baze valjka. Kako se odnose volumeni valjka i stošca?

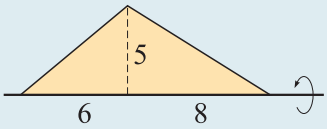


47. Opiši koja tijela nastaju rotacijom likova na slici. Izračunaj im volumen.

a)

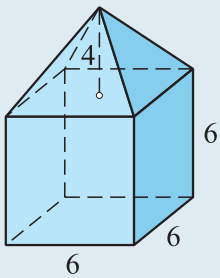


b)

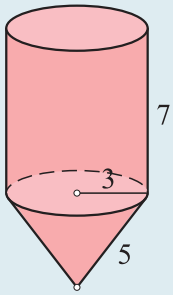


48. Opiši tijela nacrtana na slikama. Izračunaj im volumen. Dimenzije su u centimetrima.

a)

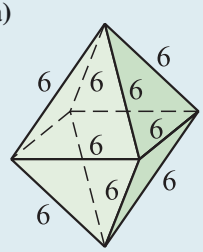


b)

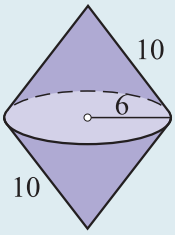


49. Opiši tijela nacrtana na slikama. Izračunaj im oplošje. Mjere su u milimetrima.

a)



b)



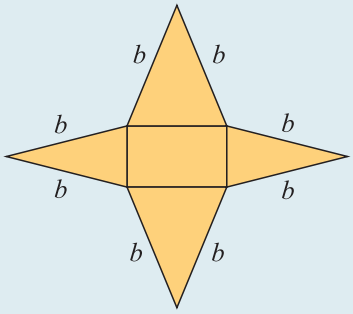
ele-udzbenik.hr
U elektroničkoj inačici udžbenika pronađi više zadataka za uvježbavanje.

Jednostavni zadatci

1. Nacrtaj mrežu pravilne četverostrane piramide kojoj je osnovni brid $2\ \text{cm}$, a bočni brid je dugačak $3\ \text{cm}$.

2. Nacrtaj pravilnu četverostranu piramidu kojoj je osnovni brid $3\ \text{cm}$, a duljina visine je $3.5\ \text{cm}$.

3. Što nije ispravno nacrtano u ovoj mreži pravilne četverostrane piramide?



4. Duljina visine pravilne četverostrane piramide je $4\ \text{cm}$, a bočni je brid duljine $5\ \text{cm}$.

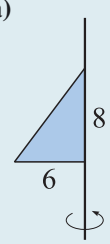
a) Kolika je duljina osnovnog brida piramide?

b) Koliki je volumen piramide?

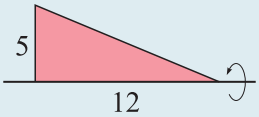
5. Metalni kvadar dimenzija $2\ \text{cm} \times 3\ \text{cm} \times 5\ \text{cm}$ treba pretopiti u pravilnu četverostranu piramidu čiji je osnovni brid dugačak $3\ \text{cm}$. Kolika će biti duljina visine piramide?

6. Koliki je polumjer baze, duljina visine i duljina izvodnice stošca koji nastaje rotacijom ovih likova?

a)



b)



7. Ako je duljina izvodnice stošca $10\ \text{dm}$, a duljina visine $8\ \text{dm}$, kolika je duljina polumjera baze?

8. Prepiši i dopuni tablicu za stožac.

r	$3\ \text{cm}$		$10\ \text{cm}$	$9\ \text{m}$
v	$4\ \text{cm}$	$8\ \text{m}$		
s		$10\ \text{m}$	$26\ \text{cm}$	
P				$135\pi\ \text{m}^2$
O				
V				

9. Osni presjek stošca je jednakokračni trokut s krakovima duljine $13\ \text{cm}$ i osnovicom duljine $24\ \text{cm}$. Kolika je duljina visine stošca i volumen?

10. Oplošje piramide je $1\,000\ \text{m}^3$, a površina njegove baze je $B = 300\ \text{m}^3$. Kolika je površina pobočja te piramide?

11. U pravilnoj četverostranoj piramidi duljina osnovnog brida je $12\ \text{cm}$, a duljina visine piramide je $8\ \text{cm}$. Izračunaj oplošje piramide.

12. U pravilnoj četverostranoj piramidi duljina osnovnog brida je $16\ \text{cm}$, a duljina pobočnog brida je $18\ \text{cm}$.

a) Kolika je duljina visine piramide?

b) Kolika je površina dijagonalnog presjeka piramide?

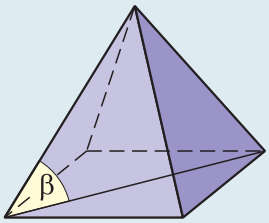
c) Izračunaj volumen piramide.

13. Hrpa pijeska je oblika stošca visine $1\ \text{m}$ i polumjera baze $2\ \text{m}$. Stane li taj pijesak u kamion čiji je teretni prostor oblika kvadra dimenzija $1.5\ \text{m} \times 2\ \text{m} \times 0.5\ \text{m}$?

14. Izradi umnu mapu ili grafički prikaz koji će ti pomoći u lakšem pamćenju formula vezanih za geometrijska tijela.

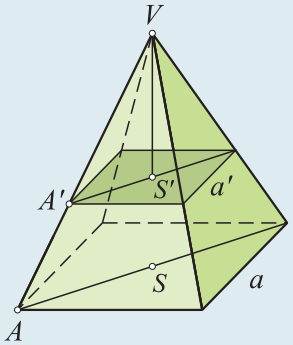
Složeniji zadatci

1. Pobočni brid pravilne četverostrane piramide zatvara s bazom kut od $45°$. Duljina je visine piramide h. Izrazi volumen piramide s pomoću veličine h.



2. Pobočni brid pravilne četverostrane piramide zatvara s bazom kut od $30°$. Duljina osnovnog brida je a. Izrazi površinu dijagonalnog presjeka i volumen piramide s pomoću a.

3. Pravilna četverostrana piramida presječena je ravninom na visini $4\ \text{cm}$ od vrha. Kolika je površina presječnog kvadrata ako je osnovni brid piramide $12\ \text{cm}$, a duljina visine piramide je $16\ \text{cm}$?



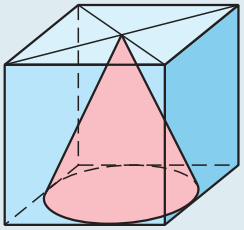
4. Oplošje pravilne šesterostrane piramide je

$$O = \left(75\sqrt{3} + \frac{135}{2}\right)\ \text{cm}^2.$$

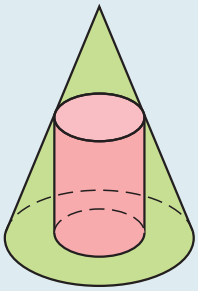
Duljina osnovnog brida je $a = 5\ \text{cm}$. Koliko iznosi volumen piramide?

5. Duljine polumjera baze, visine i izvodnice stošca izražene u centimetrima su tri uzastopna prirodna broja. Koliki je polumjer baze tog stošca?

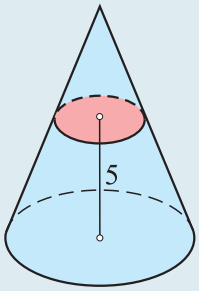
6. Stožac je upisan kocki tako da mu je baza upisana bazi kocke, a vrh mu je središte nasuprotne baze. Duljina brida kocke je a. Kako se odnose volumeni kocke i stošca?



7. U stožac duljine polumjera $6\ \text{cm}$ i visine $8\ \text{cm}$ upisan je valjak kojemu jedna baza leži u bazi stošca, a druga baza dodiruje plašt stošca. Izračunaj volumen valjka ako mu je promjer baze jednak visini.



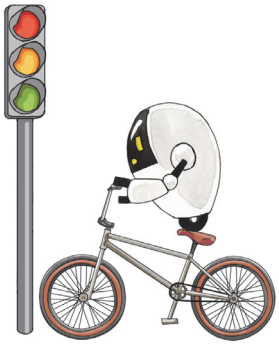
8. Stožac duljine polumjera $10\ \text{cm}$ i visine $16\ \text{cm}$ presječen je ravninom paralelnoj bazi na visini $5\ \text{cm}$ od baze. Kolika je površina kruga dobivena tim presijecanjem?



9. Osni je presjek stošca jednakokračan trokut s krakovima duljine $8\ \text{cm}$ i kutom među njima $120°$. U kojem su omjeru oplošje stošca i površina njegovog plašta?

8.8. SEMAFOR

U bilježnicu riješi zadatke i pokraj svakog zadatka nacrtaj krug. Krug oboji zelenom bojom ako zadatak u potpunosti razumiješ i točno je riješen. Žutom bojom oboji krug kraj zadatka za koji smatraš da još trebaš vježbati ili ako rezultat zadatka nije točan, a crvenom bojom ako ne znaš kojim postupkom riješiti zadatak.



Zadatci

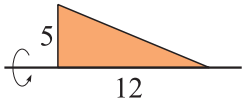
1. Nacrtaj mrežu pravilne četverostrane piramide kojoj je osnovni brid duljine $2.2\ \text{cm}$, a bočni brid je duljine $2.8\ \text{cm}$.

2. Izračunaj duljinu visine pravilne četverostrane piramide kojoj je bočni brid duljine $5\sqrt{3}\ \text{cm}$, a osnovni brid $10\ \text{cm}$.

3. Oplošje pravilne četverostrane piramide je $384\ \text{dm}^2$, a površina pobočja iznosi $240\ \text{dm}^2$. Koliki je volumen piramide?

4. Dijagonalni presjek pravilne četverostrane piramide je jednakostraničan trokut sa stranicom duljine $8\sqrt{2}\ \text{cm}$. Izračunaj oplošje piramide.

5. Odredi duljinu visine, polumjera i izvodnice stošca koji nastaje rotacijom lika na slici:



6. Plašt stošca razvijen u ravnini je šestina kruga polumjera $48\ \text{cm}$. Izračunaj duljinu polumjera baze stošca.

7. Oplošje stošca iznosi $384\pi\ \text{cm}^2$, a duljina polumjera baze je $12\ \text{cm}$. Izračunaj duljinu visine stošca.

8. Osni presjek stošca je jednakostraničan trokut sa stranicom duljine $36\ \text{cm}$. Koliko iznosi volumen tog stošca?

9. Zlatar želi šest srebrnih privjesaka koji imaju oblik stošca pretopiti u pločicu dugačku $1.1\ \text{cm}$ i široku $2.5\ \text{cm}$. Kolika će biti debljina pločice ako je polumjer privjeska $3\ \text{mm}$, a visina $5\ \text{mm}$? Rezultat zaokruži na dva decimalna mjesta.

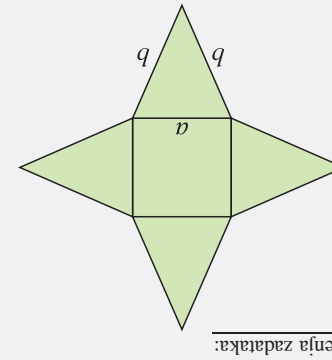
Za svaki zeleno obojeni krug osvajaš 2 boda, za svaki žuti krug 1 bod, a za crveni 0 bodova.

Intervali bodova

0 – 8:	Znaš što ti je činiti. . . Nakon još vježbe sigurno će biti bolji rezultat!
9 – 15:	Još ponovi i posebice uvježbaj ono u čemu griješiš!
16 – 18:	Odličan rezultat za kraj osnovne škole!

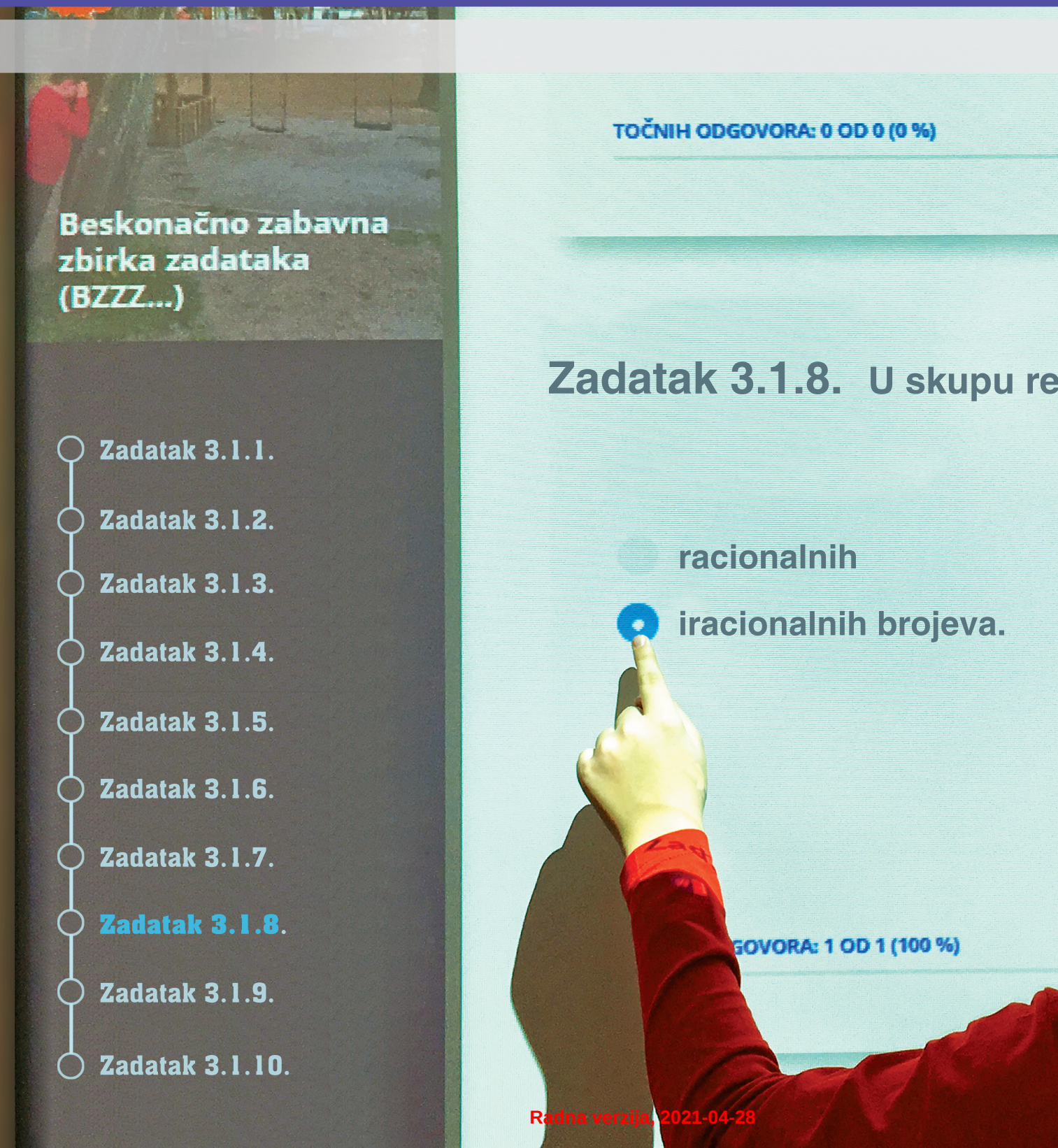
Rješenja zadataka:

1.



2. $v = 5$ cm. **3.** $v = 8$ dm, $V = 384$ dm^3. **4.** $O = (64 + 64\sqrt{7})$ cm^2. **5.** $r = 5$, $v = 12$, $s = 13$. **6.** $r = 8$ cm. **7.** $v = 16$ cm. **8.** $s = 36$ cm, $r = 18$ cm, $v = 18\sqrt{3}$ cm, $V = 1\,944\pi\sqrt{3}$ cm^3. **9.** $V = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 5 = 282.6$ mm^3, $282.6 = 11 \cdot 25 \cdot c$, $c = 1.03$ mm. Debljina pločice je 1.03 mm.

R Rješenja zadataka



Beskonačno zabavna zbirka zadataka (BZZZ...)

5. Skup realnih brojeva

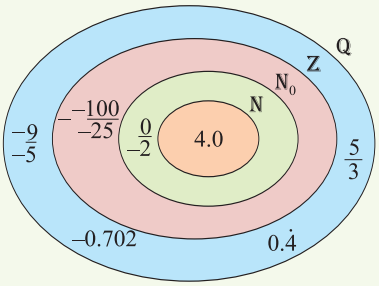
Rješenja 5.1

1. $-3 \in \mathbf{Z}$, $\frac{5}{2} \in \mathbf{Q}$, $-4.3 \in \mathbf{Q}$, $\frac{-70}{-14} \in \mathbf{N}$, $-2.67 \in \mathbf{Q}$, $4.\dot{5} \in \mathbf{Q}$ i $0 \in \mathbf{N}_0$.

2. Točne tvrdnje napisane su u primjerima **c), g)** i **h)**.

3. **a)** $0 \notin \mathbf{N}$ **b)** $-\frac{7}{1} \in \mathbf{Z}$ **c)** $\mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N} = \mathbf{N}$
d) $\mathbf{N}_0 \cup \mathbf{N} = \mathbf{N}_0$ **e)** $\mathbf{Q}^- \subseteq \mathbf{Q}$ **f)** $\mathbf{Q}^- \cap \mathbf{Q}^+ = \emptyset$
g) $2.4 \notin \mathbf{Z}$ **h)** $-1.4 \in \mathbf{Q}$.

4.



5. **a)** 0 **b)** npr. -7 **c)** takav broj ne postoji.

6. Ne, rješenje jednadžbe je broj $\frac{3}{2}$.

7. **a)** $x = 58 \in \mathbf{N}$ **b)** $x = -\frac{11}{2} \in \mathbf{Q}$
c) $x = -\frac{1}{4} \in \mathbf{Q}$ **d)** $x = 1 \in \mathbf{N}$
e) $x = -1 \in \mathbf{Z}$ **f)** $x = -\frac{19}{8} \in \mathbf{Q}$
g) $x = 1 \in \mathbf{N}$ **h)** $x = -17 \in \mathbf{Z}$.

8. **a)** $x = 4$ da **b)** $x = \frac{2}{15}$ ne **c)** $x = \frac{2}{3}$ ne
d) $x = \frac{43}{15}$ ne.

9. **a)** $x = -\frac{12}{7}$ ne **b)** $x = -3$ da
c) $x_1 = 21$, $x_2 = -21$ da
d) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{-3}{2}$ ne
e) $x = \frac{-21}{10}$ ne **f)** $x = -3$ da.

10.

	jednadžba je rješiva u skupu **N**	jednadžba je rješiva u skupu **Z**	jednadžba je rješiva u skupu **Q**
naziv jednadžbe	**e)**	**a), e)**	**a), b), d), e), f)**

11. **a)** 7.3 **b)** -0.09 **c)** -1.1 **d)** -5.317
e) 41.7 **f)** 4.5 **g)** 18.2 **h)** 1.45 **i)** 12.44
j) -4.75. To su brojevi s konačnim decimalnim zapisom.

