5 Diferencijalni račun

Što ću naučiti?

- opisati limes funkcije te određivati limese nekih jednostavnijih funkcija
- definirati pojam neprekinutosti funkcije
- povezivati derivaciju s problemima tangente i brzine
- navoditi pravila deriviranja i ilustrirati ih konkretnim primjerima
- derivirati složenu funkciju uz navođenje primjera nekih primjena

Dodatni sadržaji

Pripremi se za gradivo koje slijedi, riješi pripremne zadatke koji se nalaze u elektroničkom dijelu udžbenika.

U ovom ćemo poglavlju naučiti osnove diferencijalnog računa, najvrednijeg alata koji su matematičari poklonili čovječanstvu. Riječ je o području matematike u kojem se na djelotvoran način iskorištava ideja o beskonačno malim veličinama, koja je dvije tisuće godina zaokupljala velikane ljudske misli. Ogromna je važnost diferencijalnog računa u tome što s pomoću njega opisujemo fizičke zakone na kojima se temelji naš svijet.

5.1. Limes funkcije

Definicija limesa

Neka je (x_n) niz brojeva koji se nalazi u području definicije funkcije f. S tim nizom prirodno je povezan i niz brojeva (y_n) gdje je $y_n = f(x_n)$.

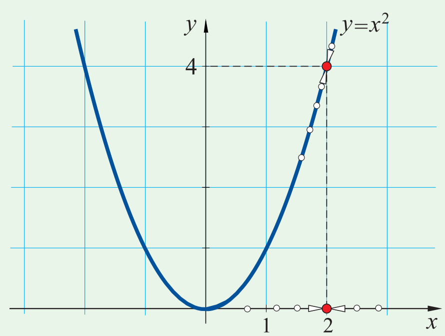
Pretpostavimo da niz brojeva (x_n) teži k broju a. Što se događa s nizom $(f(x_n))$? Teži li i on k nekom broju?

Primjer 1.

Izaberimo jednostavnu funkciju $f(x) = x^2$. Odgovor na postavljeno pitanje možemo naslutiti gledajući graf funkcije, ali i računajući njezine vrijednosti za neki odabrani niz (x_n) koji konvergira k $a = 2$. Promotrit ćemo zapravo dva niza, jedan koji raste prema 2 i drugi koji pada prema broju 2. Račun je napisan u tablici.

x_n	$f(x_n)$	x_n	$f(x_n)$
1.9	3.61	2.1	4.41
1.99	3.9601	2.01	4.0401
1.999	3.996001	2.001	4.004001
1.9999	3.99960001	2.0001	4.00040001
1.99999	3.99996000	2.00001	4.00004000

Vidimo da se funkcijske vrijednosti približavaju k 4, a to nam sugerira također i slika.



Ovaj rezultat ne ovisi o nizu koji odaberemo jer za bilo koji niz (x_n) koji teži prema 2 možemo pisati

$$y_n = f(x_n) = x_n^2,$$

a kako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, dobivamo

$$x_n \to 2 \implies x_n^2 \to 4. \tag{1}$$

Dakle, postoji limes niza (y_n) i on iznosi 4.

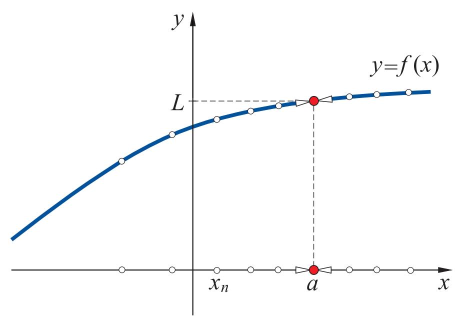
Budući da u ovom računu nije bilo važno koji smo niz (x_n) odabrali, relaciju (1) zapisujemo na jednostavniji način:

$$x \to 2 \implies x^2 \to 4.$$

Limes funkcije

Kažemo da funkcija f ima limes L u točki a ako za svaki niz (x_n) koji teži k a niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_n))$ teži k L. Pišemo:

$$L = \lim_{x\to a} f(x).$$



Prikazan je limes funkcije. Zamišljamo da x teži k broju a i promatramo što se događa s funkcijskim vrijednostima. Pritom nije važno je li sama funkcija definirana i koju vrijednost ima u točki a.

