1 Realni brojevi

Što ću naučiti?

- opisati princip matematičke indukcije te ga primjenjivati u raznovrsnim problemima
- izreći i tumačiti binomni poučak te navesti primjere njegove primjene
- opisati potrebu za proširenjem skupova brojeva te opisati skupove N, Z, Q, R i C
- racionalne brojeve prevoditi iz decimalnog prikaza u razlomke i obrnuto
- navesti i obrazlagati aksiome polja realnih brojeva

Dodatni sadržaji

Pripremi se za gradivo koje slijedi, riješi pripremne zadatke koji se nalaze u elektroničkom dijelu udžbenika.

Broj je osnovni pojam matematike. Tijekom dosadašnjeg školovanja upoznali smo temeljna svojstva skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, racionalnih $\mathbb{Q}$ i realnih brojeva $\mathbb{R}$. Najjednostavniji među njima svakako je skup prirodnih brojeva. Na početku ovog poglavlja istaknut ćemo neka dodatna svojstva ovog skupa. Pokazat ćemo zatim kako se krenuvši od skupa $\mathbb{N}$ dobivaju složeniji skupovi brojeva. Detaljnije ćemo obraditi svojstva cijelih brojeva zbog njihove važnosti u računalnoj znanosti, svojstva realnih brojeva jer se na njima zasniva ***matematička analiza****, disciplina koju ćemo proučavati u nastavku, kao i svojstva kompleksnih brojeva zbog njihove važnosti u primjenama.*

1.1. Matematička indukcija

Primjer 1. Zbrajajući redom neparne prirodne brojeve, dobit ćemo

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 2^2 \\ 1+3+5 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 5^2. \end{aligned}$$

Jesu li ovi rezultati samo slučajna podudarnost ili ćemo ovim postupkom uvijek dobiti kvadrat prirodnog broja? Smijemo li zaključiti da vrijedi

$$\underbrace{1+3+5+7+\ldots}_{n \text{ pribrojnika}} = n^2?$$

Postavljajući ovu tvrdnju, uporabili smo *induktivni* način mišljenja koji partikularne rezultate generalizira na općenitu situaciju.

Primjer 2. Zbrajajući potencije broja 2, dobivamo

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 2^1 - 1 \\ 1+2 &= 3 = 2^2 - 1 \\ 1+2+4 &= 7 = 2^3 - 1 \\ 1+2+4+8 &= 15 = 2^4 - 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Na temelju ovih rezultata napiši formulu za zbroj prvih n potencija broja 2. No, je li ta formula točna? Provjerit ćemo to kasnije.

Primjer 3. Za polinom

$$P(x) = \frac{1}{60}(184x - 110x^2 + 55x^3 - 10x^4 + x^5)$$

vrijedi $P(1) = 2$, $P(2) = 4 = 2^2$, $P(3) = 8 = 2^3$, $P(4) = 16 = 2^4$, $P(5) = 32 = 2^5$.

Koliko je $P(6)$ i $P(7)$? Što se može pretpostaviti za vrijednost $P(n)$ za bilo koji prirodni n?

DEDUKTIVNO I INDUKTIVNO ZAKLJUČIVANJE

Dva su osnovna načina logičkog zaključivanja: deduktivni i induktivni.

U deduktivnom se pristupu krenuvši od općih spoznaja izvode istinite činjenice u nekom konkretnom slučaju. Primjerice, zaključivanje tipa — svi su ljudi smrtni; Petar je čovjek, dakle, Petar je smrtan — primjer je deduktivnog zaključivanja.

Ovakav je način zaključivanja korektan: krenuvši od istinitih pretpostavki (premisa), uvijek dolazimo do istinitog zaključka (konkluzije). Njegov je nedostatak što zaključujući ovako ne možemo doći do novih, dotad nepoznatih općenitih spoznaja.

U induktivnom pristupu polazimo od činjenica koje vrijede u nekom konkretnom primjeru i na temelju toga želimo zaključiti o istinama koje vrijede u općenitijoj situaciji. Primjerice: Ivan, Petar i svi ostali učenici u razredu niži su od 2 metra. Dakle, svi muškarci niži su od 2 metra.