12. **a)** $-6.\dot{3}$ **b)** $19.\dot{1}$ **c)** $-0.\dot{7}1428\dot{5}$ **d)** $1.\dot{1}\dot{8}$
e) $-3.\dot{6}9230\dot{7}$ **f)** $8.\dot{3}\dot{6}$ **g)** $0.\dot{0}\dot{4}$ **h)** $-11.\dot{5}7142\dot{8}$
i) $0.\dot{0}9523\dot{8}$ **j)** $-2.\dot{0}29\dot{7}$. Svi brojevi su čisto periodični decimalni brojevi.

13. **a)** $0.2\dot{3}$ **b)** $3.8\dot{3}$ **c)** $-4.41\dot{6}$ **d)** $0.2\dot{6}$
e) $-2.2\dot{1}4285\dot{7}$ **f)** $-0.1\dot{1}5384\dot{6}$ **g)** $1.6\dot{1}$
h) $0.6\dot{8}\dot{1}$ **i)** $11.8\dot{0}7692\dot{3}$ **j)** $-2.10\dot{7}1428\dot{5}$.
Svi brojevi su mješovito periodični decimalni brojevi.

14. Razlomak $\frac{7}{125}$ možemo napisati kao decimalni broj s konačno mnogo decimala jer je nazivnik djeljiv <u>samo</u> s brojevima 5 <u>i s 1</u>, a razlomak $\frac{16}{44}$ možemo zapisati kao <u>čisto</u> periodični broj jer je $\frac{16}{44} = \frac{4}{11}$.

15. **a)** To je znamenka 6 **b)** to je znamenka 5
c) to je znamenka 8 **d)** to je znamenka 9.

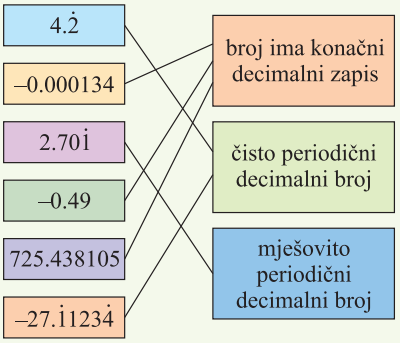
16. **a)** $\frac{247}{100}$ **b)** $-\frac{3\,751}{125}$ **c)** $\frac{-42}{5}$ **d)** $\frac{21\,000\,001}{1\,000\,000}$
e) $\frac{1\,512}{5}$ **f)** $\frac{-1\,251}{50}$ **g)** $\frac{-6\,703}{1\,000}$ **h)** $\frac{21}{100\,000}$
i) $-\frac{259}{5}$ **j)** $\frac{11\,111}{5\,000}$.

17. **a)** $3.\dot{4} > 3.4$ **b)** $-0.72 > -0.7\dot{2}$
c) $-0.012 > -0.0\dot{2}$ **d)** $2.1\dot{3} < 2.9$
e) $-100.5\dot{6} < -100.1$ **f)** $312.\dot{4} > 312.\dot{4}10\dot{3}$.

18. $34.9 > 34.\dot{8} > 34.8 > 34.51 > 34.083$.

19. $-114 < -11.9 < -11.\dot{4} < -11.44 < -11.409 < -11.0999$.

20.



21. To su brojevi $\frac{27}{4}$, $\frac{-71}{25\,000}$ i $\frac{-9}{18}$.

22. **a)** $0.1\dot{6}$ **b)** 8.207 **c)** 29.1.

23. **a)** $-\frac{1}{3} = -0.\dot{3}$ **b)** -13.7 **c)** -52.8.

24. **a)** $46.0\dot{7}1428\dot{5}$ **b)** $-2.5\dot{3}$ **c)** 0.

Rješenja 5.2

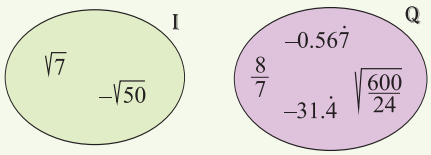
1. To su brojevi čiji je decimalni zapis beskonačan i neperiodičan. Ili: To su brojevi koji se ne mogu zapisati kao razlomak $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{N}$).

2. Npr. $10.789101112131415\ldots$, $\sqrt{7}$, π.

3. To su brojevi navedeni u primjerima **a)** i **c)**.

4. To su brojevi navedeni u primjerima **b), c), d)** i **f)**.

5.



6. Oni su disjunktni, tj. $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$.

7. **a)** $\sqrt{\frac{20}{5}}$ **b)** $\sqrt{\frac{32}{2}}, \sqrt{\frac{32}{8}}$ **c)** $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ **d)** $\sqrt{4\frac{21}{25}}$.

8. Točne su tvrdnje **a)**, **c)** i **e)**.

9. Da, npr. $0 \cdot \sqrt{2} = 0 \in \mathbf{Q}$.

10. To su brojevi navedeni u primjerima **d)** i **e)**.

11. Ne može.

12. Da, svaki takav zbroj je iracionalan broj.

13. Da, npr. $-\pi + \pi = 0 \in \mathbf{Q}$.

14. Iracionalni su brojevi navedeni u primjerima **a)**, **b)**, **f)**, **i)**, **l)** i **n)**.

15. **a)** $7\sqrt{2}a$ **b)** $-4\sqrt{3}b$ **c)** $-9\sqrt{3}a - 3\sqrt{5}$ **d)** $13\sqrt{7}x + 7\sqrt{7}$ **e)** $-\sqrt{11}a + 3\sqrt{11} - 1$ **f)** $3\sqrt{2}b$.

16. **a)** $8\sqrt{6}b$ **b)** $20\sqrt{2}x$ **c)** $6a + \sqrt{3}$ **d)** $2\sqrt{35}x + 2\sqrt{10}$ **e)** $2a^2 - 1$ **f)** $-6\sqrt{7} + 21y + \sqrt{7}y - 2$.

Rješenja 5.3

1. Točne tvrdnje navedene su u primjerima **d)**, **e)** i **f)**.

2. **a)** $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ **b)** $3\pi \in \mathbf{I}$ **c)** $\mathbf{Z} \not\subseteq \mathbf{I}$ **d)** $\mathbf{I} \cap \mathbf{Q} = \emptyset$ **e)** $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ **f)** $\mathbf{Z} \cap \mathbf{R} = \mathbf{Z}$.

3. **a)** $\frac{3}{4} > 0.706$ **b)** $-23.076 > -\frac{117}{5}$
c) $-\frac{2}{3} < -0.6607$ **d)** $5.0\dot{9} < 5.1$.

4. **a)** $\sqrt{3} > 1.73$ **b)** $-2.82 > -2\sqrt{2}$
c) $-1.41 < -\sqrt{2} + 0.1$ **d)** $-0.711 > -\sqrt{3} + 1$.

5. **a)** $3\frac{10}{71} < 3.14159$ **b)** $\frac{60}{19} > 3.14159$
c) $3\frac{1}{7} > 3.14159$ **d)** $\frac{55}{17} > 3.14159$.

6. **a)** a) $1\frac{5}{8} < 1.732050808$ **b)** $\frac{53}{31} < 1.732050808$
c) $\frac{1\,351}{780} > 1.732050808$ **d)** $1\frac{17}{20} > 1.732050808$.

7. $2\sqrt{2} - 2 < 1.414 < \sqrt{2} < 1.42 < -\sqrt{2} + 3$.

8. $-3\sqrt{2} < -\sqrt{3} - 2 < -2\sqrt{3} < -3.46 < -\pi$.

9. Točne su tvrdnje navedene u primjerima **a)**, **b)** i **d)**.

10. **a)** Vrijedi $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$ i $\frac{1}{2} = \frac{12}{24} \implies$ npr. $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ i $\frac{11}{24}$
b) npr. 1.4143, 1.415, 1.41907216
c) npr. -1.723, -1.728 i -1.7310792.

11. U skupu realnih brojeva komplement skupa racionalnih brojeva je skup iracionalnih brojeva. Možemo zapisati $\mathbf{Q}^c = \mathbf{I}$.

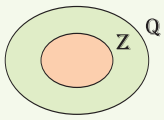
12. **a)** $\mathbf{Q}^+ \cup \{0\}$ **b)** $\mathbf{Q}^- \cup \{0\}$ **c)** $\mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^-$.

13. **a)** $\mathbf{Z}^- \cup \{0\}$ **b)** $\mathbf{Z}^-$ **c)** $\mathbf{N}_0$ **d)** $\emptyset$.

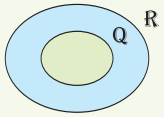
14. **a)** $\mathbf{Q}^c = \mathbf{I}$ **b)** $\mathbf{I}^c = \mathbf{Q}$.

15. **a)** B **b)** A **c)** $\emptyset$.

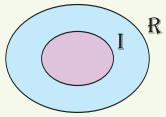
16. **a)**



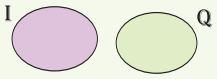
b)



c)



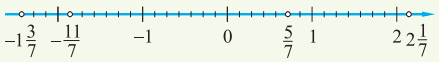
d)



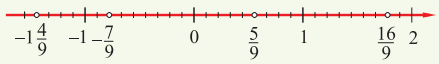
Rješenja 5.4

1. Svakom racionalnom broju možemo pridružiti točno jednu točku na brojevnom pravcu.
Svakom iracionalnom broju možemo pridružiti točno jednu točku na brojevnom pravcu.
Svaka točka brojevnog pravca pridružena je točno jednom realnom broju.

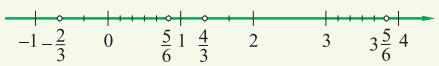
2. **a)**



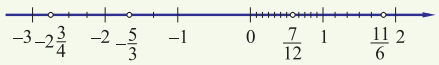
b)



c)

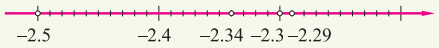


d)

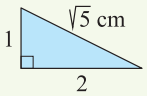


e)

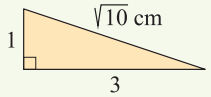
f)



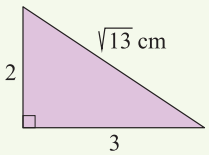
3. **a)**



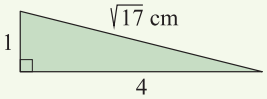
b)



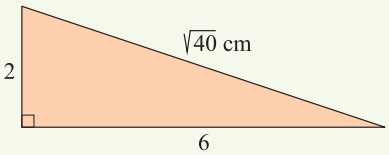
c)



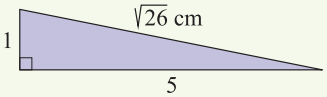
d)



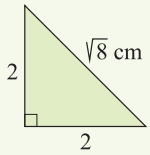
e)



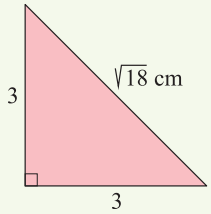
f)



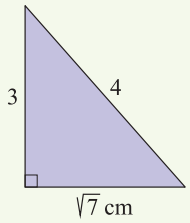
g)



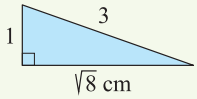
h)



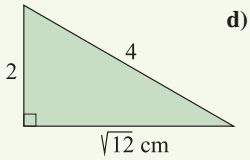
4. a)



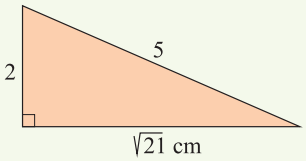
b)



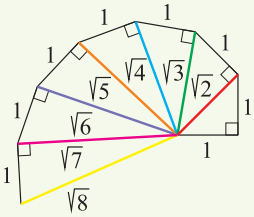
c)



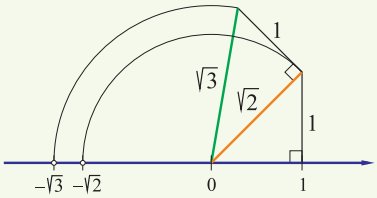
d)



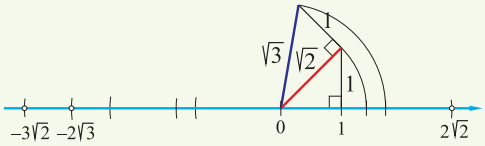
5.



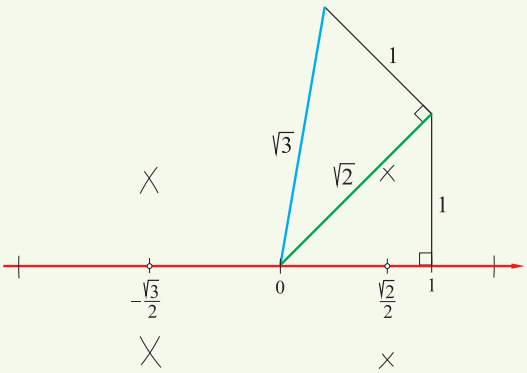
6.



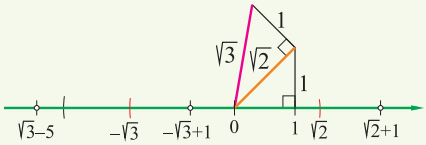
7.



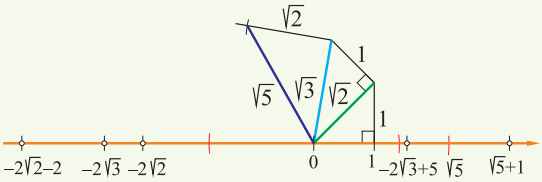
8.



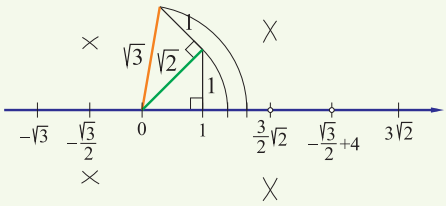
9.



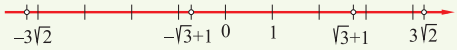
10.



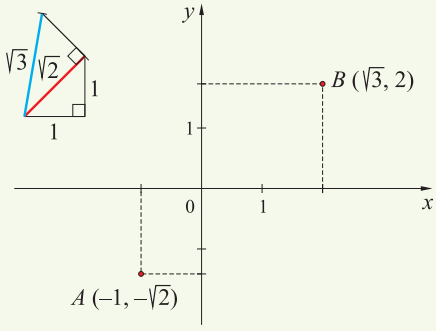
11.



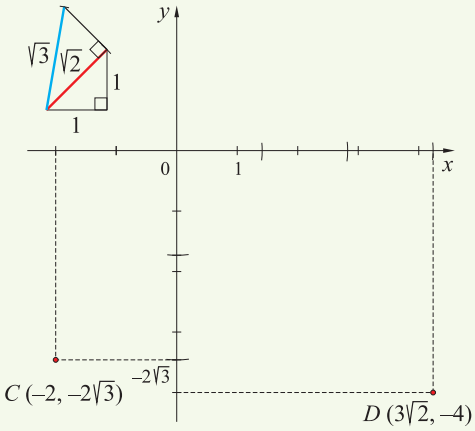
12.



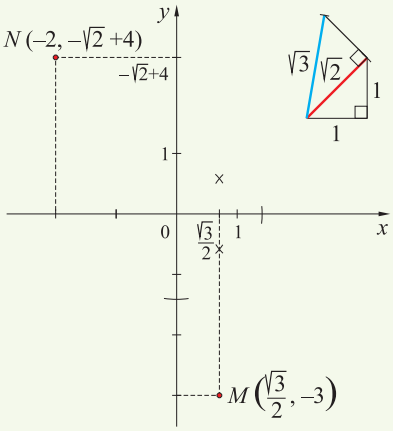
13.



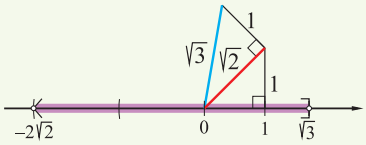
14.



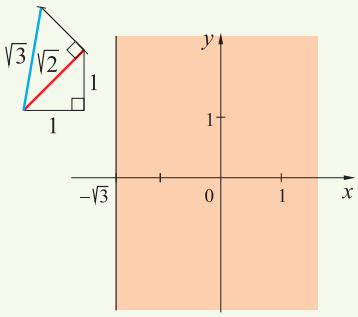
15.



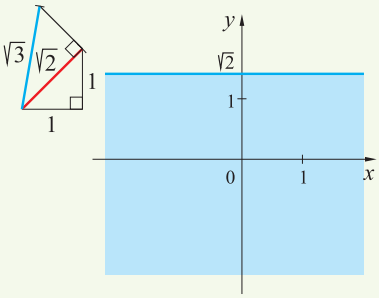
16.



17. **a)**



b)



Rješenja 5.5

1. **a)** Možemo dobiti 213.41 australskih dolara.

b) Možemo dobiti 4 657.74 kuna.

c) Možemo dobiti 83 960.66 japanskih jena.

d) Možemo dobiti 295.98 kuna.

2.

	dobiveni iznos (kn)
415 EUR	3 114.00
210 USD	1 285.91
1 812 JPY	107.26
20 400 HUF	429.03

	dobiveni iznos
1 300 kn	172.21 EUR
2 421 kn	393.00 USD
3 217 kn	54 020.29 JPY
1 450 kn	68 533.71 HUF

3. U Hrvatskoj bi dobio 1 270.89 eura, a u Njemačkoj 1 260.65 eura. Povoljnije je tada mijenjati kune u eure u Hrvatskoj.

4. **a)** Dobila bi 264.51 euro i 603.87 funti.

b) Dobila bi 264.30 eura i 590.53 funti.

c) Dobila bi 264.51 euro i 600.73 funti.

Najbolje je sve promijeniti u Zagrebu.

5. Povoljnije je mijenjati u mjenjačnici *Isplativo*, no ta razlika je 1.07 kn što je mala vrijednost. Postupio bi drukčije u situaciji kada bi se npr. mjenjačnica *Povoljno* nalazila na bližoj lokaciji.

Rješenja 5.6

1. Točna su sva tri odgovora.

2. **a)** U primjerima **A)** i **E)** omjer je približno 1.1 , u primjeru **B)** je 1.31 , u primjeru **C)** 1.69 , a u primjeru **D)** 1.67 .

b) Prednost je kratak vremenski rok otplate pa se otplaćuje manje kamata, a nedostatak je što je riječ o manjem iznosu koji podižemo u odnosu na iznos u primjerima **D)** i **E)**. U odnosu na kredite **B)** i **C)** mjesečni anuitet je veći pa ako netko ima manja primanja, bolje je kad su manji mjesečni iznosi koji se otplaćuju.

c) Prednost je veći iznos novca koji podižemo, a nedostatak velik iznos kamata koje plaćamo banci.

d) Prednost je veći iznos novca koji podižemo i primjerice u kraćem periodu se ostvaruje vraćanje duga. Nedostatak je visoki iznos mjesečnog anuiteta $(332\,605.88 : 72 \approx 4\,619.52)$.

3. **a)** U primjeru **A)** je stambeni, a u primjeru **B)** gotovinski.

b) U primjeru **A)** omjer je 1.10 , a u primjeru **B)** 1.31 .

4. **a)** U primjeru **A)** je gotovinski, a u primjeru **B)** stambeni kredit.

b) U primjeru **A)** omjer je približno 1.30 , a u primjeru **B)** je približno 1.10 .

Rješenja 5.7

3. **a)** "Učiteljica je ocijenila odgovor ocjenom 1.", "Učiteljica je ocijenila odgovor ocjenom 2.", "Učiteljica je ocijenila odgovor ocjenom 3.", "Učiteljica je ocijenila odgovor ocjenom 4.", "Učiteljica je ocijenila odgovor ocjenom 5."