Dakle, u prvom bismo primjeru rezultat zapisali ovako

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

U ovom smo primjeru rezultat mogli naslutiti od samog početka jer vrijedi $f(2) = 4$. Ali, tehnika koju smo opisali funkcionira i u složenijim situacijama.

Primjer 2. Neka je $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$. Izračunajmo $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

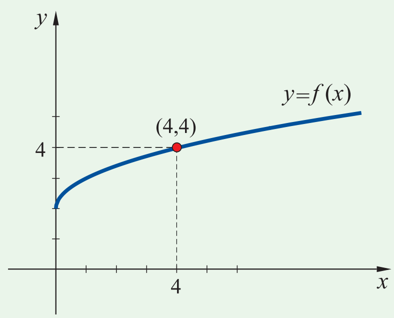
Vidimo da funkcija f nije definirana za $x = 4$, brojnik i nazivnik razlomka jednaki su nuli.

Računanje limesa ima za osnovni cilj dati nam informaciju o *ponašanju funkcije u neposrednoj okolini broja* 4.

Postupimo kao u prethodnom primjeru. Koristeći se GeoGebrom, nacrtajmo graf funkcije, a džepnim računalom ili u GeoGebri izračunajmo i funkcijske vrijednosti za dva niza koji se približavaju broju 4.

x_n	$f(x_n)$
3.9	3.97484177
3.99	3.99749844
3.999	3.99974998
3.9999	3.99997500
3.99999	3.99999750

x_n	$f(x_n)$
4.1	4.02484567
4.01	4.00249844
4.001	4.00024998
4.0001	4.00002500
4.00001	4.00000250



Na temelju grafa i ovih vrijednosti, usuđujemo se napisati

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = 4.$$

Kad naučimo više o tehnikama računanja limesa, vidjet ćemo da je rezultat istinit.

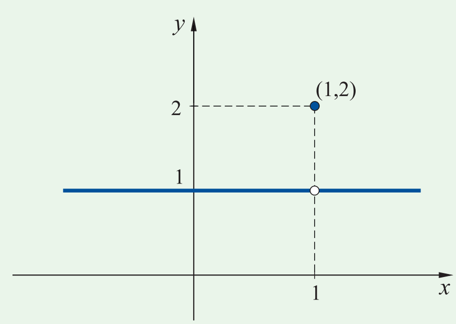
Zadatak 1. Grafički ili računski, odredi traženi limes:

1) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

(U posljednjem primjeru argument sinusa mjeri se u radijanima!)

Primjer 3. Neka je $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$ Odredimo $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Vrijednost funkcije u argumentu $x=1$ je 2. Ta vrijednost nema nikakvog utjecaja na limes *jer se limes računa rabeći vrijednosti funkcije u argumentima različitim od* $x = 1$.

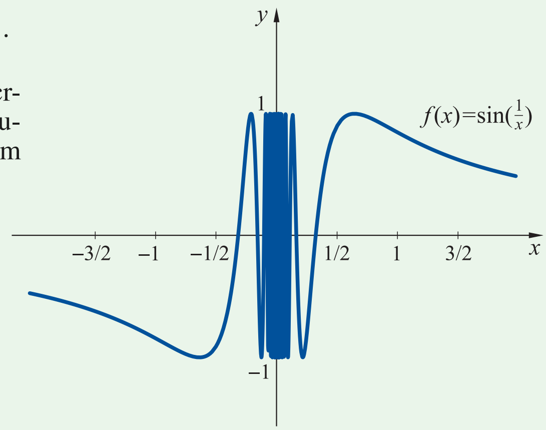


Budući da je vrijednost funkcije jednaka 1 u svim argumentima različitim od 1, vrijedi

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Primjer 4. Odredimo $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Slika grafa funkcije nacrtana u GeoGebri ukazuje da bi s ovim limesom moglo biti problema:



Pokušajmo odrediti limes numerički, poput onih u prva dva primjera.

x_n	$f(x_n)$
−0.1	0.544021
−0.01	0.506366
−0.001	−0.826880
−0.0001	0.305614
−0.00001	−0.035749
−0.000001	0.349994

x_n	$f(x_n)$
0.1	−0.544021
0.01	−0.506366
0.001	0.826880
0.0001	−0.305614
0.00001	0.035749
0.000001	−0.349994

Funkcija je neparna, pa je bilo dovoljno promotriti što se događa za $x > 0$. To što se događa sugerira zaključak: kad x teži k nuli, limes ove funkcije ne postoji.

Detaljniju raspravu ponašanja ove funkcije oko ishodišta potražite u elektroničkom dijelu udžbenika.

Zadatak 2. Odredimo limes funkcije $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ kad x teži k nuli. Potražimo li numerički limes ove funkcije na isti način kao u primjeru, dobit ćemo vrijednosti

x_n	$f(x_n)$
0.1	0
0.01	0
0.001	0
0.0001	0
0.00001	0
0.000001	0

pa je legitiman zaključak da je limes jednak nuli.

1) Je li ovaj zaključak dobar?

2) Objasni zašto smo u rezultatu dobili niz nula.

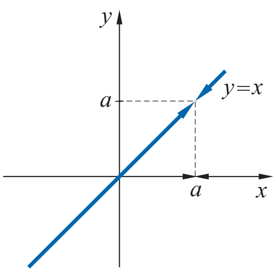
3) Kakva je veza između grafova funkcija $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ i $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$?

Pravilo direktne zamjene

U Primjeru 1 vidjeli smo da se vrijednost funkcije $f(x) = x^2$ za argument $x = 2$ podudara s funkcijskom vrijednosti $f(2) = 4$.

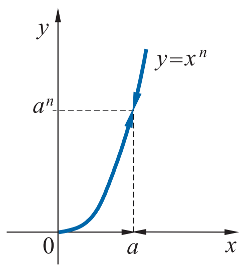
U Primjeru 3 rečeno je da vrijednost funkcije $f(1)$ ne utječe na računanje limesa pa onda niti na vrijednost limesa za $x = 1$.

Ove dvije činjenice nisu u suprotnosti. Vrijednost funkcije u nekom argumentu ne utječe na računanje limesa u toj točki. Međutim, ako ta vrijednost postoji, korisno je znati kad će se ona podudarati s limesom. S tim u vezi je sljedeće pravilo.

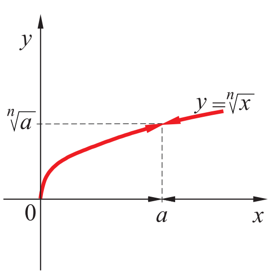


Pravilo direktne zamjene

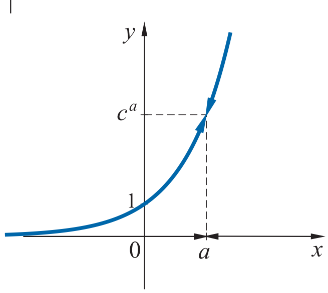
Za sve elementarne funkcije u svakoj točki a u kojoj su one definirane, vrijedi
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

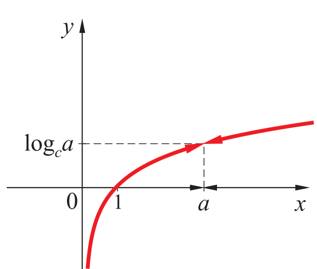


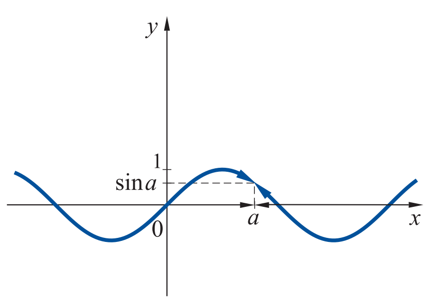
Ovdje pod elementarnim funkcijama podrazumijevamo potencije s bilo kojim eksponentom, polinome, racionalne funkcije, korijene, opću potenciju, logaritamsku funkciju, trigonometrijske funkcije i njima inverzne funkcije. Zasad ne možemo dokazati istinitost ovog pravila, o tome više u elektroničkom dijelu. Ovdje ćemo se zadovoljiti time da ga ilustriramo na nekim primjerima funkcija.