Ovaj je zaključak očito neistinit. Pritom nije važno što je dobivena konkluzija neistinita, nepravilan je *način razmišljanja*. Sljedeće je razmišljanje jednako tako logički nepravilno, bez obzira na to što upućuje na istinitu konkluziju: Ivan, Petar i svi ostali učenici u razredu niži su od 20 metara. Znači, svi muškarci niži su od 20 metara.

Iako može dovesti do pogrešnih rezultata, metoda induktivnog zaključivanja moćno je i ponekad jedino sredstvo u otkrivanju istinitih činjenica.

Princip matematičke indukcije zahtijeva pretpostavke koje omogućavaju da konkluzija uvijek bude istinita. Iako se temelji na induktivnom načinu razmišljanja, sam princip spada u deduktivne metode.

Primjer 4. Usporedimo po veličini brojeve n^2 i 2^n. Koji od njih je veći?

n	2^n	n^2
$n = 1$	2	1
$n = 2$	4	4
$n = 3$	8	9
$n = 4$	16	16
$n = 5$	32	25
$n = 6$	64	36

Nakon početnih prevrtanja izgleda da dominiraju brojevi u stupcu 2^n. Zato možemo postaviti **hipotezu** koja ovisi o prirodnom broju n:

$$T(n): \qquad \text{Vrijedi } 2^n > n^2 \text{ za svaki } n \geqslant 5.$$

U ovim uvodnim primjerima nastojali smo primijeniti induktivni način mišljenja da bismo došli do općenite hipoteze. Primijetite da u Primjeru 3. pretpostavka $P(n) = 2^n$ *nije istinita* jer ne vrijedi već za $n = 7$.

Sad trebamo naučiti kako možemo dokazati one hipoteze koje jesu ispravne. To ćemo učiniti rabeći **princip matematičke indukcije**.

Princip matematičke indukcije

Princip matematičke indukcije

Ako neka tvrdnja vrijedi za prirodni broj n_0 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj $n + 1$, tada ona vrijedi za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$.

333 333 331

Broj 31 je prost.
Broj 331 je prost.
Broj 3 331 je prost.
Broj 33 331 je prost.
Broj 333 331 je prost.
Broj 3 333 331 je prost.
Broj 33 333 331 je prost.

Što možemo zaključiti? Svi brojevi kojima je posljednja znamenka jednaka 1, a sve ostale su jednake 3, prosti su brojevi. No je li to uistinu tako? Je li 333 333 331 prost?

Zbog jednostavnijeg dokazivanja pojedine korake u zaključivanju matematičkom indukcijom nazivamo posebnim imenima. Tvrdnju o kojoj je riječ označujemo s $T(n)$, ona ovisi o prirodnom broju n.

Dokaz matematičkom indukcijom provodi se u tri koraka.

Dokaz matematičkom indukcijom

Želimo dokazati istinitost neke tvrdnje $T(n)$ koja ovisi o prirodnom broju n.

i) **Baza indukcije.** Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za početni broj n_0, tj. da je $T(n_0)$ istinita tvrdnja.

ii) **Pretpostavka indukcije.** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n, tj. pretpostavimo da je $T(n)$ istinita tvrdnja.

iii) **Korak indukcije.** Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$, tj. iz $T(n)$ slijedi tvrdnja $T(n+1)$.

Tad je tvrdnja $T(n)$ istinita za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$.

Primijenimo ovaj princip na dosad razmotrene primjere.

Primjer 5. Dokažimo da vrijedi

$$\underbrace{1+3+5+7+\ldots}_{n \text{ pribrojnika}} = n^2.$$

Posljednji pribrojnik, n-ti neparni broj, ima zapis $2n-1$. Trebamo dokazati da vrijedi

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2. \qquad (1)$$

za svaki prirodni broj n. To je tvrdnja $T(n)$.

1. Baza indukcije. Provjerili smo da je formula (1) istinita za prvih pet vrijednosti broja n. (Dovoljno je provjeriti istinitost za $n=1$.)

2. Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da je formula (1) istinita za prirodni broj n.

3. Korak indukcije. Dodajmo zbroju s lijeve strane sljedeći član. Iskoristimo pritom pretpostavku indukcije:

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{=n^2} + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$. Zato ona vrijedi za svaki prirodni broj.

Dobro posložene domine prva su asocijacija za princip matematičke indukcije.

Primjer 6. Dokažimo da za svaki cijeli broj $n \geqslant 0$ vrijedi

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1. \qquad (2)$$

Početna vrijednost smije biti broj $n_0 = 0$.

1. Baza indukcije. Za $n = 0$ relacija (2) glasi $1 = 1$ i $T(0)$ je istinita.

2. Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da je jednakost (2) istinita, tj. da vrijedi $T(n)$.

3. Korak indukcije. Koristeći pretpostavku za sljedeći zbroj, dobivamo

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1. \end{aligned}$$

Posljednja jednakost je upravo tvrdnja $T(n+1)$. Dakle, ona je istinita, pa po principu matematičke indukcije zaključujemo da je tvrdnja istinita za svaki cijeli broj $n \geqslant 0$.

Primjer 7. Koristeći matematičku indukciju pokažimo istinitost formule

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (3)$$

Tvrdnja $T(n)$ koju želimo dokazati glasi: formula (3) vrijedi za svaki prirodni broj n.

1. Baza indukcije. $T(1)$ vrijedi jer u zbroju s lijeve strane imamo samo jedan član, a desna strana iznosi 1:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

2. Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n: formula (3) je istinita.

3. Korak indukcije. Dodajmo lijevoj strani jednakosti sljedeći pribrojnik i iskoristimo pretpostavku indukcije:

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{\text{iskoristimo } T(n)} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}.$$

Dobili smo formulu istovjetnu formuli (3), s $n+1$ umjesto n. To znači da tvrdnja vrijedi za broj $n+1$, dakle, $T(n+1)$ je istinita tvrdnja. Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Zadatak 1. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

U ovim smo primjerima s pomoću matematičke indukcije dokazivali različite identitete. No, ovaj princip snažno je sredstvo za dokazivanje različitih tvrdnji iz praktički svih grana matematike. Pokazat ćemo kako se s pomoću principa matematičke indukcije dokazuju neke nejednakosti, problemi s djeljivošću brojeva, neki geometrijski teoremi i sl. U nastavku ćemo u dokazu izostavljati ponovno navođenje pretpostavke jer to nije potrebno. Dovoljno je provjeriti bazu i dokazati korak indukcije.

Djeljivost brojeva

Primjer 8. Dokaži da je $n^3 + 2n$ djeljiv s 3, za svaki prirodni broj n.

Za $n = 1$ imamo $n^3 + 2n = 3$ pa je baza indukcije istinita.

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja za broj n i zamijenimo n s $n+1$:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2\\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1).\end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije prvi je pribrojnik djeljiv s 3, pa je i čitav izraz djeljiv s 3. Time je dokazan korak indukcije.

Primjer 9. Dokažimo da je broj $4^n + 15n - 1$ djeljiv s 9 za svaki prirodni broj n.

Za $n = 1$, broj 18 je djeljiv s 9.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n. Tada se može napisati

$$4^n + 15n - 1 = 9k$$

za neki prirodni broj k.

Provjerimo istinitost tvrdnje za broj $n+1$.

$$\begin{aligned}4^{n+1} + 15(n+1) - 1 &= 4[4^n + 15n - 1] - 45n + 18\\ &= 9(4k - 5n + 2).\end{aligned}$$

Ovaj je broj djeljiv s 9 i tvrdnja je dokazana.

Zadatak 2. Dokaži:
1) Broj $9^{n+1} + 8n - 9$ djeljiv je sa 16 za svaki prirodni broj n.
2) Broj $3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}$ djeljiv je s 13 za svaki prirodni broj n.

Zadatak 3. Dokaži da je $(2^{2n} - 1)$ djeljiv s 3 za svaki prirodni broj n.