4. **a)** Elementarni događaji su: "izvučena je crvena olovka", "izvučena je plava olovka" i "izvučena je žuta olovka".

b) Elementarni događaji su: "odabrali smo išler", "odabrali smo krašuljak" i "odabrali smo vanilin kiflicu".

c) Npr. za **a)** podzadatak: "izvučena je olovka koja je obojena toplom bojom" ili "izvučena je olovka koja nije obojena žutom bojom", a za **b)** podzadatak: "odabrali smo kolač kojemu je jedan od sastojaka čokolada"

ili "odabrali smo kolač koji smo morali nakon pečenja sastavljati".

5. **a)** $P(A) = \frac{1}{6}$ **b)** $P(B) = \frac{5}{6}$ **c)** $P(C) = \frac{1}{2}$ **d)** $P(D) = \frac{1}{2}$.

6. **a)** $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ **b)** $P(B) = \frac{7}{9}$.

7. **a)** $P(A) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$ **b)** $P(B) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$.

8. **a)** $\frac{19}{39}$ **b)** $\frac{30}{39} = \frac{10}{13}$.

9. **a)** $\frac{3}{99} = \frac{1}{33}$ **b)** $\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$.

10. **a)** $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{2}$.

11. **a)** **1)** $\frac{3}{10}$ **2)** $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ **3)** 0 **4)** $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ **5)** 1.

b) U podzadatku **5)** je siguran događaj, a u podzadatku **3)** nemoguć događaj.

c) Npr. "izvučena je kartica na kojoj nije napisano slovo".

d) Npr. "izvučena je kartica na kojoj je napisan ili zatvornik ili otvornik".

12. U 8.b vjerojatnost je $\frac{25}{43} \approx 58\ \%$, a u 8.c $\frac{120}{214} \approx 56\ \%$. Veća je vjerojatnost u 8.b.

13. Vjerojatnost je $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

14. $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $p(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $p(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $p(D) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$.

Rješenja zadataka za ponavljanje

1. $-4 \in \mathbf{Z}$, $2.7 \in \mathbf{Q}$, $\frac{2}{1} \in \mathbf{N}$, $-3\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$, $4.21\dot{4} \in \mathbf{Q}$, $\frac{121}{11} = 11 \in \mathbf{N}$.

2. **a)** $x = -12 \in \mathbf{Z}$ **b)** $x = \frac{11}{4} \in \mathbf{Q}$ **c)** $x = 4 \in \mathbf{N}$ **d)** $x = \frac{12}{13} \in \mathbf{Q}$ **e)** $x = \frac{23}{14} \in \mathbf{Q}$.

3. **a)** $x_1 = 18$, $x_2 = -18$, da

b) $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$, ne

c) $x = 0$, da **d)** $x = \frac{18}{7}$, ne

e) $x = -1$, da.

4. **a)** 5.3 **b)** -0.007 **c)** 1.25 **d)** -3.4 **e)** $0.\dot{2}$ **f)** $1.\dot{0}\dot{9}$ **g)** $-3.8\dot{3}$ **h)** -4.875 **i)** 0.65.

U primjeru **g)** je mješovito periodičan decimalan broj. U primjerima **e)** i **f)** su čisto periodični decimalni brojevi. Ostali brojevi imaju konačni decimalni zapis.

5. Parovi su **A)** i **c)**, **B)** i **a)**, **C)** i **d)**.

6. $-0.\dot{2}0\dot{9} > -0.29 > -0.\dot{2}\dot{9} > -0.293 > -0.2\dot{9} > -2.9$.

7. Iracionalni su brojevi $\sqrt{39}$, $\sqrt{40}$ i $-\sqrt{5\frac{1}{5}}$.

8. Točne su tvrdnje navedene u primjerima **b)** i **c)**.

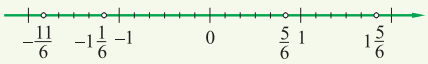
9. Racionalni su brojevi navedeni u primjerima **a)**, **c)** i **d)**.

10. Iracionalni su brojevi navedeni u primjerima **b)**, **c)** i **e)**.

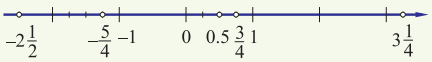
11. **a)** Npr. 1.411, 1.412, 1.413

b) npr. -1.733, -1.734, -1.74.

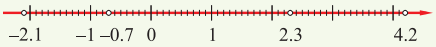
12. **a)**



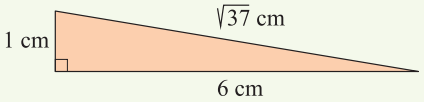
b)



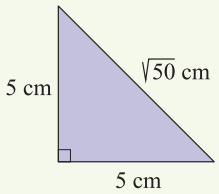
c)



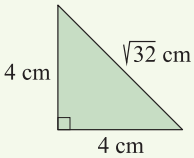
13. **a)** Npr.



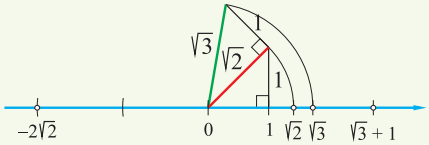
b) Npr.



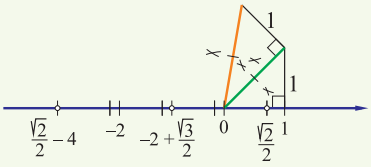
c) Npr.



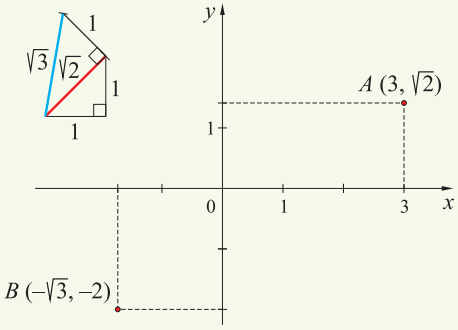
14.



15.



16.



17. **a)** Možemo dobiti 324.61 američkih dolara.

b) Za 2 000 dolara možemo dobiti 12 248.90 kuna.

c) Za 5 000 kuna možemo dobiti 240 890.37 mađarskih forinti.

d) Možemo dobiti 103.16 kuna.

18. **a)** $2\,000 : 8.711506 = 229.58$ GBP. U Londonu će u mjenjačnici prvo kune promijeniti u funte po kupovnom tečaju, a zatim ih promijeniti u dolare po prodajnom tečaju, tj. $(5\,000 \cdot 0.112879) : 0.734906 = 767.98$ USD.

b) $2\,000 \cdot 0.112879 = 225.76$ GBP. U New Yorku će joj kune promijeniti po kupovnom tečaju: $5\,000 \cdot 0.155907 = 779.54$ USD.

19. **a)** U kreditu **A)** riječ je o gotovinskom, a u kreditu **B)** o stambenom kreditu.

b) U kreditu **A)** omjer je približno jednak 1.42, a u kreditu **B)** približno je 1.16.

20. **a)** $\frac{1}{45}$ **b)** $\frac{23}{45}$ **c)** 0 **d)** 1.

U primjeru **c)** je nemoguć, a u primjeru **d)** siguran događaj.

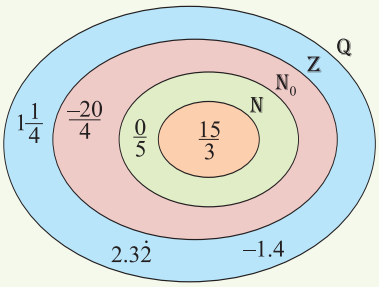
21. **a)** Vjerojatnost je $\frac{4}{5}$.

b) Mario je odabrao voćni kolač.

c) Mario je odabrao kuglicu sladoleda.

Rješenja jednostavnih zadataka

1.



2. Ima, rješenje jednadžbe je broj -11.

3. Da, rješenje jednadžbe je broj 4.

4. $x_{1,2} = \pm 10$. Jednadžba nije rješiva u skupu $\mathbf{N}$.

5. $x_{1,2} = \pm\frac{5}{3}$. Jednadžba je rješiva u skupu $\mathbf{Q}$.

6. **a)** 0.3 **b)** 0.8 **c)** -1.5 **d)** -1.75.

7. **a)** $0.\dot{6}$ **b)** $-0.1\dot{6}$.

8. **a)** Npr. 1.476 **b)** npr. $-2.\dot{3}$ **c)** npr. $219.05\dot{7}4\dot{3}$.

9.

razlomak	decimalni broj	vrsta decimalnog zapisa
$\frac{231}{100}$	2.31	decimalni broj s konačnim zapisom
$-\frac{25}{3}$	$-8.\dot{3}$	čisto periodični decimalni broj
$-\frac{17}{6}$	$-2.8\dot{3}$	mješovito periodični decimalni broj
$\frac{5}{11}$	$0.\dot{4}\dot{5}$	čisto periodični decimalni broj

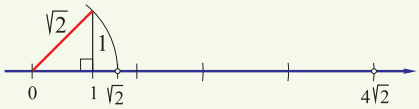
10. $23.\dot{1}0\dot{4} < 23.14 < 23.4 < 23.\dot{4}$.

11. Iracionalni brojevi su $\sqrt{3}$ i $\sqrt{12}$.

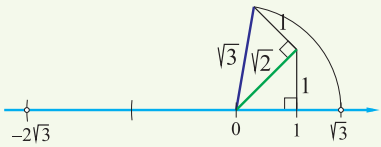
12. Točne tvrdnje su u primjerima **c)** i **d)**.

13. U bilježnicu je trebalo nacrtati crteže u primjerima **a)** i **d)**.

14.



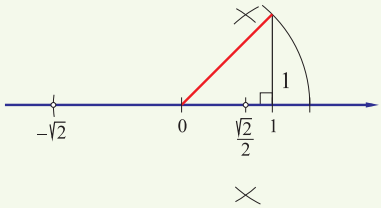
15.



16. Nedostaju brojevi -2, $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}+1$.

17. Nedostaju brojevi $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$.

18.



19. **a) A)** Možemo dobiti 7 605 kuna.

B) Za 1 000 američkih dolara možemo dobiti 5 369.25 kuna.

C) Možemo dobiti 52.63 kune.

b) A) Za 1 000 kuna možemo dobiti 129.37 eura.

B) Možemo dobiti 175.70 američkih dolara.

C) Možemo dobiti 17 924.74 japanskih jena.

20. Omjer je 1.16.

21. Samo kartica na kojoj je navedeno "o cijeni stana koji kupujemo" nije dobar odabir.

22. **a)** $\frac{1}{14}$ **b)** 0 **c)** 1.

Siguran događaj je naveden u podzadatku **c)**.

23. **a)** $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{2}{5}$.

Rješenja složenijih zadataka

1. **a)** $x_1 = 5$, $x_2 = -3$, ona rješenja su racionalni brojevi.

b) x^2 je uvijek nenegativan broj te je x^2+1 uvijek pozitivan broj pa je $|x^2+1| = x^2+1$. Jednadžba $x^2+1 = 2$ ima rješenja $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ koja pripadaju skupu racionalnih brojeva.

c) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, zadana jednadžba nema rješenja u skupu racionalnih brojeva.

2. **a)** $x^2+2x+1 = 0$, $(x+1)^2 = 0$. Rješenje jednadžbe je $x = -1$, pa je $x+2 = -1+2 = 1$.

b) $\frac{1}{-1} = -1$.

3. Ima ih $4\,042$. To su brojevi od $4\,080\,400$ do $4\,084\,441$.

4. $n \in \{0, 1, 4\}$.

5. $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{(5+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}=|5+\sqrt{2}|+|5-\sqrt{2}|=10\in\mathbf{Z}$.

6. $x+y=xy$, $x(y-1)=y$, $x=\dfrac{y}{y-1}$, $x=\dfrac{y-1+1}{y-1}=1+\dfrac{1}{y-1}$. Broj $y-1$ dijeli 1, a to je moguće samo ako je $y-1$ jednak -1 ili 1, tj. $y=0$ ili $y=2$. $y=0$ nije prirodan broj pa je rješenje $(x,y)=(2,2)$.

7. Npr. $m=-\dfrac{2}{3}$ ili $m=-\dfrac{1}{6}$ ili $m=-\dfrac{2}{27}$.

8. $\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{11}}=\sqrt{(6-\sqrt{11})(6+\sqrt{11})}=\sqrt{36-11}=\sqrt{25}=5\in\mathbf{Z}$.

9. **a)** $\dfrac{19}{11}=1.\dot{7}\dot{2}$. Da bi rezultat bio 9, zbrajamo dvije decimale $7+2=9$.

b) Da bi rezultat bio 90, zbrajamo dvadeset decimala.

c) Da bi rezultat bio $2\,070$, zbrajamo 460 decimala.

10. $\dfrac{5}{14}=0.3\underbrace{\dot{5}7142\dot{8}}_{5+7+1+4+2+8=27}$. Računamo $38\,\underset{3}{1}:27=14$. Zaključujemo da zbrajamo 14 puta po 6 znamenaka u periodu i još znamenku 3. Dakle, zbrojimo jednu plus 14 puta po 6 znamenaka, što je ukupno 85 znamenaka.

11. Za tražene brojeve x vrijedi $16<x<25$ te je $x\in\{17,18,19,20,21,22,23,24\}$. Osam je traženih brojeva. Uoči: $25-16-1=8$.

12. Za tražene brojeve x vrijedi $150^2<x<151^2$. Traženih brojeva ima $151^2-150^2-1=(151^2-150^2)-1=(151-150)(151+150)-1=301-1=300$. Mogli smo i ovako računati: $151^2-150^2-1=22\,801-22\,500-1=300$.

13. $0<(\sqrt{2}-1)^2<1$, $55<(2\sqrt{3}+4)^2<56$. Tražimo koliko je parnih brojeva manjih od 56. Takvih je brojeva 27.

14. Označimo $a=3.\dot{4}$. Tada je $10\cdot a=34.\dot{4}$. Vrijedi:

$$10\cdot a-a=34.\dot{4}-3.\dot{4}=31$$
$$9\cdot a=31\ /\ :9$$
$$a=\frac{31}{9}.$$

Označimo $b=0.\dot{7}\dot{2}$. Tada je $100\cdot b=72.\dot{7}\dot{2}$. Vrijedi:

$$100\cdot b-b=72.\dot{7}\dot{2}-0.\dot{7}\dot{2}=72$$
$$99\cdot b=72\ /\ :99$$
$$b=\frac{72}{99}=\frac{8}{11}.$$

15. Ukupni broj ishoda je $6\cdot6\cdot6=216$. Označimo s $A=\{$zbroj brojeva u tri uzastopna bacanja je 3, 5 ili 7$\}$. Povoljni su sljedeći ishodi: $1+1+1$, $1+2+2$, $2+1+2$, $2+2+1$, $1+1+3$, $3+1+1$, $1+3+1$, $1+1+5$, $1+5+1$, $5+1+1$, $1+2+4$, $1+4+2$, $2+1+4$, $2+4+1$, $4+1+2$, $4+2+1$, $1+3+3$, $3+1+2$, $3+3+1$, $2+2+3$, $2+3+2$ i $3+2+2$. $p(A)=\dfrac{22}{216}=\dfrac{11}{108}$.

16. Ukupni broj ishoda je $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$. Povoljni su ishodi $PPGG$, $GPPG$, $GGPP$, $PPPG$, $GPPP$, $PPPP$. Tražena vjerojatnost je $\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$.

17. Ukupan broj ishoda je $6\cdot6=36$. Povoljni ishodi su $(0,4)$, $(4,0)$, $(1,3)$, $(3,1)$ i $(2,2)$. Tražena je vjerojatnost $\dfrac{5}{36}$.

18. Dvoznamenkastih prirodnih brojeva ima 90 pa je toliko elementarnih događaja od kojih je 13 povoljnih. Tražena vjerojatnost je $\dfrac{13}{90}$.

19. Parnih prirodnih brojeva manjih od ili jednakih 100 ima 50. Među njima su povoljni brojevi: 4, 6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 58, 62, 74, 82, 86 i 94. Tražena vjerojatnost je $\dfrac{3}{10}$.

20. Za koordinatu x imamo 7 mogućnosti (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3), a isto i za koordinatu y. Ukupno je $7\cdot7=49$ elementarnih događaja od kojih je povoljno njih 7. Stoga je tražena vjerojatnost $\dfrac{7}{49}=\dfrac{1}{7}$.

21. Skup elementarnih događaja je skup $\{1,2,3,4\ldots97,98,99,100\}$. Povoljni događaji su 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 i 100. Tražena vjerojatnost je $\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$.

22. Elementarnih događaja je 15, a povoljnih je 11 (brojevi koji se ne mogu zapisati kao zbroj dvaju prostih brojeva su 1, 2, 3 i 11). Tražena vjerojatnost je $\dfrac{11}{15}$.

6. Planimetrija

Rješenja 6.1

1. **a)** $4:3$ **b)** $3:5$ **c)** $12:4=3:1$.

2. **a)** $7:3$ **b)** $4:3$.

3. **a)** $1:7$ **b)** $50:3$ **c)** $1:100$ **d)** $10:3$ **e)** $6:1$ **f)** $19:12$.

4. **a)** Da **b)** ne **c)** da.

5. **a)** a i y **b)** $a+b$ i d **c)** x i 7 **d)** 18 i $y+2$.

6. **a)** $x=3$ **b)** $x=174$ **c)** $x=11$ **d)** $x=0.1$.

7. **a)** $x=14$ **b)** $x=3$ **c)** $x=2.3$ **d)** $x=\frac{39}{5}$.

8. **a)** $x=-\frac{11}{9}$ **b)** $x=-\frac{13}{2}$ **c)** $x=-\frac{29}{12}$ **d)** $x=10$.

9. Djevojčica ima 240, a dječaka 210.

10. $7k+13k=1\,000\,000$, $k=50\,000$. Popunjeno je 350 000 MB.

11. 1.5 litara sirupa. **12.** Treba mu 2.25 sata.

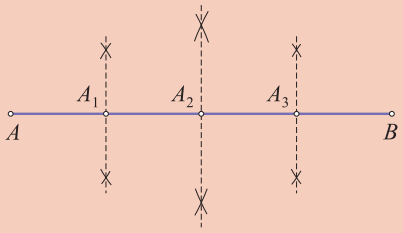
13. $a=0.8\text{ dm}$, $b=1.8\text{ dm}$, $P=1.44\text{ dm}^2$.

14. 175 mL. **15.** 20°, 100°, 60°.

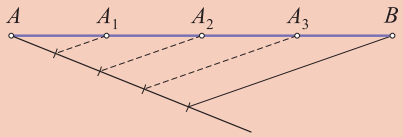
16. $\alpha=80^\circ$. **17.** Sven je dao 1 080 kn.