limes konstantne funkcije:	$\lim_{x\to a} c = c$
limes identične funkcije:	$\lim_{x\to a} x = a$
limes potencije:	$\lim_{x\to a} x^n = a^n$
limes n-tog korijena:	$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$
limes eksponencijalne funkcije:	$\lim_{x\to a} c^x = c^a$
limes logaritamske funkcije:	$\lim_{x\to a} \log_c x = \log_c a$
limes trigonometrijskih funkcija:	$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$
	$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$







Operacije s limesima

Navest ćemo kako se ponašaju limesi u odnosu na četiri osnovne algebarske operacije. Dokaze tvrdnji potražite u elektroničkom dijelu udžbenika.

Neka su f i g bilo koje dvije funkcije koje imaju limes u točki a:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M.$$

Tada vrijede svojstva:

1. Limes zbroja i razlike

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Dakle, limes zbroja (razlike) jednak je zbroju (razlici) limesa. Primjerice:

$$\lim_{x\to 3}(x+2) = \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 2 = 3+2 = 5$$

$$\lim_{x\to -1}[x^2 - x + 3] = \lim_{x\to -1}(x^2) - \lim_{x\to -1} x + \lim_{x\to -1} 3 = (-1)^2 - (-1) + 3 = 5.$$

2. Limes umnoška

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = L \cdot M = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Dakle, limes umnoška jednak je umnošku limesa. Primjerice:

$$\lim_{x\to a} cf(x) = \left(\lim_{x\to a} c\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x), \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to 4}(x\sqrt{x}) = \lim_{x\to 4} x \cdot \lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 4 \cdot 2 = 8,$$

$$\lim_{x\to 3}(2x^3 - 5x) = 2\lim_{x\to 3}(x^3) - 5\lim_{x\to 3}(x) = 39.$$

3. Limes kvocijenta Ako je $M = \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, onda vrijedi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Dakle, limes kvocijenta jednak je kvocijentu limesa (ako je limes u nazivniku različit od nule). Primjerice:

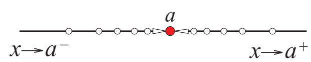
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^2 - 2)}{\lim_{x\to 2}(x+1)} = \frac{2}{3}.$$

Jednostrani limesi

U postupku računanja limesa funkcije u točki a promatramo kao bilo koji niz (x_n) koji teži k a.

Ako pritom uzimamo samo one nizove za koje je $x_n < a$ za svaki n, onda kažemo da varijabla x teži k a **slijeva** i pišemo $x \to a^-$. (Minus označava da je x u svakom trenutku manji od a i razlika $x - a$ je negativna.)

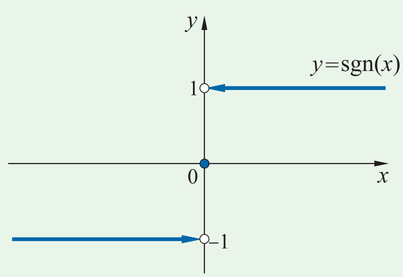
Ako uzimamo samo one nizove za koje je $x_n > a$ za svaki n, onda kažemo da varijabla x teži k a **zdesna** i pišemo $x \to a^+$ (jer je $x - a > 0$).



približavanje broju a s lijeve i s desne strane

Za neke funkcije limes u točki ne mora postojati, no funkcijske vrijednosti teže određenom broju ako se prema a približavamo slijeva ili zdesna.

Primjer 5. Za funkciju signum vrijedi $f(x) = 1$ za $x > 0$. Zato, ako x teži k 0 zdesna, vrijedi $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.