Dokazivanje nejednakosti

Primjer 10. Dokažimo da vrijedi

$$2^n > n^2 \qquad \text{za svaki } n \geqslant 5.$$

Za $n = 5$ tvrdnja glasi $2^5 > 5^2$, što je istina.

Sad trebamo dokazati istinitost od $T(n+1)$:

$$2^{n+1} > (n+1)^2.$$

Tijekom dokaza koristit ćemo pretpostavku indukcije. Imamo

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2.$$

Da bismo dovršili dokaz, moramo provjeriti da za $n \geqslant 5$ vrijedi

$$2n^2 \geqslant (n+1)^2.$$

Pokažimo da za svaki $n \geqslant 3$ vrijedi

$$2n^2 \geqslant n^2 + 3n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Time je dokaz završen.

Zadatak 4. Dokaži matematičkom indukcijom

$$2^n > n^2 + 4n, \qquad \text{za sve } n \geqslant 6.$$

Primjer 11. Dokažimo nejednakost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Za $n = 1$ nejednakost se svodi na $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, što je istina.

Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za prirodni broj n. Tada je

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$$

Sada je dovoljno dokazati da vrijedi

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Ova je nejednakost ekvivalentna s

$$\sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n+3} < 2n+2.$$

Nakon kvadriranja i sređivanja dobiva se istinita nejednakost $0 < 1$. Time je korak indukcije dokazan.

Primjer 12. (**Bernoullijeva nejednakost**) Za svaki prirodni broj n i svaki realni broj $h > -1$ vrijedi

$$(1+h)^n \geqslant 1 + nh. \tag{4}$$

Pritom jednakost vrijedi samo za $n = 1$ ili za $h = 0$.

Za $n = 1$ lijeva i desna strana su jednake, pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da (4) vrijedi za prirodni broj n. Sad imamo:

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)^n(1+h)\\ &\geqslant (1+nh)(1+h)\\ &= 1 + nh + h + nh^2\\ &\geqslant 1 + (n+1)h,\end{aligned}$$

i tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$. Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki n. (Na kojem je mjestu korištena pretpostavka $h > -1$?)

OPASNE RIJEČI: UVIJEK, NIKAD

Istinitost neke tvrdnje $T(n)$ za početne vrijednosti prirodnog broja n ne daju nikakvu garanciju o tome što će se događati ubuduće.

Polinom čije su vrijednosti prosti brojevi. Promotrimo vrijednost izraza $P(n) = n^2 + n + 41$ za nekoliko prvih vrijednosti prirodnog broja n. Dobivamo brojeve 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97... — svi su oni prosti brojevi. Može li se zaključiti da će $P(n)$ biti prost za svaki prirodni broj n?

Odgovor je: ne! Za $n = 41$ broj očito nije prost jer je svaki pribrojnik djeljiv s 41. Nije niti za $n = 40$ jer je $P(40) = 41^2$. Ali jest za sve prirodne brojeve manje od 40.

Ovaj primjer neispravnog induktivnog zaključivanja dao je Euler.

Kvadrat prirodnog broja. Promotrimo sljedeću tvrdnju: broj $991n^2 + 1$ nije potpun kvadrat niti za jedan prirodni broj n. Uvrštavanjem broja n u ovaj izraz uvjerit ćemo se da je tvrdnja istinita za $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 100, \ldots, 1000 \ldots$. Mogli bismo neoprezno zaključiti da je ona istinita za svaki n. Zapravo, ova će tvrdnja biti istinita za sve brojeve n manje od 12 055 735 790 331 359 447 442 538 767. Međutim, za taj n izraz $991n^2 + 1$ je kvadrat broja 379 516 400 906 811 930 638 014 896 080.

Zanimljivo je da se može dokazati do postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da je $991n^2 + 1$ potpun kvadrat.