Rješenja 6.2

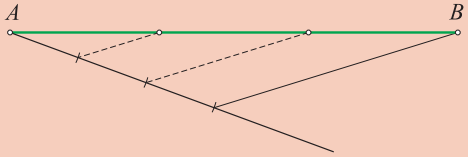
1. **a)**



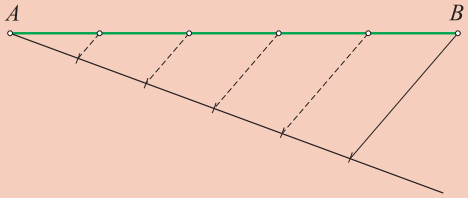
b)



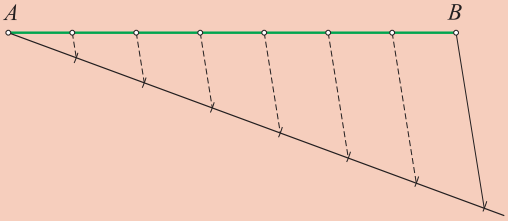
2. **a)**



b)



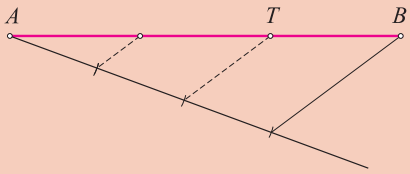
c)



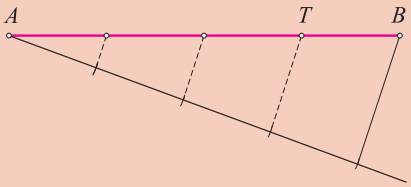
3. **a)** $2:4=1:2$ **b)** $5:1$ **c)** $1:5$.

4. **a)** $1:7$ **b)** $4:2=2:1$ **c)** $2:1$.

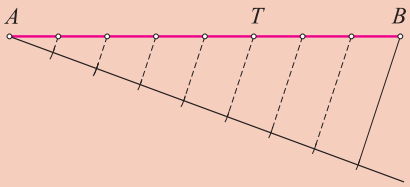
5. **a)**



b)



c)



6. **a)** $1.5:1=3:2$ pa je dijelimo u omjeru $3:2$

b) $2.5:2=5:4$ **c)** $\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=2:1$.

7. **a)** $1:5$ **b)** $2:4=1:2$ **c)** $3:1$ **d)** $6:1$ **e)** $2:3$ **f)** $3:3=1$.

8. Dužinu duljine 8.3 cm podijeli na 3 jednaka dijela. Svaki dio je stranica trokuta.

9. Dužina duljine 11.6 cm podijeli se na 6 jednakih dijelova i konstruira se šesterokut čija je stranica jedan od tih dijelova.

10. Dužina od 12 cm podijeli se na 8 jednakih dijelova. Dva dijela čine osnovicu, a tri dijela krak.

11. Dužina od 14 cm podijeli se na 11 jednakih dijelova. Tri dijela čine osnovicu, a četiri dijela krak.

12. Dužina od 10 cm podijeli se na 8 jednakih dijelova. Tri dijela čine osnovicu, a pet dijelova visinu.

13. Dužina od 11 cm podijeli se na 13 jednakih dijelova. Tri dijela čine jednu stranicu, 4 dijela drugu i 6 dijelova treću.

14. Dužina od 12.8 cm podijeli se na 14 jednakih dijelova. Dva dijela čine jednu stranicu pravokutnika, a 5 dijelova drugu.

Rješenja 6.3

1. **a)** $x = \frac{10}{3}$ **b)** $x = 3.4$.

2. **a)** $d = 22.4$ **b)** $d = 9$.

3. **a)** $x = 7.65$ **b)** $x = 6.6$ **c)** $x = 1.6$ **d)** $x = 6$.

4. **a)** $x = 5.4$ **b)** $x = 4.8$.

5. **a)** $x = 3.6$ **b)** $x = 1.75$ **c)** $x = \frac{7}{6}$.

6. **a)** $y = 33$, $x = 36$ **b)** $x = 12$, $y = 6$.

7. $y = 37.5$, $x = 50$.

8. **a)** $3 : 7 \neq 2 : 6$ pa nisu usporedni

b) $4 : 2 = 3 : 1.5$ pa jesu usporedni.

9. **a)** Možemo jer zbog oznake za prave kutove znamo da su pravci a i b koji sijeku krakove kuta paralelni.

b) Ne možemo jer nije rečeno jesu li a i b usporedni niti su označeni kutovi uz presječnicu.

Rješenja 6.4

1. **a)** $\triangle ABC \sim \triangle FDE$ **b)** $\triangle ABC \sim \triangle C'B'A'$

c) $\triangle ABC \sim \triangle NPM$ **d)** $\triangle ABC \sim \triangle SRT$.

2. **a)** $ABCD \sim KLMN$ **b)** $ABCD \sim SRUT$.

3.

$\triangle ABC$				
a	12 cm	0.5 cm	2 m	12 dm
b	13 cm	4 mm	48 dm	9 dm
c	14 cm	7 mm	4 m	1 m
$\triangle A'B'C'$				
a'	6 cm	25 mm	25 mm	12 cm
b'	6.5 cm	20 mm	6 m	0.9 dm
c'	7 cm	3.5 cm	5 m	1 dm

4. Da.

5. $\frac{a'}{a} = \frac{9}{5}$, $\frac{18}{a} = \frac{9}{5}$, $a = 10$ cm, $\frac{9}{b} = \frac{9}{5}$, $b = 5$ cm, $\frac{15}{c} = \frac{9}{5}$, $c = \frac{25}{3}$ cm.

6. $a = 14$ dm, $a' = 210$ dm, $k = \frac{a'}{a} = \frac{210}{14} = 15$.

$\frac{b'}{b} = 15$, $\frac{b'}{12} = 15$, $b' = 180$ dm $= 18$ m, $c' = 150$ dm $= 15$ m.

7. $k < 1$ pa je $\frac{c}{c'} = k$, $c = kc' = \frac{3}{4} \cdot 44 = 33$ cm, $\frac{a}{a'} = k$, $a' = \frac{a}{k} = \frac{3}{0.75} = 4$ dm, $b' = 36$ cm.

8. Da. Oba trokuta su jednakostranična pa imaju odgovarajuće kutove sukladne. Također i sve stranice im se odnose jednako i to u omjeru $4 : a'$, gdje je $a' = |DE|$.

9. Jesu jer oba imaju sve kutove prave, a budući da u jednom kvadratu vrijedi $a = b = c = d$, a u drugom $a' = b' = c' = d'$, omjeri duljina odgovarajućih stranica su jednaki.

10. **a)** Ne **b)** da.

11. Pravokutnik mora biti kvadrat i sve stranice su mu duge 6 cm.

12. Unutarnji kutovi svakog pravilnog šesterokuta su $120°$ jer je $\alpha_6 = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = \frac{(6-2) \cdot 180°}{6} = 120°$. Dakle, ta dva mnogokuta imaju sukladne odgovarajuće kutove. Sve stranice manjeg šesterokuta su 11 mm, a sve stranice većeg su 15 mm pa su omjeri stranica svi jednaki $\frac{11}{15}$ (ili $\frac{15}{11}$ što ovisi o tome u koji poredak stavljamo stranice). Ta dva pravilna šesterokuta su slični mnogokuti i $k = \frac{11}{15}$.

13. $\frac{a}{a'} = \frac{3}{2}$, $a' = 2$ cm, $b' = 3$ cm.

14. **b)**.

15. **a)** 2) **b)** 1) **c)** 2) **d)** 3).

16. **a)** Da **b)** ne **c)** da.

17. Da. Kutovi su im sukladni, a stranice se odnose kao $1 : 1$.

Rješenja 6.5

1. **a)** Da, prema K-K poučku.

b) Treći kut prvog trokuta je $180° - 33° - 78° = 69°$ pa su slični prema K-K poučku.

c) Da, prema K-K poučku. **d)** Nisu.

2. **a)** $\frac{15}{5} = \frac{12}{4} = 3$. Da, prema S-K-S poučku o sličnosti.

b) $\frac{8}{6} = \frac{12}{9} = 4 : 3$. Da, prema S-K-S poučku o sličnosti.

c) $\frac{3}{1} = \frac{4.5}{1.5} = 3$. Da, prema S-K-S poučku o sličnosti.

d) $\frac{4}{5} = \frac{3}{3.75}$. Da, prema S-K-S poučku o sličnosti.

3. **a)** $\frac{25}{5} = \frac{30}{6} = 5$. Da, prema S-S-S poučku o sličnosti.

b) i **c)** Da, prema S-S-S poučku o sličnosti.

d) Ne jer $\frac{16}{8} = \frac{14}{7} = 2$ i $\frac{10}{6} \neq 2$.

e) i **f)** Da, prema S-S-K poučku o sličnosti.

4. **a)** Da (S-K-S) $k = \frac{b'}{b} = 2$.

b) Da (S-S-S) $k = \frac{a'}{b} = 25$.

5. **a)** $\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$ pa je $6 : 12 = 12 : x$, $x = 24$.

b) $15 : 12 = (x + 2) : x$, $x = 8$.

6. **a)** $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, $8 : (8 + 2) = x : 6$, $x = 4.8$, $y : 8 = 8 : 10$, $y = 6.4$

b) $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, $x : 9 = 9 : 12$, $x = \frac{27}{4}$, $6 : y = 9 : 12$, $y = 8$.

7. Cijeli trokut i njegov obojeni dio su slični prema K-K poučku o sličnosti. Omjeri duljina stranica su $\frac{1.5}{2.4} = \frac{x}{3.84}$, $x = 2.4$.

8. **a)** $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, $e = \sqrt{f^2 - d^2} = 4.4$. Omjeri stranica su 1.1 pa su trokuti slični prema S-S-S poučku o sličnosti.

b) $b = 12$, $f = 10.4$. Stranice se odnose kao $4 : 5$ pa su trokuti slični prema S-S-S poučku o sličnosti.

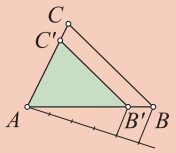
9. $\triangle AED \sim \triangle CFD$ jer $\varepsilon = \varepsilon$, $\sphericalangle EAD \cong \sphericalangle FCD = \alpha$. Omjeri odgovarajućih stranica su $\frac{6}{8} = \frac{2}{y} = \frac{5}{x}$, $y = \frac{8}{3}$, $x = \frac{20}{3}$.

10. S pomoću štapa i mjerenjem sjena kao u primjeru 4.

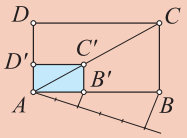
11. $o = 14 + 20 + 19 = 53$ mm, $k = \frac{12}{30}$, $\frac{53}{o'} = \frac{12}{30}$, $o' = 132.5$ mm.

12. $k = \frac{6}{4.5}$, $\frac{o}{o'} = k$, $\frac{20}{o'} = \frac{6}{4.5}$, $o' = 15$ cm.

13. **c)**



14. **b)**



Rješenja 6.6

2. **a)** Kružnice se ne sijeku.
b) Kružnice se sijeku u točkama C i D.
c) Kružnice se ne sijeku i jedna je unutar druge.
d) Kružnice se dodiruju izvana u točki A.
e) Kružnice se dodiruju iznutra u točki T.

3. **a)** Sijeku se **b)** sijeku se **c)** dodiruju se izvana **d)** ne sijeku se.

4. Parovi su **a)** i **B)**, **b)** i **D)**, **c)** i **A)**, **d)** i **C)**.

6. Točno je **b)** i **c)**. **7.** Točno je **c)** i **d)**.

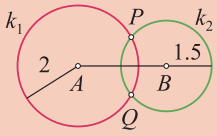
8. **a)** Dodiruju se izvana **b)** dodiruju se iznutra **c)** koncentrične su.

9. **a)** $|S_1S_2| < r_1 + r_2$ **b)** $|S_1S_2| = r_1 + r_2$.

10. **a)** $r_2 = 1$ cm **b)** $1 < r_2 < 7$
c) ne postoji takva kružnica k_2.

11. To je kružnica $k(A, r = 23 \text{ mm})$.

12.

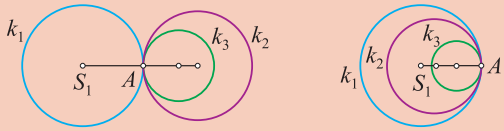


To su točke P i Q koje su presjek kružnica $k_1(A, 2 \text{ cm})$, $k_2(B, 1.5 \text{ cm})$.

13. $k_1(M, r_1 = 17 \text{ mm})$, $k_2(M, r_2 = 33 \text{ mm})$.

14. Ima beskonačno rješenja. Za bilo koju kružnicu polumjera r, $r > 1.5$ cm postoje dvije kružnice koje s prvom čine vijenac širine 1.5 cm.

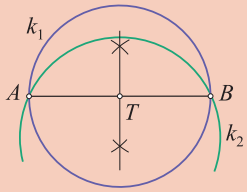
15. **a)** **b)**



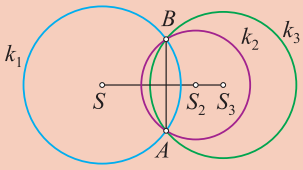
16. **a)** Kružnice se ne sijeku.
b) Sijeku se u dvjema točkama.
c) Kružnice se ne sijeku.

17. $r_4 = 2r_1 + r_2 = 31$ mm, $r_3 = r_1 = 9$ mm.

18. $k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$.

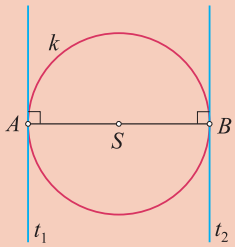


19. Središta su na simetrali tetive $\overline{AB}$.

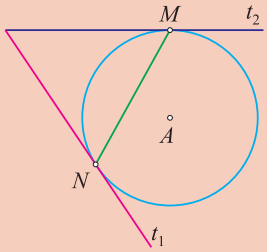


20. p i q.

21. $t_1 \| t_2$.



22. t_1 i t_2 se sijeku.



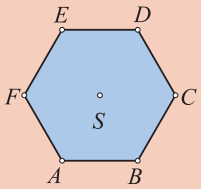
Rješenja 6.7

1. **a)** $180°$ **b)** $90°$ **c)** $270°$.

2. **a)** $\alpha = 72°$ **b)** $120°$ **c)** $90°$ **d)** $135°$.

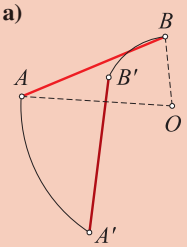
3. **a)** $180°$ ili $-180°$ **b)** $90°$ ili $-270°$
c) $270°$ ili $-90°$.

4.

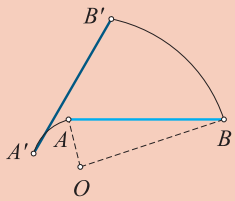


a) $60°$ ili $-300°$
b) $120°$ ili $-240°$
c) $240°$ ili $-120°$.

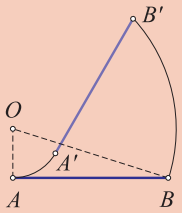
5. a)



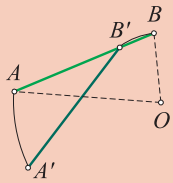
b)



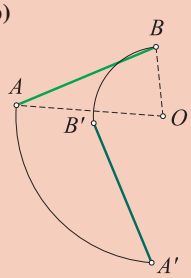
c)



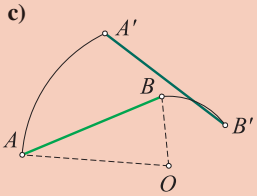
6. a)



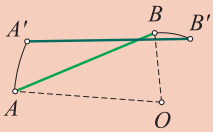
b)



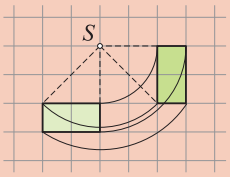
c)



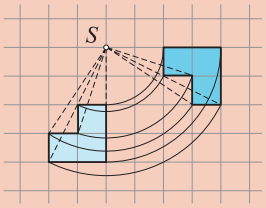
d)



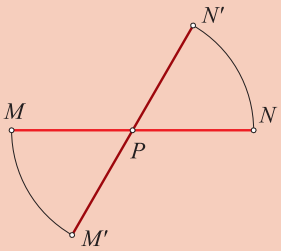
7. a)



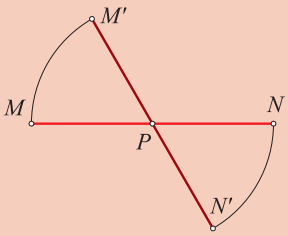
b)



8. a)



b)



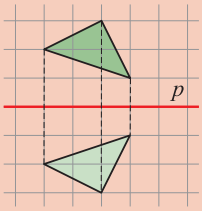
12. 180°, 270°, 360°.

13. **a)** Središte je središte opisane kružnice, a kutovi su 120°, 240°, 360°.

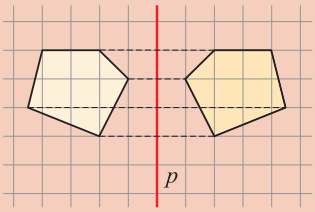
b) Središte rotacije je središte opisane kružnice, a kutovi su 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°.

Rješenja 6.8

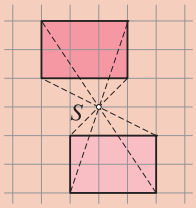
1. a)



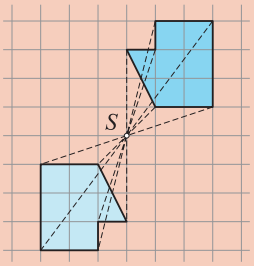
b)



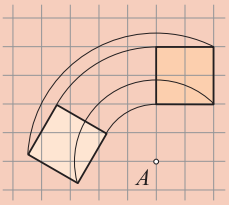
2. a)



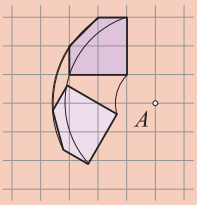
b)



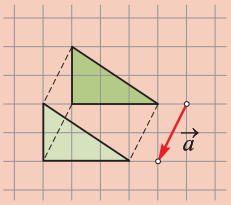
3. a)



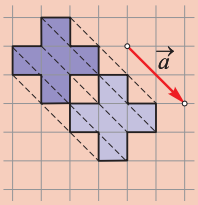
b)



4. a)



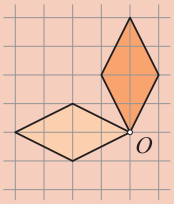
b)



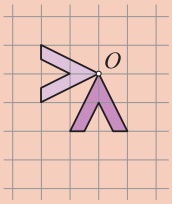
5. a) i d).

6. a) i d).

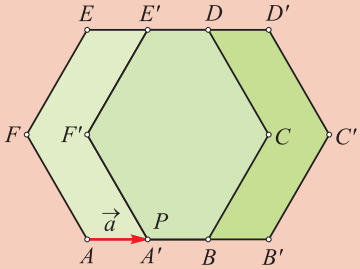
7. a)



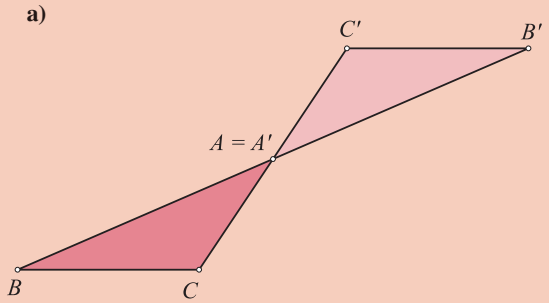
b)



8.



9. **a)**



10. $A'(-1,0)$, $B'(0,0)$, $C'(3,1)$, $D'(-5,1)$, $E'(-4,-4)$.

13. **a)** Rotacija pa translacija

b) osna simetrija pa translacija.

14. **a)** Nisu dobre oznake. **b)** Točno.