Funkcija signum ima jednostrane limese u točki 0.

Na isti način vidimo da je $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

Ova funkcija ima jednostrane limese u točki 0, ali su oni ***različiti***. Zato ne postoji njezin limes u točki 0.

Postojanje limesa

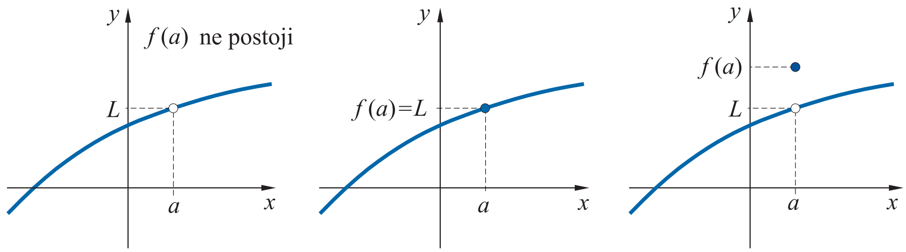
Limes $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ funkcije f u točki a postoji ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

1) postoji limes slijeva: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

2) postoji limes zdesna: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

3) ti se limesi podudaraju.

Za računanje limesa nije važno koju vrijednost funkcija ima u točki a. Zapravo, najčešće računamo limes baš tamo gdje funkcija nije ni definirana. Sljedeća slika opisuje različite situacije.



Limes funkcije ne ovisi o vrijednostima te funkcije u točki a.

U svim trima slučajevima limes funkcije, kad x teži k a, iznosi L. U prvom slučaju funkcija u točki a nije definirana, u drugom vrijedi $f(a) = L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, a u trećem $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Primjer 6.

Funkcija $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ nije definirana u točki 1 jer se u toj točki poništavaju i brojnik i nazivnik. Međutim, za $x \neq 1$ možemo skratiti brojnik s nazivnikom:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1, \qquad x \neq 1.$$

Prema tome, postoji limes ove funkcije

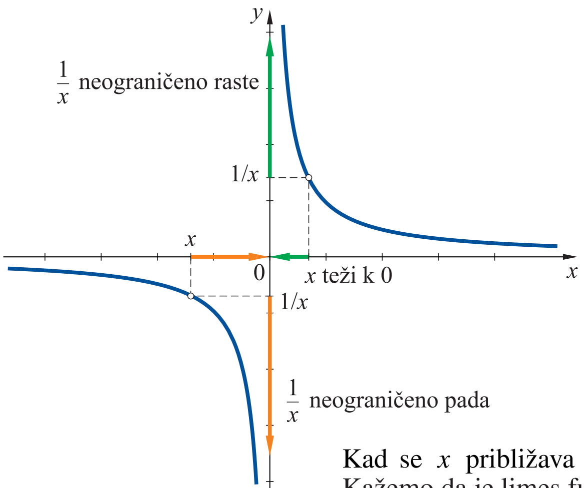
$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Zato je prirodno definirati $f(1) := 2$. U tom slučaju vrijedi formula $f(x) = x + 1$ za svaki realni x.

Beskonačni limesi

Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x}$ definirana je za svaki realni broj različit od nule. Kako se ponaša ta funkcija kad x teži k nuli?

Pomoći će nam graf funkcije i tablica njezinih vrijednosti.



x_n	$f(x_n)$
-1.0	-1
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10000

x_n	$f(x_n)$
1.0	1
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000

Kad se x približava nuli zdesna, funkcijske vrijednosti **neograničeno rastu**. Kažemo da je limes funkcije $+\infty$ i pišemo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Kad se x približava nuli slijeva, predznaci od x i $\dfrac{1}{x}$ su negativni pa kažemo da funkcijske vrijednosti **neograničeno padaju**. Limes funkcije je $-\infty$, pišemo

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Primjer 7.

Za funkciju $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ oba jednostrana limesa su $+\infty$. Zato funkcija u nuli teži u beskonačnost:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} + \infty.$$

Prikazan je graf funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Kad se argument približava nuli, vrijednosti funkcije neograničeno rastu.