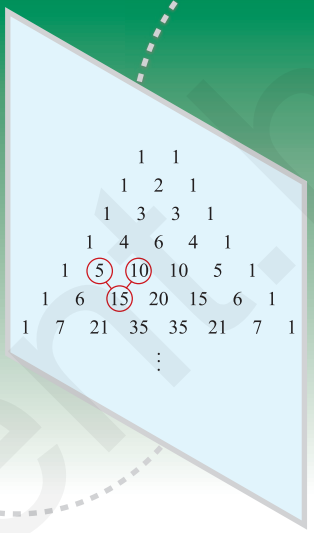
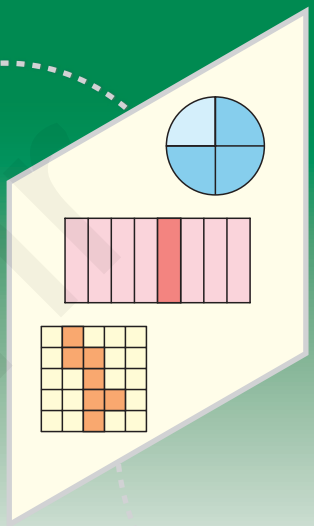
1 | Skupovi brojeva





Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- ✓ razlikovati i opisati prirodne, cijele, racionalne, iracionalne i realne brojeve
- ✓ uočiti i obrazložiti potrebu proširenja skupova brojeva
- ✓ navesti i obrazložiti svojstva računskih operacija zbrajanja i množenja
- ✓ razlikovati induktivni i deduktivni način zaključivanja
- ✓ s pomoću matematičke indukcije dokazati tvrdnje.

Oni koji žele znati više moći će:

- ✓ dokazati da je korijen iz prostog broja iracionalan broj
- ✓ primjenjivati binomnu formulu.

1.1. Skup prirodnih brojeva

Brojevni sustavi

ISTRAŽI!

Prošlog je vikenda Zlatko proslavio svoj 101 000. rođendan. Pozvao je 10 110 prijatelja, a oni su doveli još 111 prijatelja tako da je, zajedno sa slavljenikom na rođendanu bilo 11 110 ljudi. Na rođendanskog torti nije bilo mjesta za 101 000 svjećica, ali zato je pisalo " Sretan ti 40. rođendan!"

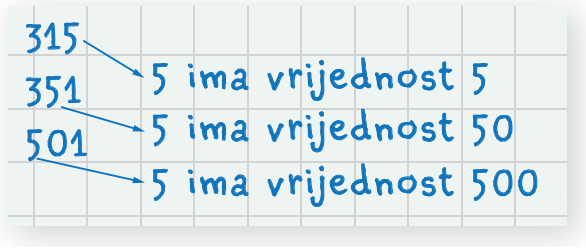
Je li ovo početak neke znanstveno-fantastične priče ili se tu krije nešto drugo? Jesu li u slastičarnici pogriješili u vezi s natpisom na torti?

Pojam prirodnog broja razvio se iz potrebe za prebrojavanjem pojedinih objekata. Čovjek od davnina, želeći prenijeti drugome informaciju o tome koliko pojedinih predmeta ima, koristi prirodne brojeve. U mnogim kulturama brojevni je sustav tako zasnovan da se njime mogu iskazati po volji veliki brojevi.

Skup prirodnih brojeva označavamo pojačanim slovom $\mathbb{N}$ i danas se pri zapisu brojeva pretežno koristi **položajni** (ili pozicijski) sustav s deset znamenaka: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

U položajnom brojevnom sustavu znamenka u zapisu broja ima vrijednost određenu svojim položajem.

Primjerice, u brojevima 315, 351 i 501 koristi se ista znamenka 5, ali budući da se nalazi na različitim mjestima, ona nosi informaciju o različitim vrijednostima: 5, 50, 500, redom.

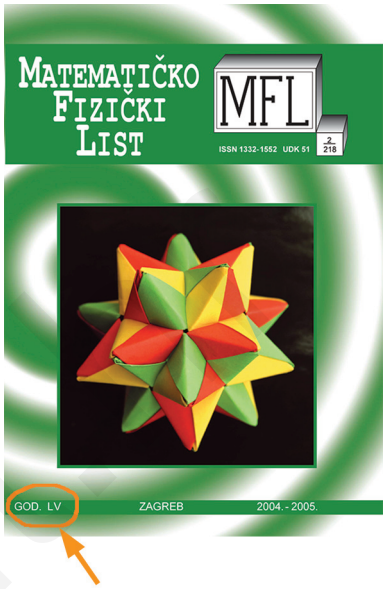


Danas se u nešto manjoj mjeri koristi jedan nepoložajni brojevni sustav – rimski brojevi i to obično pri označavanju datuma, godine, rednih brojeva, a gotovo nikad pri računanju.