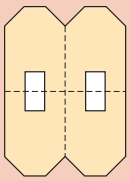
c) Donji polukrug treba biti s donje strane dužine $\overline{A'B'}$.

d) To nisu osnosimetrični trokuti.

15. Centralnosimetrični su.

16. Translacija za vektor $\vec{a}+\vec{b}$.

19.



Rješenja zadataka za ponavljanje

1.

razmjer	vanjski članovi	unutarnji članovi
$5 : x = 10 : 17$	5 i 17	x i 10
$(x+2) : 7 = x : 11$	$x+2$ i 11	7 i x
$15 : a = b : 18$ $15 : b = a : 18$ $18 : a = b : 15$ $18 : b = a : 18$	15 i 18	a i b
$(x-4) : (2x-1) = 8 : (x+2)$ $(x-4) : 8 = (2x-1) : (x+2)$ $(x+2) : (2x-1) = 8 : (x-4)$ $(x+2) : 8 = (2x-1) : (x-4)$	$x-4$ i $x+2$	$2x-1$ i 8

2. **a)** $x=2$ **b)** $x=\frac{3}{7}$ **c)** $x=\frac{5}{4}$ **d)** $x=\frac{8}{21}$.

3. **a)** $x=-2$ **b)** $x=2$ **c)** $x=8$ **d)** $x=-1$

e) $x=\frac{1}{7}$ **f)** $x=6$.

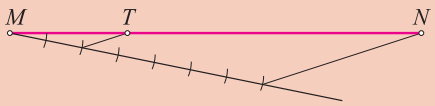
4. $1 : x = 1.92 : 4\,800\,000$, $x = 2\,500\,000$. Mjerilo je $1 : 2\,500\,000$.

5. 60° i 78°. **6.** 80°.

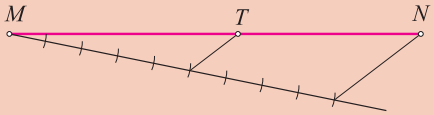
7. 3 cm.

8. Može se podijeliti s pomoću simetrale ili postupka opisanog u poglavlju 5.2

9. **a)**



b) $2.5 : 2 = 5 : 4$



10. **a)** $3:8$ **b)** $2:5$ **c)** $4:4=1:1$ **d)** $7:1$.

11. **a)** $x=\frac{40}{7}$ **b)** $x=5.1$.

12. **a)** $d=12$ **b)** $d=10$.

13. **a)** $x=1.4$ **b)** $x=\frac{30}{7}$.

14. **a)** Ne **b)** da.

15. $a=4$, $b=3$, $\gamma=90^\circ$, $\alpha=90^\circ-\beta=53.1^\circ$, $\alpha'=53.1^\circ$, $\beta'=36.9^\circ$.

16. $\triangle ABC \sim \triangle HJG \sim \triangle MNP$, $\triangle FED \sim \triangle RTS$.

17. **a)** Jesu jer imaju kutove 60°, 60°, 60° pa su slični prema K-K poučku o sličnosti.

b) Ne. Primjerice trokut s kutovima 10°, 10°, 160° nije sličan trokutu s kutovima 20°, 20°, 140°.

18. $k=\frac{135}{81}$, $\frac{17}{b'}=\frac{135}{81}$, $b=8.4$ dm, $c=87$ cm.

19. $a=30$ cm, $b=31.5$ cm, $c=2.7$ dm.

20. **a)** Da **b)** ne.

21. **a)** Jesu jer imaju sve kutove sukladne i stranice proporcionalne.

b) Ne. Primjerice pravokutnik 2×3 nije sličan pravokutniku 1×5.

22. **b)** Da **c)** ne.

23. $o'=105$ cm.

24. $a'=75$ cm, $b'=65$ cm, $c'=60$ cm.

25. $\triangle ADC \sim \triangle A'CD'$, $\triangle CDB \sim \triangle CD'B'$, $\triangle ADC \sim \triangle A'B'C$,

26. $\triangle ABC \sim \triangle FEC \sim \triangle DBE$.

27. **a)** Da **b)** ne.

28. **a)** Da, prema K-K poučku **b)** nisu.

29. $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ pa je $145 : 61 = (|AB|+96) : 96$, $|AB| = 132.2$ m.

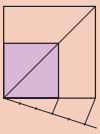
30. Mogu se izmjeriti $|BE|$, $|EC|$, $|CD|$ pa je $|AB| = \frac{|EB|\cdot|CD|}{|EC|}$.

31. $x : 32 = 2.5 : 3.6$, $x = 22.22$ m.

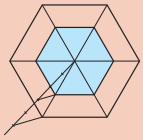
32. $a : a' = 3 : 5$, $a'-a = 14$, $a = 21$ cm, $a' = 35$ cm.

33. $o = 126$ cm, $o' = 198$ cm.

35. **c)**



36. **b)**



37. **a)** $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ jer $\sphericalangle AEB \cong \triangle CED$ (vršni), $\sphericalangle BAE \cong \triangle DCE$ (uz presječnicu). Omjeri duljina stranica su $\frac{18}{y} = \frac{10}{5} = \frac{11}{x}$, $y = 9$, $x = 5.5$.

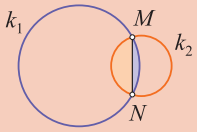
b) $\frac{25}{15} = \frac{16}{x} = \frac{y}{8}$, $x = 9.6$, $y = \frac{40}{3}$.

38. **b)** .

39. **a)** $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ **b)** $K_1 \cap K_2 = \{A\}$

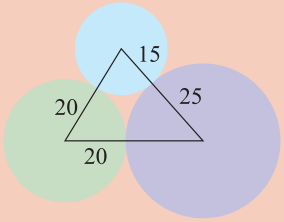
c) $K_1 \cap K_2 = K_1$

d) $K_1 \cap K_2$ je lik koji se sastoji od dva kružna odsječka određena tetivom $\overline{MN}$.



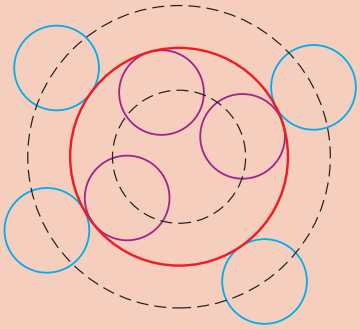
40. **b)** Ako kružnice imaju isti polumjer, tada se podudaraju i njihov presjek je cijela kružnica.

41. Konstruira se trokut sa stranicama $15 + 20 = 35$ mm, $15 + 25 = 40$ mm, $20 + 25 = 45$ mm. Središta krugova su vrhovi tog trokuta.



42. **a)** $r_2 = 3$ cm **b)** $o = 2r\pi = 12\pi$, $o_1 + o_2 = 6\pi + 6\pi = 12\pi$. Omjer je $1 : 1$.

43.



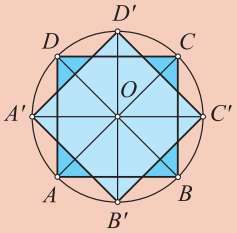
a) Na kružnici $k_2(S_1, r = 11$ mm$)$

b) na $k_3(S_1, r = 25$ mm$)$.

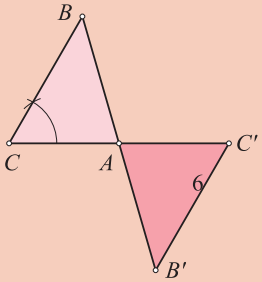
44. **a)** Ako je t tangenta na k_1, tada je $|\sphericalangle S_1D_1T| = 90°$. Također $|\sphericalangle S_2D_2T| = 90°$. Trokuti su slični prema K-K poučku o sličnosti trokuta jer osim što oba imaju pravi kut, imaju još i zajednički kut $\sphericalangle S_1TD_1$.

b) $5 : 3 = (8 + x) : x$ gdje je $x = |S_2T|$. $x = 12$ cm.

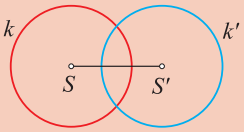
45.



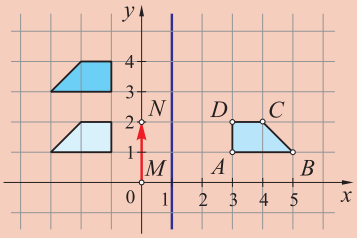
49. **a)**



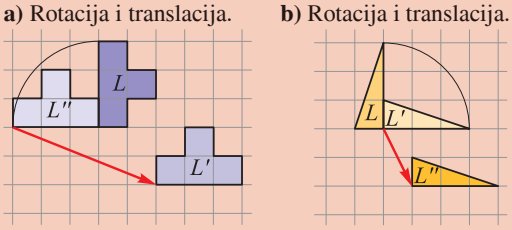
50. Sijeku se.



51.



52. **a)** Rotacija i translacija. **b)** Rotacija i translacija.



Rješenja jednostavnih zadataka

1.

razmjer	vanjski članovi	unutarnji članovi
$4 : 5 = 12 : 15$	4 i 15	5 i 12
$10 : 49 = 20 : 98$	10 i 98	49 i 20
$1 : 10 = 10 : 100$	1 i 100	10 i 10
$a : b = x : y$	a i y	b i x

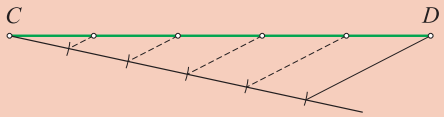
Kod trećeg i četvrtog razmjera ima više rješenja. Osim $1 : 10 = 10 : 100$, moglo je pisati $100 : 10 = 10 : 1$. Osim $a : b = x : y$, moglo je pisati $y : b = x : a$, $y : x = b : a$, $a : x = b : y$.

2. **a)** $x = 3$ **b)** $x = 8$ **c)** $x = 9$ **d)** $x = 21$.

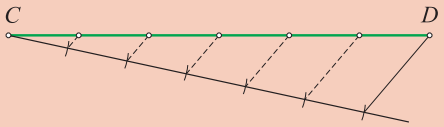
3. **a)** $x = 5$ **b)** $x = 3$.

4. $2:3=20:x$, $x=30$. Ima ih 30.

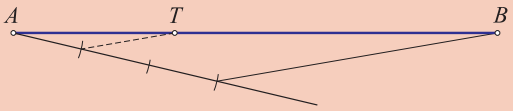
5. **a)**



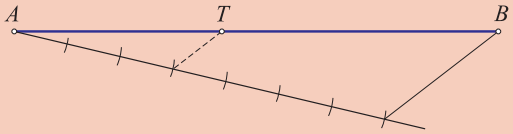
b)



6. **a)**



b)



7. **a)** $1:3$ **b)** $2:2$ ili $1:1$ **c)** $1:2$ **d)** $4:1$.

8. **a)** $x=8$ **b)** $x=3$.

9.

ABC	a	10 cm	12 dm	1 m
	b	8 cm	15 dm	9 dm
	c	9 cm	15 dm	8 dm
$A'B'C'$	a'	20 cm	4 dm	5 m
	b'	16 cm	5 dm	45 dm
	c'	18 cm	5 dm	40 dm

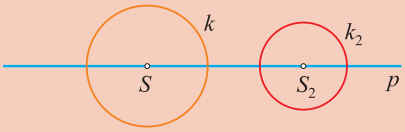
10. $c=20$ dm, $a'=13$ dm, $b'=11$ dm.

11. **a)** Da **b)** ne.

12. Visok je 40 m.

13. Sijeku se.

14. Ima više rješenja.

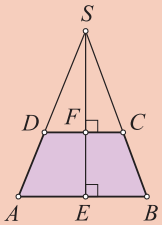


15. 29 mm.

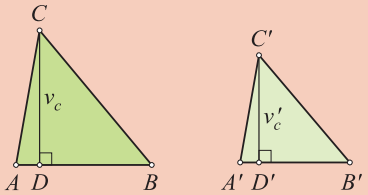
16. $k_1 \cap k_2 = \{A\}$.

Rješenja složenijih zadataka

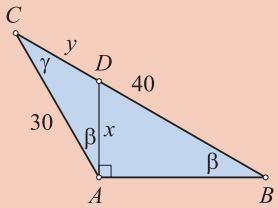
1. Trokuti ABC i $A'B'C'$ su slični (pravokutni su i imaju jednak kut α). Tada su im i odgovarajuće stranice proporcionalne, tj. $\frac{b'}{b}=\frac{v_c'}{v_c}$. Ali iz sličnosti trokuta ABC i $A'B'C'$ znamo da je $\frac{b'}{b}=k$ pa je i $\frac{v_c'}{v_c}=k$.



2. Trokuti ABS i DCS su slični s koeficijentom $\frac{|AB|}{|DC|}=\frac{36}{32}=\frac{9}{8}$. Tada im se i visine iz vrha S odnose kao $\frac{9}{8}$ (vidi prethodni zadatak), tj. $\frac{|SE|}{|SF|}=\frac{9}{8}$. Ujedno je $|SF|=|SE|-18$ pa je $|SF|=162$ cm.



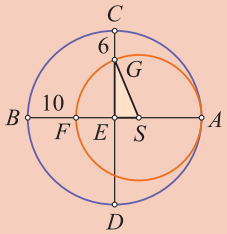
3.



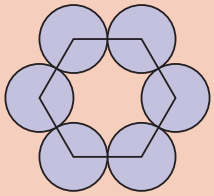
Budući da je $\alpha=90^\circ+\beta$, kad dignemo okomicu iz A, tada je kut DAC veličine β. Trokuti ACD i BCA su slični (prema K-K poučku o sličnosti jer imaju dva kuta u kojima se podudaraju β i γ). Iz te sličnosti vrijedi: $\frac{|AB|}{|DC|}=\frac{|BC|}{|AB|}$, tj. $\frac{30}{x}=\frac{40}{c}$, $x=\frac{3c}{4}$. Također je $\frac{|AC|}{|CD|}=\frac{|BC|}{|AC|}$, tj. $\frac{30}{y}=\frac{40}{30}$, $y=\frac{900}{40}=\frac{45}{2}$. Prema Pitagorinu poučku za trokut ABD vrijedi $|BD|^2=|AB|^2+|AD|^2$ pa je $(40-y)^2=c^2+x^2$. Uvrstimo $x=\frac{3c}{4}$ i $y=\frac{45}{2}$ dobivamo $\frac{1\,225}{4}=c^2+\frac{9c^2}{16}$, $c^2=196$, $c=14$ cm.

4. Vrijedi da je $|ES|=|SD|=r$. Trokuti BES i SDA su slični. Zato je $\frac{|AS|}{|SD|}=\frac{|SB|}{|BE|}$. Prema Pitagorinu poučku u trokutu BES vrijedi $|BE|=\sqrt{30^2-r^2}$. Stoga je $\frac{40}{r}=\frac{30}{\sqrt{30^2-r^2}}$ pa je $4\sqrt{900-r^2}=3r$ odakle kvadriranjem dobivamo $16(900-r^2)=9r^2$, $r^2=576$, $r=24$ cm.

5. Točka S je središte manje kružnice. Polumjer manje označimo s r, a veće s R. Prema Pitagorinu poučku u trokutu ESG vrijedi $r^2=(R-6)^2+(R-r)^2$. Ujedno vrijedi $2r=2R-10$ pa se dobiva $R=18$, $r=13$.



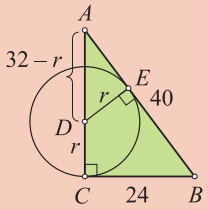
6. Nacrta se pravilni šesterokut sa stranicom a. Oko svakog vrha se opišu kružnice polumjera $\frac{a}{2}$.



7. $6r_1 = r$, $r_1 = \frac{r}{6}$, $6o_1 = 6 \cdot 2r_1\pi = 6 \cdot 2 \cdot \frac{r}{6}\pi = 2r\pi = 0$.

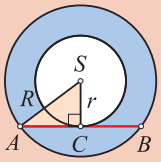
8. Polumjer kružnice K je $4r$ pa je $P = (4r)^2\pi = 16r^2\pi$. Manji krugovi imaju površinu $P_1 = r_\pi^2 + (2r)^2\pi + r^2\pi = 6r^2\pi$. $P : P_1 = 8 : 3$.

9.



Prema Pitagorinu poučku $c = 40$ cm. Trokuti ADE i ABC su slični jer oba imaju pravi kut i kut α. Tada vrijedi $\frac{32-r}{40} = \frac{r}{24}$, $r = 12$ cm.

10. Trokut ASC je pravokutan pa prema Pitagorinu poučku vrijedi $R^2 = r^2 + 2^2$ tj. $R^2 - r^2 = 4$. Površina kružnog vijenca je $P = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi = 4\pi$.



7. Geometrijska tijela – prizma i valjak

Rješenja 7.1

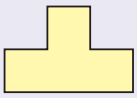
1. **a)** Kvadar **b)** četverostrana prizma
c) peterostrana prizma **d)** trostrana prizma
e) šesterostrana prizma **f)** osmerostrana prizma.

2.

naziv prizme	baza	broj strana	broj vrhova
osmerostrana	osmerokut	10	16
trostrana	trokut	5	6
četverostrana	c62 četverokut	6	8
dvanaesterostrana	dvanaesterokut	14	24
peterostrana	peterokut	7	14

3. **a)** Vrhovi su: A, B, C, D, E, F, G, H. Osnovni bridovi: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HD}$. Pobočni bridovi: $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$.
b) Vrhovi su: A, B, C, D, E, F. Osnovni bridovi: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{DF}$. Pobočni bridovi: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$.
c) Vrhovi su: M, N, P, R, S, A, B, C, D, E. Osnovni bridovi: $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SM}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$. Pobočni bridovi: $\overline{MA}$, $\overline{NB}$, $\overline{PC}$, $\overline{RD}$, $\overline{SE}$.
d) Vrhovi su: A, B, C, D, E, F, K, L, M, N, O, P. Osnovni bridovi: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{KL}$, $\overline{LM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NO}$, $\overline{OP}$, $\overline{PK}$. Pobočni bridovi: $\overline{AK}$, $\overline{BL}$, $\overline{CM}$, $\overline{DN}$, $\overline{EO}$, $\overline{FP}$.

8. To je prizma kojoj su baze prednja i stražna strana tijela. Baze su joj osmerokuti.



Rješenja 7.2

1. 8 vrhova, 12 bridova, 6 strana.
2. **a)**.
5. **a)** $d = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm, $D = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm
b) $d = 6.4\sqrt{2}$ dm, $D = 6.4\sqrt{3}$ dm
c) $d = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ cm, $D = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ cm
d) $d = \frac{20}{7}\sqrt{2}$ cm, $D = \frac{20}{7}\sqrt{3}$ cm.