Kojih je prostih brojeva više? Prost broj veći od 3 ne može biti oblika $3k$, pa je oblika $3k + 1$ (nazovimo ih "plus prosti") ili $3k - 1$ (nazovimo ih "minus prosti"). Kojih prostih brojeva ime više? Brojimo li redom među prvih stotinu, uvijek ima više (ili jednako) minus prostih. Isto vrijedi za sve sljedeće proste brojeve, koliko god nam računalo dopušta tražiti. Mogli bismo zaključiti da minus prostih *uvijek* ima više. Međutim, pri prostom broju 608 981 813 029 situacija se mijenja i plus prosti preuzimaju vodstvo na neko vrijeme. To će se vodstvo ubuduće izmjenjivati. Mogli bismo reći da minus prostih ima prosječno jednako mnogo kao i plus prostih brojeva.

PARADOKSI VEZANI ZA MATEMATIČKU INDUKCIJU

Paradoks nenajavljenog ispita. Učenici 4. a razreda imaju sat matematike u svakom danu u tjednu, Profesor Matkić je u petak najavio: sljedeći tjedan pišemo kontrolni ispit. Neću vam reći koji će dan to biti, ispit će biti nenajavljen i nećete znati u koji će se dan održati. Zato se spremite čim prije!

Nakon kratke panike, za vrijeme odmora, Stipe, najbolji matematičar u razredu, objavio je sljedeće: Nemojte paničariti, ispit se neće održati sljedeći tjedan. Reći ću vam zašto. On ne može biti održan u petak jer bismo u četvrtak navečer svi znali da mora biti sutradan, dakle ispit ne bi bio nenajavljen. Dakle, petak prekrižite! Ispit ne može biti niti u četvrtak jer bismo u srijedu navečer svi to znali budući da je petak isključen. E, sad sami zaključite da ne može biti niti u srijedu, niti u utorak, niti u ponedjeljak!

Razred je bio umiren. Sljedeći tjedan, u srijedu, profesor Matkić pri ulasku u razred vikne: danas pišemo ispit! Potpuno nenajavljeno i iznenada.

Sljedeća dva tjedna nitko nije htio razgovarati sa Stipom.

Objasnite, je li on pogriješio u svom razmišljanju?

Odgovor nije nipošto jednostavan. Potražite komentar ovog paradoksa na internetu, ključne riječi *paradox*, *unexpected exam*, *hanging paradox* ili pitajte vašeg Stipu za objašnjenje.

Nitko nije bogat. Kad siromah pronađe na cesti kovanicu od pet lipa, to ga neće obogatiti. Ako netko nije bogat, onda ga zarada od 5 lipa neće učiniti bogatim. Prema principu matematičke indukcije, nitko nije bogat.

Tvrdnja pogotovo vrijedi kad kovanicu od 5 lipa zamijenimo onom od 1 lipe, no, kad ste je posljednji put vidjeli?

Ne postoji hrpa pijeska. Formulirajte analogno zaključivanje koje dokazuje da zrna pijeska nikad ne mogu napraviti hrpu.

Sve su ovce iste boje. Dokažimo da su sve ovce iste boje indukcijom po broju n ovaca u stadu. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$ jer je jedna ovca očito iste boje. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n i dodajmo još jednu ovcu u stado. Sad možemo izabrati dvije skupine s po n ovaca: $\{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ i $\{o_2, \ldots, o_n, o_{n+1}\}$. Po pretpostavci indukcije, sve ovce u svakoj od ovih skupina iste su boje. Budući da se neke nalaze u obje skupine, onda su sve ovce iste boje.

Pronađite pogrešku u ovom "dokazu"! Znali odgovor ili ne, ne dajte da vas priključe ovom stadu!

Svi prirodni brojevi jednaki su nuli! Iako je tvrdnja pomalo neobična, dokazu indukcije moramo vjerovati. A on ide ovako. Za nenegativni broj n neka je $T(n)$ tvrdnja "$n = 0$". Tad je baza indukcije $T(0)$ očito istinita. Pretpostavimo sada da su $T(0), \ldots, T(n)$ istinite tvrdnje i dokažimo istinitost od $T(n+1)$. No, tvrdnja $T(n)$ kaže da je $n = 0$, a tvrdnja $T(1)$ kaže da je $1 = 0$. Zato je $n+1 = 0+0 = 0$, pa je i $T(n+1)$ istinita. Time je dokaz završen!