6.

a	d	D
$\sqrt{2}$ cm	2 cm	$\sqrt{6}$ cm
4 dm	$4\sqrt{2}$ dm	$4\sqrt{3}$ dm
6 m	$6\sqrt{2}$ m	$6\sqrt{3}$ m
$5\sqrt{3}$ cm	$5\sqrt{6}$ cm	15 cm
$6\sqrt{2}$ cm	12 cm	$6\sqrt{6}$ cm
$9\sqrt{2}$ dm	18 dm	$9\sqrt{6}$ dm

7. 12 cm i $12\sqrt{3}$ cm, 14 m i $14\sqrt{3}$ m, 9 dm i $9\sqrt{3}$ dm.
8. **a)** $d = a\sqrt{2}$, $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = 8$ cm, $D = 8\sqrt{3}$ cm
b) $a = \frac{8}{3}$ cm, $D = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ cm
c) $a = 6\sqrt{2}$ dm, $D = 6\sqrt{6}$ dm
d) $a = 22\sqrt{2}$ mm, $D = 22\sqrt{6}$ mm.
9. Mrav će proći 3 brida sobe tj. 12 m, a bubamarin put je dugačak koliko i prostorna dijagonala kocke tj. $4\sqrt{3}$ m. Razlika putova je $12 - 4\sqrt{3}$ m ≈ 5.08 m.
10. $D = 65\sqrt{3} = 112.6$ cm.
11. **a)** $P = a^2\sqrt{2} = 81\sqrt{2}$ cm^2 **b)** $P = 1\,024\sqrt{2}$ cm^2
c) $P = 128\sqrt{2}$ cm^2 **d)** $P = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dm^2.
12. **a)** $P = a^2\sqrt{2}$, $a = \sqrt{\frac{P}{\sqrt{2}}}$, $a = 10$ cm
b) $a = 12$ cm **c)** $a = 10\sqrt{3}$ dm
d) $a = 20\sqrt{2}$ mm.
13. Brojevi su 6, $6\sqrt{3}$, $6\sqrt{2}$, četiri, četiri, četiri.

Rješenja 7.3

1. **b)**.
7.

a	12 cm	10 cm	4 m
b	16 cm	15 cm	8 m
c	48 cm	30 cm	8 m
D	52 cm	35 cm	12 m
d_1	20 cm	$5\sqrt{13}$ cm	$4\sqrt{5}$ m
d_2	$16\sqrt{10}$ cm	$15\sqrt{5}$ cm	$4\sqrt{5}$ m
d_3	$12\sqrt{17}$ cm	$10\sqrt{10}$ cm	$8\sqrt{2}$ m

8. **a)** $D = \sqrt{d_1^2 + c^2} = 104$ cm
b) $D = \sqrt{d_2^2 + a^2} = 34$ cm
c) $D = \sqrt{d_3^2 + b^2} = 170$ dm.

9. $a^2+b^2=900$, $a^2+c^2=676$, $b^2+c^2=86$, te zbrajanjem svih tih jednakosti dobivamo $2(a^2+b^2+c^2)=1\,662$, tj. $D^2=831$, $D=\sqrt{831}$ cm.

10. **a)** Zbrajanjem jednakosti: $d_1^2=a^2+b^2$, $d_2^2=b^2+c^2$, $d_3^2=a^2+c^2$, dobivamo $d_1^2+d_2^2+d_3^2=2(a^2+b^2+c^2)$, tj. $D^2=\frac{1}{2}(d_1^2+d_2^2+d_3^2)$, $D=14$ cm. **b)** $D=\sqrt{17}$ dm.

11. $D^2=a^2+b^2+c^2$, $c=\sqrt{D^2-2a^2}$, $c=4$ cm.

12. $c=\sqrt{D^2-2a^2}=6$ mm.

13. $a=12$ cm, $c=12\sqrt{2}$ cm.

14. Za 4.17 m.

Rješenja 7.4

1.

a	12 cm	4 dm	$\sqrt{5}$ m	4 cm	$8\sqrt{3}$ m
O	864 cm^2	96 dm^2	30 m^2	96 cm^2	1 152 cm^2

2. **a)** 864 cm^2, **b)** 768 dm^2, **c)** 2 400 m^2, **d)** 1 152 cm^2.

3. **a)** Iz $O=6a^2$ slijedi $a^2=\frac{O}{6}$, $a=\sqrt{\frac{O}{6}}=12$ dm, te je $D=a\sqrt{3}=12\sqrt{3}$ dm **b)** $a=2\sqrt{3}$ cm, $D=6$ cm **c)** $a=2.4$ mm, $D=2.4\sqrt{3}$ mm.

4. **a)** Iz $O=6a^2$ slijedi $a=\sqrt{\frac{O}{6}}=16$ cm.
$D=16\sqrt{3}$ cm **b)** $D=10\sqrt{3}$ mm
c) $D=12$ dm **d)** $D=3.6$ cm.

5. $a=8$ cm, $O=384$ cm^2.

6. $P=a\sqrt{2}\cdot a=a^2\sqrt{2}$, $a^2=\frac{P}{\sqrt{2}}$, $a=10$ cm. $O=6a^2=600$ cm^2.

7. 1 036.8 cm^2

8. **a)** $O=2ab+2bc+2ac=108$ cm^2
b) $a=1$ cm, $b=1$ cm, $c=1$ cm, $O=6$ cm^2.

9. **a)** 10 000 **b)** 100 **c)** 50 000 **d)** 410 **e)** 0.01 **f)** 0.0001 **g)** 0.24 **h)** 0.039.

10.

a	10 m	0.6 dm	2.5 cm	12 cm
b	5 m	12 cm	1.2 cm	0.7 dm
c	3 m	0.8 dm	1 cm	21 mm
O	190 m^2	432 cm^2	13.4 cm^2	247.8 cm^2

11. $c^2=D^2-a^2-b^2$, $c=48$ cm, $O=3\,072$ cm^2.

12. $ab=8$, $ac=20$, $bc=10$. Množenje svih triju jednakosti daje $a^2b^2c^2=1\,600$, $abc=40$. Sad je $c=\frac{abc}{ab}=\frac{40}{8}=5$ cm, $a=4$ cm, $b=2$ cm.

13. 132 cm^2.

14. **a)** $a_1=2a$, $b_1=2b$, $c_1=2c$, $O_1=2a_1b_1+2a_1c_1+2b_1c_1=4(2ab+2ac+2bc)=4O$. Oplošje se poveća 4 puta. **b)** Oplošje se smanji 9 puta.

15. **b)**.

16. Za 1 700 m^2 treba 1 417 paketa pločica.

Rješenja 7.5

1. **a)** 2 000 **b)** 6 000 000 **c)** 2 100 **d)** 8 400 **e)** 0.042 **f)** 0.025 **g)** 14 **h)** 0.023.

2.

a	6	10	2	1.1	1.6	4
O	216	600	24	7.26	15.36	96
V	216	1 000	8	1.331	4.096	64

3. **a)** Iz $D=a\sqrt{3}$ slijedi $a=\frac{D}{\sqrt{3}}$, $a=4$ cm, $V=a^3=64$ cm^3 **b)** $a=5$ dm, $V=125$ dm^3
c) $a=3$ cm, $V=27$ cm^3
d) $a=6\sqrt{3}$ m, $V=648\sqrt{3}$ m^3.

4. **a)** $O=\frac{2}{25}$ m^2, $V=\frac{\sqrt{3}}{1\,125}$ m^3
b) $O=1\,176$ dm^2, $V=2\,744$ dm^3
c) $O=2.88$ cm^2, $V=0.192\sqrt{3}$ cm^3
d) $O=432$ m^2, $V=432\sqrt{3}$ m^3.

5. 2 cm.

6. $V=3^3+4^3+5^3=216$ cm^3, $x^3=216$, $x=6$ cm. Duljina brida će biti 6 cm.

7. **a)** Poveća se 8 puta **b)** poveća se 125 puta.

8. $V=a^3=13.824$ m^3, $m=\rho V=38\,707.2$ kg.

9.

a	2 cm	5 mm	1.2 dm	15 dm
b	3 cm	8 cm	1.5 m	40 m
c	5 cm	1.2 dm	1 800 m	2.5 m
V	30 cm^3	48 cm^3	324 m^3	150 m^3

10. $v=12.5$ cm, $D=69.02$ cm, $O=7\,008$ cm^2.

11. $c=\sqrt{D^2-a^2-b^2}=18$ dm, $V=abc=6\,912$ dm^3, $O=2\,208$ dm^3.

12. $V=363\,1$.

13. $V=abc=160$ cm^3 $=160\cdot10^{-6}$ m^3, $m=\rho\cdot V=7\,900\cdot160\cdot10^{-6}=1.264$ kg.

14. $V=V_{\text{vanjski}}-V_{\text{unutarnji}}=15^3-14.5^2\cdot14=326.375$ cm^3, $m=\rho V=2.9$ kg.

15. $V=6\cdot0.2\cdot0.2=0.24$ m^3, $m=\rho\cdot V=168$ kg.

16. $V=0.25\cdot0.12\cdot0.065=0.00195$ m^3, $4:V=2\,051.28$. Ima 2 052 cigle.

17. $V=B\cdot h$, $h=2.2$ dm. Voda je do 6 cm ispod gornjeg ruba akvarija.

Rješenja 7.6

1. **a)** $O=85$ cm^2 **b)** $O=265$ dm^2.

2. $P=1.84$ m^2

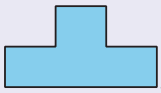
3. a_3, a_4, a_5, a_6; a_3v, a_4v, a_5v, a_6v; $+a_3v+a_4v+a_5v+a_6v$; $2B+P$; $B\cdot v$.

4.

B	$10\ \text{cm}^2$	$49\ \text{m}^2$	$220\ \text{dm}^2$	$\frac{4}{3}\ \text{cm}^2$
v	$2\ \text{cm}$	$6\ \text{m}$	$1.5\ \text{dm}$	$\frac{8}{5}\ \text{cm}$
V	$20\ \text{cm}^3$	$294\ \text{m}^3$	$330\ \text{dm}^3$	$\frac{32}{15}\ \text{cm}^3$

5. $P = ov = 12 \cdot 5 = 60\ \text{cm}^2$.

6. $O = 2B + ov = (12\sqrt{3} + 48)\ \text{cm}^2$, $V = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

7. **a)** Baza je  . Visina je $v = 3$. $B = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 5 = 80$, $P = 3 \cdot (5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 12) = 132$, $O = 2B + P = 292$, $V = B \cdot v = 240$.

b) $v = 1$, $B = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 20$, $P = 1 \cdot (5 + 2 + 3 + 5 + 2 + 7) = 24$, $O = 64$, $V = 20$.

8. **a)** $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$, $a = 29\ \text{cm}$, $B = \frac{ef}{2} = 840\ \text{cm}^2$, $O = 2B + ov = 2 \cdot 840 + (4 \cdot 29) \cdot 10 = 2\,840\ \text{cm}^3$

b) $V = B \cdot v = 840 \cdot 10 = 8\,400\ \text{cm}^3$.

9. **a)** $B = 8 \cdot 3 + \frac{8 \cdot 3}{2} = 36\ \text{m}^2$, $v = 7\ \text{m}$, $V = 36 \cdot 7 = 252\ \text{m}^3$. Komunalni doprinos je $12\,600$ kn.

b) Površina zidova je $2 \cdot B + 2 \cdot 7 \cdot 3 = 114\ \text{m}^2$. Cijena fasade je $35\,340$ kn.

Rješenja 7.7

1. **a)** $r = 2\ \text{cm}$, $v = 4\ \text{cm}$ **b)** $r = 2\ \text{cm}$, $v = 1\ \text{cm}$
c) $r = a$, $v = b$ **d)** $r = \frac{c}{2}$, $v = d$
e) $r = m$, $v = m$.

3. **a)** Pravokutnik sa stranicama $2\ \text{cm}$ i $2.5\ \text{cm}$, rotira oko dulje stranice.
b) Pravokutnik sa stranicama $4.5\ \text{cm}$ i $1.6\ \text{cm}$, rotira oko kraće stranice.

4. **a)** $P = 2rv = 4\ \text{cm}^2$ **b)** $P = 40\ \text{cm}^2$
c) $P = 3.6\ \text{cm}^2$ **d)** $P = \frac{8}{5}\ \text{dm}^2$.

5. $P = 2rv$, $2r = 28$, te je $r = 14\ \text{cm}$ i $v = 10\ \text{cm}$.

6. $v = 16\ \text{cm}$, $r = 8\ \text{cm}$.

7. $2r = v$, $P = 576\ \text{cm}^2$ i $P = v^2$ slijedi da je $v = 24\ \text{cm}$, $r = 12\ \text{cm}$.

8. $r = 4\ \text{cm}$, $v = 8\ \text{cm}$.

9. $r = 2v$, $P = 2r \cdot v \implies P = 4v^2$, $v^2 = \frac{P}{4}$, $v = 4\ \text{cm}$, $r = 8\ \text{cm}$.

10. $v = 15\ \text{cm}$. **11.** $2r = 18\ \text{mm}$.

12. $a\sqrt{2} = 2r$, $a = 16\sqrt{2}\ \text{cm}$.

13. $2r = a = 10\ \text{cm}$. **14.** Obje su u pravu.

Rješenja 7.8

2. **a)** Da **b)** ne **c)** ne **d)** ne.

4. **a)** $O = 2r\pi(r + v) = 288\pi\ \text{cm}^2$
b) $r = 2\ \text{dm}$, $v = 5\ \text{dm}$, $O = 28\pi\ \text{dm}^2$
c) $O = \frac{25}{2}\pi\ \text{cm}^2$ **d)** $O = 1\,144\pi\ \text{cm}^2$.

5. **a)** $r = 18$, $O = 2r\pi(r + v) = 936\pi\ \text{cm}^2$
b) $r = 7\ \text{dm}$, $v = 5\ \text{dm}$, $O = 168\pi\ \text{dm}^2$.

6. **a)** $r = 2$, $v = 4$, $O = 2r\pi(r + v) = 24\pi$
b) $r = 3$, $v = 1.5$, $O = 42\pi$
c) $r = 3$, $v = 1$, $O = 24\pi$.

7. $O = 2B + P$, $2B = O - P$, $B = \frac{1}{2}(O - P) = 9\pi$, $B = r^2\pi$, $r^2\pi = 9\pi$, $r = 3\ \text{cm}$.

8. $P = 2r\pi v$, $r = \frac{P}{2\pi v} = 2\ \text{cm}$. $O = 2r^2\pi + P = 20\pi\ \text{cm}^2$.

9. $O = 150\pi\ \text{cm}^2$. **10.** $O = 15\,000\pi\ \text{cm}^2$.

11. $O = \left(\frac{18}{\pi} + 36\right)\pi\ \text{cm}^2$ **12.** $v = 3\ \text{cm}$.

13. $r = 8\ \text{cm}$, $v = 2\ \text{cm}$, $P = 32\pi\ \text{cm}^2$.

14. $P = 2r\pi v$, $P = 2(4v)\pi v$, $v^2 = \frac{P}{8\pi} = 9$, $v = 3\ \text{dm}$, $r = 12\ \text{dm}$, $O = 2r\pi(r + v) = 360\pi\ \text{dm}^2$.

15. $P = 3.43\ \text{m}^2$. Treba 1.37 L boje.

16. $P = 13.57\ \text{m}^2$. Može se zalijepiti 12 plakata.

Rješenja 7.9

1. **a)** $V = 54\pi$ **b)** $V = 7.2\pi$ **c)** $V = 4.1\pi$
d) $V = 10.35\pi$.

2.

r	$2\ \text{cm}$	$2.4\ \text{dm}$	$2\ \text{cm}$	$0.7\ \text{dm}$	$8\ \text{cm}$
v	$5\ \text{cm}$	$0.36\ \text{m}$	$1\ \text{dm}$	$3\ \text{cm}$	$3.5\ \text{cm}$
V	$20\pi\ \text{cm}^3$	$20.736\pi\ \text{dm}^3$	$40\pi\ \text{cm}^3$	$147\pi\ \text{cm}^3$	$703.36\ \text{cm}^3$

3. **a)** $V = 20\pi\ \text{cm}^3$ **b)** $V = 20.736\pi\ \text{dm}^3$.

4. **a)** Iz $V = r^2\pi v$ slijedi $r^2 = \frac{V}{\pi v}$, $r^2 = 4$, $r = 2\ \text{cm}$
b) $r = \frac{5}{2} = 2.5\ \text{dm}$ **c)** $r = 7\ \text{cm}$ **d)** $r = 8\ \text{cm}$.

5. **a)** $V_1 = r^2\pi \cdot 2v = 2V$, volumen će se udvostručiti
b) $V_1 = (2r)^2\pi \cdot v = 4r^2\pi v = 4V$, volumen će se povećati četiri puta.

6. $2r = v$, $v = 16\ \text{cm}$, $r = 8\ \text{cm}$. $O = 2r\pi(r + v) = 384\pi\ \text{cm}^2$, $V = 1\,024\pi\ \text{cm}^3$.

7. $2r = v$, $P = 196$, $P = v^2$, $v = 14\ \text{cm}$, $r = 7\ \text{cm}$, $O = 2r\pi(r + v) = 294\pi\ \text{cm}^2$, $V = r^2\pi v = 686\pi\ \text{cm}^3$.

8. Iz $P = 2r\pi v$ izrazimo v, $v = \frac{P}{2r\pi}$ i uvrstimo u $V = r^2\pi v$, $V = r^2\pi \cdot \frac{P}{2r\pi} = \frac{rP}{2}$, te je $r = \frac{2V}{P} = 3\ \text{cm}$. $v = \frac{P}{2r\pi} = 5\ \text{cm}$.

9. $B = r^2\pi$, $r = 5\ \text{dm}$, $V = B \cdot v$, $v = \frac{V}{B}$, $v = 2\ \text{dm}$. $O = 2r\pi(r + v) = 70\pi\ \text{dm}^2$.

10. $O = 2B + P$, $B = \frac{1}{2}(O - P) = 144\pi \text{ m}^2$. $B = r^2\pi$, $r = 12 \text{ m}$. $P = 2r\pi v$, $v = \frac{P}{2r\pi} = 3 \text{ m}$. $V = r^2\pi v = 432\pi \text{ m}^3$.

11. $V = P$, $r^2\pi v = 2r\pi v$, $r = 2$.

12. Prvo izračunajmo volumen žice. Polumjer je $r = 1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}$, duljina žice je ustvari visina valjka, tj. $v = 42 \text{ m}$. Volumen je $V = r^2\pi v = 42 \cdot 10^{-6}\pi \approx 1.3188 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. Masu žice izračunat ćemo koristeći formulu: $m = \rho V$ gdje je m oznaka za masu tijela, ρ gustoća tijela, a V volumen. $m = 1.174 \text{ kg}$.

13. $V = r^2\pi v = 0.8^2\pi \cdot 3.6 = 7.238 \text{ m}^3 = 7\,238 \text{ L}$.

14. $m = 11\,400.2 \text{ kg}$.

15. Iz $r = 1.6 \text{ cm}$ dobivamo $B = 8.0384 \text{ cm}^2$. Iz $V = 120 \text{ cm}^3$ dobivamo $v = 14.928 \text{ cm}$. Razina vode je na visini 14.928 cm. Ukupan volumen menzure je 120.576 cm^3. Budući da kuglice imaju 10 cm^3, iz menzure će se preliti određeni dio vode i menzura će ostati napunjena do vrha.

16. Hoće.

17. $V = r^2\pi v$, $v = \frac{V}{r^2\pi}$, $v = 9.21 \text{ cm}$.

18. 1.88 cm.

19. $V = 0.001^2\pi \cdot 1\,000 = 0.00314 \text{ m}^3$, $m = 27.946 \text{ kg}$.

20. $V = V_{\text{vanjski}} - V_{\text{unutarnji}} = 10^2\pi \cdot 400 - 9^2\pi \cdot 400 = 23\,864 \text{ cm}^3$. Vode u cijev stane koliki je $V_{\text{unutarnji}}$, tj. $101\,736 \text{ cm}^3$.

21. 3.346 m^3.

22. **a)** 530.93 cm^3 **b)** $P = 12.65 \text{ dm}^3$. Treba 21.23 dag glazure.

23. $V = (9\,324 + 906.5\pi) \text{ cm}^3$.

Rješenja zadataka za ponavljanje

1.

baza prizme	broj vrhova	broj strana	broj pobočki
trokut	6	5	3
četverokut	8	6	4
šesterokut	12	8	6
deseterokut	20	12	10
n-terokut	$2n$	$n+2$	n

2. **a)** $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PR}$, $\overline{RM}$, $\overline{ST}$, $\overline{TU}$, $\overline{UV}$, $\overline{VS}$
b) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$, $\overline{D_1E_1}$, $\overline{E_1F_1}$, $\overline{F_1A_1}$.

5. Nijedna slika ne prikazuje mrežu prizme.

6. $d = 16\sqrt{2} \text{ cm}$, $D = 16\sqrt{3} \text{ cm}$.

7. **a)** $D = a\sqrt{3}$, $a = \frac{D}{\sqrt{3}}$, $a = 4 \text{ cm}$ **b)** $a = 36 \text{ dm}$
c) $a = 12 \text{ cm}$ **d)** $a = 14\sqrt{2} \text{ m}$.

8. **a)** $a = 6\sqrt{3} \text{ cm}$ **b)** $a = \frac{1}{6}\sqrt{3} \text{ dm}$
c) $a = 2\sqrt{3} \text{ mm}$ **d)** $a = \frac{5}{3}\sqrt{3} \text{ mm}$.

9. **a)** i **b)**.

10. Nije. Točka $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ ne pripada grafu.

11. **a)** $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 19.5 \text{ cm}$ **b)** $D = 39 \text{ dm}$
c) $D = 25.5 \text{ cm}$.

12. **a)** $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = 15 \text{ cm}$,
$d_2 = \sqrt{a^2 + c^2} = 9\sqrt{17} \text{ cm}$,
$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2} = 12\sqrt{10} \text{ cm}$,
$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 39 \text{ cm}$
b) $d_1 = 7.5\sqrt{13} \text{ cm}$, $d_2 = 15\sqrt{10} \text{ cm}$, $d_3 = 22.5\sqrt{5} \text{ cm}$, $D = 52.5 \text{ cm}$
c) $d_1 = 6\sqrt{5} \text{ cm}$, $d_3 = 12\sqrt{2} \text{ cm}$, $d_2 = 6\sqrt{5} \text{ cm}$, $D = 18 \text{ cm}$.

13. **a)** Iz $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ slijedi $c = \sqrt{D^2 - a^2 - b^2} = 24 \text{ cm}$. **b)** $b = 8 \text{ dm}$ **c)** $a = 21 \text{ cm}$.

14. $D^2 = 2a^2 + c^2$, $d_2^2 = a^2 + c^2$. Iz prve jednadžbe izrazimo c^2 i uvrstimo u drugu: $c^2 = D^2 - 2a^2$, $d_2^2 = a^2 + D^2 - 2a^2$, $D^2 - d_2^2 = a^2$, $a = 18 \text{ cm}$, $c = 6\sqrt{7} \text{ cm}$.

15. $d_1 = a\sqrt{2}$, $d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$, te je $a = 8 \text{ dm}$, $c = 4 \text{ dm}$, $D = 12 \text{ dm}$.

16. 102 cm^2, 150 cm^2, $24\sqrt{29} \text{ cm}^2$.

17. **a)** $O = 6a^2 = 6 \cdot 324 = 1\,944 \text{ cm}^2$ **b)** 864 cm^2
c) 174.96 dm^2 **d)** 270 dm^2.

18. **a)** 6 cm **b)** 36 dm **c)** $24\sqrt{3} \text{ m}$ **d)** 1.5 dm.

19. **a)** $V = a^3 = 0.008 \text{ cm}^3$ **b)** $V = \frac{64}{27} \text{ dm}^3$
c) $V = 24\sqrt{3} \text{ dm}^3$ **d)** $V = 64\sqrt{2} \text{ dm}^3$.

20. **a)** $O = 6a^2$, pa je $a = 12 \text{ cm}$ i $V = a^3 = 1\,728 \text{ cm}^3$
b) $a = 8 \text{ mm}$, $V = 512 \text{ mm}^3$ **c)** $a = 0.2 \text{ m}$, $V = 0.008 \text{ m}^3$ **d)** $a = 20 \text{ m}$, $V = 8\,000 \text{ m}^3$.

21. **a)** 4 puta **b)** 25 puta.

22. **a)** 4 puta **b)** 9 puta.

23. **a)** Smanji se 216 puta **b)** smanji se 8 puta.

24. $6a^2 + 96 = 6(a + 2)^2$, $a = 3 \text{ cm}$.

25. $6a^2 = a^3$, $6 \cdot a \cdot a = a \cdot a \cdot a$, $6 = a$.

26. **a)** $a = 14 \text{ dm}$, $a_1 = 26 \text{ dm}$, $V_1 = 17\,576 \text{ dm}^3$
b) $V_2 = 8 \text{ dm}^3$.

27. $a = 30\sqrt{5} \text{ cm}$.

28. Postoje 4 različita kvadra. Dimenzije su: 12 cm, 1 cm, 1 cm; 6 cm, 2 cm, 1 cm, 3 cm, 2 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 1 cm. Oplošja su redom: 50 cm^2, 40 cm^2, 32 cm^2, 38 cm^2.

29. 3 cm, 4 cm, 5 cm, $V = 60 \text{ cm}^2$.

30. 4 dm, 8 dm, 12 dm, $V = 384 \text{ dm}^2$.

31. Duljine bridova označimo s $x - 1$, x i $x + 1$. Tada je $O = 2(x - 1)x + 2x(x + 1) + 2(x - 1)(x + 1) = 2(3x^2 - 1)$, pa je $2(3x^2 - 1) = 22$, $3x^2 - 1 = 11$, $3x^2 = 12$, $x^2 = 4$, $x = 2$. Bridovi su 1, 2, 3 cm.

32. 250 cm^3.

33. 128 dm^3.

34. **a)** $a = 9 \text{ dm}$, $v = 15 \text{ dm}$
b) $a = 12 \text{ m}$, $v = 20 \text{ m}$.

35. $c = \sqrt{D^2 - a^2 - b^2} = 48 \text{ cm}$, $V = abc = 9\,216 \text{ cm}^3$.

36. $V = abc = 512 \text{ cm}^3$, $V = a_k^3$, $512 = a_k^3$, $a_k = 8 \text{ cm}$. Duljina brida kocke je 8 cm.

37. $V = 1.5 \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 1.5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$, $m = \rho V = 250 \cdot 1.5 \cdot 10^{-2} = 3.75\ \mathrm{kg}$.

38. $V_1 = 12\,600\ \mathrm{m}^3$. Potrebno je 210 vagona.

39. $V = 12 \cdot 16 \cdot 2.2 = 422.4\ \mathrm{m}^3 = 422\,400\ \mathrm{L}$ vode.

40. 172 800 L tekućine.

41. $O = 1\,312\ \mathrm{cm}^2$, $V = 3\,840\ \mathrm{cm}^3$.

42. Pobočje kvadra takvih dimenzija ima površinu $84\ \mathrm{m}^2$, pa je za izgradnju zidova upotrijebljeno 2 100 cigli.

43. **a)** $V = 240 \cdot 120 \cdot 1 = 28\,800$ litara.
b) Za $28.2\ \mathrm{cm}$.

44. $O_1 = 744\ \mathrm{cm}^2$, $O_2 = 685\ \mathrm{cm}^2$. Manji trošak ima druga mljekara za 885 kn.

45. Linearna.

46. $O = (360 + 48\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2$, $V = 360\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$.

47. $V = 250\pi\ \mathrm{cm}^3$.

48. $r = 10\ \mathrm{cm}$, $v = 16\ \mathrm{cm}$, $V = 1\,600\pi\ \mathrm{cm}^3$.

49. $v = 10\ \mathrm{cm}$.

50. $V = 160\,000\ \mathrm{cm}^3$, $V_s = 339.12\ \mathrm{cm}^3$. Može napraviti 471 svijeću.

51. $123.088\ \mathrm{m}^3$.

52. Svaka tvornica proizvede 1 000 000 konzervi graška. Prva potroši $34\,540\ \mathrm{m}^2$ naljepnica, a druga $38\,370.8\ \mathrm{m}^2$. Manje potroši prva tvornica, za $3\,837.08\ \mathrm{m}^2$. Treba posjeći 70 stabala.

53. Može biti između: volumena i duljine visine; površine osnog presjeka i duljine visine; plašta i visine; plašta i polumjera, plašta i promjera.

Rješenja jednostavnih zadataka

1. **a)** Vrhovi: A, B, C, D, E, F, G, H. Osnovni bridovi: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$. Pobočni bridovi: $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$. Baze: $ABCD$, $EFGH$.
b) Vrhovi: K, L, M, N, O, P. Osnovni bridovi: $\overline{KL}$, $\overline{LM}$, $\overline{MK}$, $\overline{NO}$, $\overline{OP}$, $\overline{PN}$. Pobočni bridovi: $\overline{KN}$, $\overline{LO}$, $\overline{MP}$. Baze: KLM, NOP.

2. **a)** Bridova ima 9, a strana 5. **b)** 24, 10
c) 60, 22 **d)** 75, 27.

3. **a)** Četverokut **b)** šesterokut.

4. **a)** 8 vrhova, 12 bridova, 6 strana
b) 6 vrhova, 9 bridova, 5 strana.

5. **a)** $O = 188\ \mathrm{cm}^2$, $V = 120\ \mathrm{cm}^3$
b) $O = 2\,220\ \mathrm{cm}^2$, $V = 1\,000\ \mathrm{cm}^3$.

6. $d = 6\sqrt{2}$, $D = 6\sqrt{3}$, $O = 216\ \mathrm{cm}^3$, $V = 216\ \mathrm{cm}^3$.

7.

a	b	c	D	O	V
1 cm	1 cm	2 cm	$\sqrt{6}$ cm	10 cm^2	2 cm^3
3 dm	4 dm	5 dm	$5\sqrt{2}$ dm	94 dm^2	60 dm^3
9 m	12 m	8 m	17 m	552 m^2	864 m^3
2 m	5 dm	2 dm	$\sqrt{429}$ dm	300 dm^3	200 dm^3

8. $0.49\ \mathrm{m}^3$.

9. $O = 82\ \mathrm{m}^2$, $82 : 5 = 16.4$. Treba 16.4 litara.

10. **a)** $O = 42\pi\ \mathrm{cm}^2$, $V = 36\pi\ \mathrm{cm}^3$
b) $O = 12\pi\ \mathrm{dm}^2$, $V = 4\pi\ \mathrm{cm}^3$.

11. $V = 1\,024\ \mathrm{cm}^3$, $v = 6.66\ \mathrm{cm}$.

12. $V_1 = 7 \cdot 4 \cdot 2 = 56\ \mathrm{dm}^3$, $V_2 = 4^2\pi \cdot 2 = 100.48\ \mathrm{dm}^3$. Valjak ima veći volumen.

Rješenja složenijih zadataka

1. **a)** $a = 4k$, $b = 3k$, $c = 12k$, $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(4k)^2 + (3k)^2 + (12k)^2} = 13k$, $k = 10\ \mathrm{cm}$, $a = 40\ \mathrm{cm}$, $b = 30\ \mathrm{cm}$, $c = 120\ \mathrm{cm}$
b) $D = 13k$, $k = 5\ \mathrm{cm}$, $a = 15\ \mathrm{cm}$, $b = 20\ \mathrm{cm}$, $c = 60\ \mathrm{cm}$
c) $D = 85k$, $k = 3\ \mathrm{mm}$, $a = 252\ \mathrm{mm}$, $b = 36\ \mathrm{mm}$, $c = 15\ \mathrm{mm}$
d) $D = 7\sqrt{2}k$, $k = 2\ \mathrm{dm}$, $a = 10\ \mathrm{dm}$, $b = 6\ \mathrm{dm}$, $c = 16\ \mathrm{dm}$.

2. $d_1 = 5k$, $k = 16\ \mathrm{cm}$, $a = 48\ \mathrm{cm}$, $b = 64\ \mathrm{cm}$, $c = 192\ \mathrm{cm}$.

3. $a = 12k$, $b = 3k$, $c = 4k$, $O = 192k^2$, $k = 5\ \mathrm{cm}$, $a = 60\ \mathrm{cm}$, $b = 15\ \mathrm{cm}$, $c = 20\ \mathrm{cm}$, $D = 65\ \mathrm{cm}$.

4. 12 cm, 30 cm, 48 cm.

5. $a = 12k$, $b = 16k$, $c = 21k$, $d_1 = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20k$. $P = 420k^2$, $k = 2$, $a = 24\ \mathrm{dm}$, $b = 32\ \mathrm{dm}$, $c = 42\ \mathrm{dm}$.

6. **a)** $B = \dfrac{a \cdot c}{2} = 24\ \mathrm{cm}^2$, $v = b$, $V = Bv = 24 \cdot 6 = 144\ \mathrm{cm}^3$
b) $V_1 = \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{c}{2}\right) \cdot b = \dfrac{abc}{8}$, $V = abc - 4 \cdot V_1 = \dfrac{abc}{2} = 360\ \mathrm{cm}^3$.

7. $a = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $x = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$, $P = x \cdot a = \dfrac{2\sqrt{3}a^2}{3}$.

8. $r^2\pi v = 150\pi$, $2r\pi v = 60\pi$, $v = \dfrac{30}{3}$, $r = 5\ \mathrm{cm}$, $O = 110\pi\ \mathrm{cm}^2$.

9. **a)** $V = 48\pi$ **b)** $V = 32\pi$ **c)** $V = 10\pi$.

10. $V_{\text{kvadra}} = 640\ \mathrm{cm}^3$, $V_{\text{valjka}} = 4 \cdot 2^2\pi \cdot 10 = 160\pi\ \mathrm{cm}^3 = 502.4\ \mathrm{cm}^3$. Ostalo je $137.6\ \mathrm{cm}^3$.

11. Osnovni brid veće prizme je a, visina v. Promjer baze valjka je a, pa je $r = \dfrac{a}{2}$. Dijagonala baze manje prizme je $2r$, tj. $a_1\sqrt{2} = 2r$, $a_1 = \dfrac{2r}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$,
$V_{\text{veće}} : V_{\text{manje}} = \dfrac{a^2 v}{a_1^2 v} = 2 : 1$.

12. $|AB| = r\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$, $P = |AB| \cdot v = 40\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$.

13. $V_{\text{valjka}} = 5^2\pi \cdot 9 = 225\pi\ \mathrm{cm}^3 = 706.5\ \mathrm{cm}^3$, $V_{\text{prizme}} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 9 = \dfrac{675}{2}\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3 = 584.57\ \mathrm{cm}^3$, $V_{\text{valjka}} = 1.2086 V_{\text{prizme}}$. Veći je za 20.86 % od volumena prizme.

8. Geometrijska tijela – piramida i stožac

Rješenja 8.1

1. **a)** Četverostrana piramida **b)** trostrana piramida **c)** šesterostrana piramida **d)** peterostrana piramida.

2.

baza piramide	broj pobočki	broj bridova	broj strana
trokut	3	6	4
četverokut	4	8	5
šesterokut	6	12	7
osmerokut	8	16	9
n-terokut	n	$2n$	$n+1$

3. **a)** Osnovni su: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$. Pobočni su: $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$.
b) Osnovni su: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$. Pobočni su: $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$.
c) Osnovni su: $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SM}$. Pobočni su: $\overline{VM}$, $\overline{VN}$, $\overline{VP}$, $\overline{VR}$, $\overline{VS}$.
d) Osnovni su: $\overline{UV}$, $\overline{VZ}$, $\overline{ZT}$, $\overline{TU}$. Pobočni su: $\overline{CU}$, $\overline{CV}$, $\overline{CZ}$, $\overline{CT}$.

4. **a)** $v^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$, $v = 2$ cm **b)** $v = 4$ dm.

6. **a)** $b = \sqrt{v^2 - \frac{a^2}{2}} = 36$ cm **b)** $b = 16$ cm **c)** $b = 22$ dm **d)** $b = 4$ m.

7. **a)** $\frac{a^2}{2} = b^2 - v^2$, $a = 48$ cm, $B = a^2 = 2\,304$ cm^2 **b)** $B = 256$ dm^2.

8. **a)** $v_1 = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 24$ cm
b) $v_1 = 16$ dm.

9. **a)** $v_1 = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 26$ cm
b) $v_1 = 10$ dm.

10. **a)** $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = v_1^2 - v^2$, $a = 24$ cm
b) $a = 60$ dm.

Rješenja 8.2

7. **a)**.

8. **a)** $v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $v_1 = 8$ cm, $P_\triangle = \frac{av_1}{2} = 48$ cm^2, $B = a^2 = 144$ cm^2, $O = B + 4P_\triangle = 336$ cm^2 **b)** $O = 116\,160$ mm^2.

9. **a)** $O = 5\,760$ cm^2 **b)** $O = 7\,680$ dm^2.

10. **a)** $O = 1\,344$ cm^2 **b)** $O = 2\,944$ cm^2.

11. **a)** $O = 340$ cm^2, **b)** $O = 192$ cm^2.

12. $B = a^2$, $a = 20$ cm, $v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $v_1 = 26$ cm, $O = a^2 + 2av_1 = 1\,440$ cm^2.

13. $2B = P$, $2a^2 = 2av_1$, $a = v_1$. Iz $v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ slijedi $a^2 = v^2 + \frac{a^2}{4}$, $\frac{3}{4}a^2 = v^2$, $a = \frac{2v}{\sqrt{3}} = 8$ cm. $b^2 = v^2 + dra^22$, $b = 4\sqrt{5}$ cm.

14. Da.

15. Smanjit će se dva puta.

Rješenja 8.3

1.

B	v	V
120 cm^2	7 cm	280 cm^3
8 dm^2	6 cm	1.6 dm^3
42 mm^2	0.5 mm	7 mm^3
100 cm^2	60 cm	2 000 cm^3
81 cm^2	270 dm	72.9 dm^3
36 m^2	12 m	144 m^3
7.5 cm^2	0.5 dm	12.5 cm^3

2. **a)** 6 400 cm^3 **b)** 114 048 cm^3.

3. **a)** $v = 40$ cm, $V = \frac{64\,000}{3}$ cm^3
b) $v = 6$ cm, $V = 256$ cm^3.

4. $V = 32$.

5. **a)** $V = 47\,040$ cm^3 **b)** $V = \frac{256\sqrt{2}}{3}$ cm^3.

6. **a)** $V = 3\,200$ cm^3, **b)** $V = 153\,600$ cm^3.

7. $V = 1\,296$ cm^3.

8. $V = \frac{9\sqrt{6}}{2}$ dm^3.

9. $b = 15$ cm i $a = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ cm, $v = \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm. $V = \frac{1}{3}B \cdot v = \frac{1\,125\sqrt{3}}{4}$ cm^3.

10. $O = 1\,296$ dm^2, $V = 1\,728$ dm^3.

11. $V = \frac{1}{3}B \cdot v = \frac{1}{3}a^2v = 1\,782$ cm^3, $a_k^3 = 1\,782 = 4^3 \cdot 3^3$, $a_k = 12$ cm.

12. $V = \frac{24^2 \cdot 12}{3} = 2\,304$ cm^3. $m = \frac{2\,304}{1\,000\,000} \cdot 2\,800 = 6.45$ kg. Polira se plašt ukrasa. $P = 2av_1 = 2 \cdot 24 \cdot 12\sqrt{2} = 8.12$ dm^2. Poliranje košta 406.08 kuna.

13. $v = 7.5$ cm.

14. Piramida ima ~~dvije baze~~ jednu bazu. Svakoj se piramidi volumen računa pomoću formule $V = \frac{1}{3}Bv$. Ako je B stalna veličina, tada su veličine V i v proporcionalne. Ako je volumen V stalan, tada su veličine B i v ~~proporcionalne~~ obrnuto proporcionalne. Ako u pravilnoj četverostranoj piramidi osnovni brid povećamo dva puta, a visina ostane jednaka, tada će se volumen povećati dva puta.

Rješenja 8.4

1. **a)** $v = 6$, $r = 4$ **b)** $v = 24$, $r = 10$
c) $r = 4$, $v = 4\sqrt{3}$ **d)** $r = 5$, $v = 5$.

2. **a)** $v = 8$, $r = 6$, $s = 10$
b) $v = 12$, $r = 5$, $s = 13$.

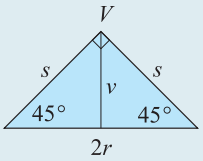
4.

r	3 cm	1.6 dm	8 cm	110 cm	1 m
v	4 cm	30 cm	6 cm	6 m	24 dm
s	5 cm	34 cm	1 dm	610 cm	26 dm

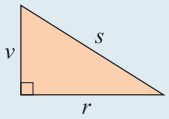
5. $s = r + 2$, $s^2 = r^2 + v^2$, $(r+2)^2 = r^2 + 36$, $r^2 + 4r + 4 = r^2 + 36$, $4r = 32$, $r = 8$ cm.

6. $s = 2r = 36$ cm, $r = 18$ cm, $v = \frac{s\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$.

7. $s = 18$ cm,
$2r = s\sqrt{2}$,
$r = 9\sqrt{2}$ cm,
$v = r$, tj.
$v = 9\sqrt{2}$ cm.



8.



$s = 14$ dm,
$v = \frac{s}{2} = 7$ dm,
$r = \frac{s\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$ dm.

9. $r = 4$ cm, $v = 4\sqrt{3}$ cm.

10. $r = 7$ cm, $v = 14\sqrt{2}$ cm.

11. **a)** $O = r\pi(r+s) = 160\pi$ cm^2 **b)** $O = 2\,772\pi$ cm^2.

12. Iz $O = r^2\pi + r\pi s$ slijedi $r\pi s = O - r^2\pi$, $s = \frac{O - r^2\pi}{r\pi}$, $s = 24$ cm, $v = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ cm, $P = r\pi s$, $P = 384\pi$ cm^2.

13. $o = 2r\pi$, $r = \frac{o}{2\pi} = 64$ cm, $s = 128$ cm, $O = r\pi(r+s)$, $O = 12\,288\pi$ cm^2.

14. $O = 192\pi$ cm^2.

15. Četvrtina kružnice polumjera s ima duljinu $\frac{s\pi}{2}$ i to je jednako opsegu baze stošca, tj. $\frac{s\pi}{2} = 2r\pi$, $r = \frac{s}{4} = 4$ cm. $O = r\pi(r+s)$, $O = 80\pi$ cm^2.

16. $\frac{s\pi}{180^\circ} \cdot 216^\circ = 2r\pi$, $s = 20$ cm, $O = 384\pi$ cm^2.

17. $v = 48$ cm, $s = 12\sqrt{41}$ cm.

18. $r = 6$ cm, $O = 301.44$ cm^2.

Rješenja 8.5

1. **a)** $O = 24\pi$, $V = 12\pi$ **b)** $O = 96\pi$, $V = 96\pi$
c) $O = 200\pi$, $V = 320\pi$ **d)** $r = 4$, $v = 4\sqrt{3}$, $O = 48\pi$, $V = \frac{64\sqrt{3}}{3}\pi$

2. **a)** $V = \frac{1}{3}Bv = \frac{128}{3}\pi$ cm^3 **b)** $V = 131.2$ dm^3

3. **a)** $r = \sqrt{s^2 - v^2} = 6$ cm, $V = \frac{1}{3}r^2\pi v = 768\pi$ cm^3
b) $r = \sqrt{s^2 - v^2} = 0.8$ mm, $V = 0.0384\pi$ mm^3.

4. $O = 768\pi(3 + \sqrt{10})$ cm^2, $V = 12\,288\pi$ cm^3.

5. $v = 19.2$ cm, $V = 640\pi$ cm^3.

6. $r = 42$ dm, $V = 42\,336\pi$ dm^3.

7. **a)** $V = 800\pi$ **b)** $V = 768\pi$.

8. $V = \frac{1\,000\sqrt{3}}{3}\pi$ cm^3.

9. $O = r^2\pi + r\pi s$, pa je $s = \frac{O - r^2\pi}{r\pi} = 28$, $v = \sqrt{s^2 - r^2} = 8\sqrt{10}$ cm, $V = \frac{1}{3}r^2\pi v = 384\sqrt{10}\pi$ cm^3.

10. Volumen vagona je $V = 1.6^2\pi \cdot 18.75 = 48\pi$ m^3, a volumen jedne hrpe pijeska je $V_p = \frac{1}{3}4^2\pi \cdot 1.8 = 9.6\pi$ m^3. $\frac{V}{V_p} = 5$. Potrebno je pet hrpa pijeska.

11. $V = 2\,250\sqrt{6}\pi$. **12.** 33.76 cm^3.

13. $V = 94.2$ m^3 = 942 hl. U hrpi je 70 650 kg pšenice.

14. 13 čaša. **15.** **a)** i **c)**.

Rješenja 8.6

1. **a)** $O = 4r^2\pi = 256\pi$ cm^2, $V = \frac{2\,048}{3}\pi$ cm^3
b) $O = 0.64\pi$ dm^2, $V = \frac{0.256}{3}\pi$ dm^3
c) $O = \pi$ dm^2, $V = \frac{1}{6}\pi$ dm^3
d) $O = 9\pi$ cm^2, $V = 4.5\pi$ cm^3.

2. **a)** $r = 14$ cm, $O = 784\pi$ cm^2, $V = \frac{10\,976}{3}\pi$ cm^3
b) $r = 12.4$ dm, $O = 615.04\pi$ dm^2, $V = 2\,542.16\pi$ dm^3.

3. **a)** $O = 4r^2\pi$, $r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}$, $r = 2$ cm,
b) $r = 12$ dm, **c)** $r = 14$ cm.

4. **a)** $O = 4r^2\pi$, $r = 12$ cm, $V = \frac{4}{3}r^3\pi = 2\,304\pi$ cm^3
b) $V = \frac{500}{3}\pi$ dm^3 **c)** 36π cm^3 **d)** $V = 288\pi$ cm^3.

5. $P = r^2\pi$, $r = 8$ cm, $V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{2\,048}{3}\pi$ cm^3.

6. **a)** $r = 2$ cm **b)** $r = 10$ cm **c)** $r = 0.6$ dm
d) $r = 4$ dm.

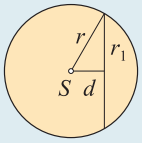
7.

r	8	5	1	2.4
O	256π	100π	4π	23.04π
V	$\frac{2\,048}{3}\pi$	$\frac{500}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	18.432π

r	9	6	4
O	324π	144π	200.96
V	972π	288π	$\frac{256}{3}\pi$

8. $4r^2\pi = \frac{4}{3}r^3\pi$, $r = 3$.

9.



$r_1 = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{61^2 - 11^2} = 60$ cm,
$P = r_1^2\pi = 3\,600\pi$ cm^2.

10. $o = 2r_1\pi$, $r_1 = 8$ cm, $r^2 = d^2 + r_1^2$, $r = 10$ cm,
$O = 4r^2\pi = 400\pi$, $V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4\,000}{3}\pi$.

11. $r^2\pi = 4r_1^2\pi$, $r = 2r_1$, $r_1 = \frac{r}{2} = 4$,
$d = \sqrt{r^2 - r_1^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm.

12. $O = 4r^2\pi = 314$ m^2.

13. $O = 7\,200\pi$ cm^2, $V = 144\,000\pi$ cm^3.

14. $O = 4r^2\pi = 256\pi$ cm^2, $V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{2\,048}{3}\pi$ cm^3.

15. $P = \frac{O}{2} = 2r^2\pi = 226.08$ m^2.

16. 827.67 kg.

17. **a)** $V = \frac{256}{3}\pi$ cm^3 **b)** $V = 288\pi$ dm^3.

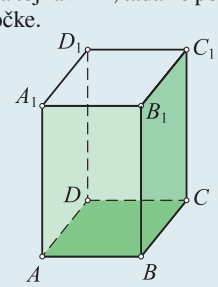
Rješenja 8.7

1. **a)** Jedan, AB. **b)** Beskonačno mnogo.

2. **a)** Ako su te tri točke kolinearne, tj. na jednom pravcu, onda postoji beskonačno ravnina koje sadrže te točke. Ako nisu na jednom pravcu, onda postoji samo jedna ravnina.

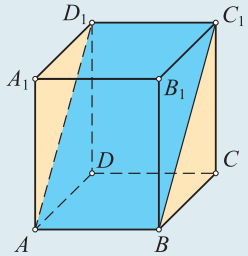
b) Ako su sve četiri točke na jednom pravcu, tada postoji beskonačno ravnina kroz njih. Ako su tri točke na jednom pravcu, a četvrta je izvan pravca, tada postoji samo jedna ravnina koja sadrži sve 4 točke. Ako neke tri točke ne leže na jednom pravcu, one određuju jednu ravninu i tada ako četvrta točka pripada toj ravnini, tada sve 4 točke pripadaju jednoj ravnini. Ako četvrta točka ne leži na toj ravnini, tada ne postoji ravnina koja sadrži sve 4 točke.

3.



a) To su BCD, BCC_1, ABB_1.
b) To su $D_1C_1B_1$, D_1DA, D_1C_1C.

4. **c)**



6. **a)** BCC_1, CDD_1, $A_1B_1C_1$ **b)** $A_1B_1C_1$.

7. **a)** ABC, BCC_1, $A_1B_1C_1$, AA_1D_1
b) A_1AD, B_1BC.

8. **a)** AB, AC, AD, BC, BD, CD, A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1, B_1C_1, B_1D_1, C_1D_1 **b)** AD, AD_1, AA_1, DD_1, DA_1, D_1A_1, BC, BC_1, BB_1, CC_1, CB_1, C_1B_1.

9. Ima više načina spajanja. ABC i A_1B_1, BCC_1 i DD_1, CDD_1 i AA_1, ABB_1 i CC_1.

10. Ne, ako je usporedan s jednom, onda mora biti usporedan s još jednom.

11. **a)** Da **b)** ne **c)** ne.

13. **a)** Sijeku se **b)** mimoilazni su **c)** usporedni su **d)** mimosmjerni su.

14. **a)** AC, AD, AC_1, AD_1, BC, BD, BC_1, BD_1, CC_1, CD_1, DC_1, DD_1. **b)** A_1A, A_1B, A_1C, A_1D, A_1C_1, A_1D_1, B_1A, B_1B, B_1C, B_1D, B_1C_1, B_1D_1.

16. **a)** BCD, $A_1B_1C_1$ **b)** BCC_1, ADD_1.

19. **a)** AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 **b)** AB, DC, A_1B_1, D_1C_1.

20. **a)** ABB_1, CDD_1, BCC_1, ADD_1, ACC_1, BDD_1
b) ABC, DCC_1, $A_1B_1C_1$, ABB_1, CB_1D, BC_1D_1.

21. **a)**, **b)**, **d)**.

Rješenja zadataka za ponavljanje

1. **a)** D i F, G, H i C **b)** E i F, D i H, G i A.

5. $a = 8$ cm, $v = 3$ cm, $v_1 = 5$ cm; $a = 40$ cm, $v = 21$ cm, $v_1 = 29$ cm; $a = 16$ cm, $v = 15$ cm, $v_1 = 17$ cm.

6. **a)** $B = 1\,800$ dm^2 **b)** $B = 1\,152$ m^2.

7. **a)** $v_1 = 6\sqrt{3}$ cm **b)** $v_1 = 4$ m.

8. **a)** $v_1 = 34$ cm **b)** $v_1 = 6$ m.

9. **a)** $P = 672\sqrt{2}$ cm^2 **b)** $P = 112\sqrt{2}$ dm^2.

10. $P = 260$ dm^2.

11. $v = 8$ mm.

12. $a = 2\sqrt{79}$ dm.

13. $v_1 = 15$ cm.

14. $O = 336$ cm^2.

15. $O = (36 + 36\sqrt{3})$ cm^2, $V = 36\sqrt{2}$ cm^3.

16. $a = 6\sqrt{2}$ m.

17. Površina krova je pobočje piramide i iznosi 44.77 m^2. Potrebno je 538 komada crjepova.

18. $V = 144$ dm^3.

19. $V = \frac{512}{3}$ cm^3.

20. $V = \frac{32}{3}$ cm^3.

21. **a)** $r = 6$, $v = 8$, $s = 10$

c) $r = 8$, $v = 15$, $s = 17$

d) $r = 20$, $v = 21$, $s = 29$

22. Nijedna nije mreža. U prvoj je duljina luka manja od opsega kruga, a u drugoj je krug postavljen na krivo mjesto.

23. **a)** $r = 2$, $s = 5$ **b)** $r = 1.5$, $s = 3.98$

24. **a)** $s = \sqrt{r^2 + s^2} = 15$ cm **b)** $s = 1.7$ cm.

25. **a)** $r = \sqrt{s^2 - v^2} = 0.8$ cm, $2r = 1.6$ cm

b) $r = 11$ dm, $2r = 22$ dm.

26. $v = 6$ cm. **27.** $v = 45$ dm

28. $v = 21$ cm. **29.** $P = 128\pi$ cm^2.

30. $O = 80.79$ cm^2. **31.** $r = 36.32$ cm.

32. $r = \frac{26}{3}$ cm, $v = \frac{26}{3}\sqrt{35}$ cm.

33. $s = 2r$ uvrstimo u $O = r\pi(r+s)$. $O = r\pi(r+2r)$, $O = 3r^2\pi$, te je $r^2 = \frac{O}{3\pi} = 36$, $r = 6$ cm, $s = 12$ cm, $v = 6\sqrt{3}$ cm.

34. $P = r\pi s$, $s = \frac{P}{r\pi} = 80$ mm $= 8$ cm, $v = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{55}$ cm ≈ 7.42 cm. $P_o = \frac{2r \cdot v}{2} = 3\sqrt{55} \approx 22.26$ cm^2.

35. $r = 4$ cm, $O = 8\pi(2 + \sqrt{13})$ cm^2.

36. $r = 12$ cm, $O = 48\pi(3 + \sqrt{10})$ cm^2.

37. $v = 40$ cm, $s = 10\sqrt{17}$ cm.

38. $s = 8$, $O = 103.62$.

39. $r = 7$, $O = 7\pi(7 + \sqrt{193})$, $P = 7\pi\sqrt{193}$.

40. $V = 2\,560\pi$ cm^3. **41.** $V = 79\,380$ cm^3.

42. $V = 72\sqrt{3}\pi$ cm^3. **43.** Istinite su **a)**, **c)** i **d)**.

44. $v = 2.7$ m **45.** $P = r\pi s = 424.12$ cm^2.

46. $3 : 1$.

47. **a)** To je valjak na kojem je stožac. $V = 51\pi$.

b) To su dva stošca sa zajedničkom bazom. $V = \frac{350}{3}\pi$.

48. **a)** Tijelo je nastalo spajanjem točke i pravilne četverostrane piramide po jednoj bazi.

$$V = 6^3 + \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 264 \text{ cm}^3.$$

b) Tijelo je nastalo spajanjem valjka i stošca.

$$V = 3^2\pi \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot 3^2\pi \cdot 4 = 75\pi \text{ cm}^3.$$

49. **a)** Tijelo je nastalo spajanjem dviju četverostranih piramida po bazi. $O = 8 + \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3}$ mm^2.

b) Tijelo je nastalo spajanjem dvaju stožaca.

$$O = 2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot 10 = 120\pi \text{ mm}^2.$$

Rješenja jednostavnih zadataka

3. Osnovni bridovi u pravilnoj piramidi moraju biti jednake duljine, a ovdje to nisu.

4. **a)** $a = 3\sqrt{2}$ cm **b)** $V = 24$ cm^2.

5. $v = 10$ cm.

6. **a)** $r = 6$, $v = 8$, $s = 10$

b) $r = 5$, $v = 12$, $s = 13$.

7. $r = 6$ dm.

8.

r	3 cm	6 m	10 cm	9 m
v	4 cm	8 m	24 cm	12 m
s	5 cm	10 m	26 cm	15 m
P	15π cm^2	60π m^2	260π m^2	135π m^2
O	24π cm^2	96π m^2	360π cm^2	216π m^2
V	12π cm^3	96π m^3	800π cm^3	324π m^3

9. $v = 5$ cm, $V = 240\pi$ cm^3.

10. $P = O - B = 700$ m^3.

11. $v_1 = 10$ cm, $O = 384$ cm^2.

12. **a)** $v = 14$ cm **b)** $P = 112$ cm^2 **c)** $V = \frac{3\,584}{3}$ cm^3.

13. Ne. Volumen pijeska je $\frac{1}{3}r^2\pi \cdot v = \frac{4\pi}{3} \approx 4.19$ m^3, a volumen kamiona je $1.5 \cdot 2 \cdot 0.5 = 1.5$ m^3.

Rješenja složenijih zadataka

1. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $V = \frac{2}{3}h^3$.

2. $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$, $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

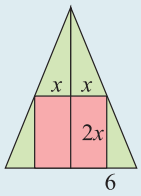
3. $\triangle ASV \sim \triangle A'S'V$, $|AS| : |A'S'| = v : |VS'|$. $a' = 3$ cm. Površina je 9 cm^2.

4. $O = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{av_1}{2}$ pa je $v_1 = \frac{9}{2}$. $v = \frac{\sqrt{6}}{2}$. $V = \frac{75\sqrt{2}}{4}$ cm^3.

5. $r = 3$ cm.

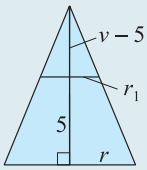
6. $r = \frac{a}{2}$, $v = a$, $V_{\text{kocke}} : V_{\text{stošca}} = 12 : \pi$.

7.



$6 : x = v : (v - 2x)$, $x = 2.4$ cm, $V = 27.648\pi$ cm^2.

8.



$r_1 : r = (v - 5) : v$, $r_1 = \frac{55}{8}$ cm, $P = \frac{3\,025}{16}\pi$ cm^2.

9. $r = \frac{s\sqrt{3}}{2}$, $P = \frac{s^2\sqrt{3}}{2}\pi$, $O = \frac{3s^2}{4}\pi + \frac{s^2\sqrt{3}}{2}\pi$. $O : P = (3 + 2\sqrt{3}) : (2\sqrt{3})$.

Kazalo pojmova

Zagreb, travanj 2021.