Znamenke rimskog brojevnog sustava su:

I – jedan V – pet X – deset L – pedeset C – sto D – petsto M – tisuću

Pri zapisu prirodnih brojeva u rimskom sustavu pratimo nekoliko pravila:



- Ako se znamenka manje vrijednosti nalazi iza znamenke veće vrijednosti, te se znamenke zbrajaju. Primjerice:

$$\mathrm{VI} = 6, \quad \mathrm{LV} = 55, \quad \mathrm{MD} = 1500.$$

- Znamenke $\mathrm{I}, \mathrm{X}, \mathrm{C}, \mathrm{M}$ mogu se zaredom pojaviti najviše tri puta, a ostale samo jednom. Primjeri:

$$\mathrm{II} = 2, \quad \mathrm{III} = 3, \quad \mathrm{XXXII} = 32.$$

- Ako se ispred znamenke veće vrijednosti nalazi znamenka manje vrijednosti, vrijednosti se oduzimaju. Znamenka I smije se oduzimati samo od V i X, znamenka X samo od L i C, a znamenka C samo od D i M. Primjeri:

$$\mathrm{IX} = 9, \quad \mathrm{XLV} = 45, \quad \mathrm{MCM} = 1900.$$

Vratimo se na razmatranje položajnih brojevnih sustava. Najčešći je sustav s **bazom** 10, tzv. dekadski. Već smo naveli da u njemu koristimo znamenke $0, 1, 2, \ldots, 9$, a prirodni broj ima oblik

$$\overline{a_n \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

gdje su $a_n, \ldots, a_0$ znamenke.

$$53\,678 = \underset{\substack{\text{znamenka}\\ \text{desettisućice}}}{5} \cdot 10^4 + \underset{\substack{\text{znamenka}\\ \text{tisućice}}}{3} \cdot 10^3 + \underset{\substack{\text{znamenka}\\ \text{stotice}}}{6} \cdot 10^2 + \underset{\substack{\text{znamenka}\\ \text{desetice}}}{7} \cdot 10^1 + \underset{\substack{\text{znamenka}\\ \text{jedinice}}}{8}$$

U računalstvu i srodnim područjima koriste se još i binarni, oktalni i heksadecimalni sustavi s bazama 2, 8 i 16, redom.

U binarnom sustavu koriste se samo znamenke 0 i 1, a broj ima zapis

$$\overline{a_n \ldots a_1 a_0}_{(2)} = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0.$$

U indeksu pišemo (2) kako bismo naglasili da se radi o zapisu u binarnom sustavu, a ako nema indeksa, radi se o zapisu u dekadskom sustavu. Primjerice,

$$1101_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 13$$
$$111000_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 = 56.$$

U oktalnom sustavu koriste se znamenke $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, a broj ima zapis

$$\overline{a_n \ldots a_1 a_0}_{(8)} = a_n 8^n + a_{n-1} 8^{n-1} + \ldots + a_1 8 + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$. Primjerice,

$$7512_{(8)} = 7 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 2 = 3914.$$

Prelazak između zapisa broja u binarnom sustavu u zapis u oktalnom sustavu i obratno je vrlo jednostavan – jednostavno se u binarnom zapisu formiraju grupe po 3 znamenke računajući od decimalne točke, a brojevi u tim grupama pretvore se u oktalni zapis.

$$\underbrace{1}_{1_{(8)}} \,|\, \underbrace{111}_{7_{(8)}} \,|\, \underbrace{000}_{0_{(8)}}{}_{(2)} = 170_{(8)} \longrightarrow \text{iz binarnog u oktalni}$$

$$7512_{(8)} = \underbrace{111}_{7_{(8)}}\ \underbrace{101}_{5_{(8)}}\ \underbrace{001}_{1_{(8)}}\ \underbrace{010}_{2_{(8)}}{}_{(2)} \longrightarrow \text{iz oktalnog u binarni}$$

U heksadecimalnom zapisu koristi se 16 znamenaka: $0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F$ pri čemu A, B, C, D, E, F u dekadskom sustavu imaju redom vrijednosti $10, 11, 12, 13, 14, 15$. Tako je, primjerice,

$$4BF_{(16)} = 4 \cdot 16^2 + B \cdot 16 + F = 4 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 15 = 1215.$$

Prelazak između zapisa u binarnom sustavu u zapis u heksadecimalnom sustavu i obratno, vrši se na sličan način kao kod oktalnog sustava samo što se sad formiraju grupe po 4 znamenke

$$\underbrace{1\,1\,1}_{7_{(16)}} \,|\, \underbrace{1\,1\,0\,0}_{C_{(16)}}{}_{(2)} = 7\,C_{(16)}$$

$$FAB_{(16)} = \underbrace{1\,1\,1\,1}_{F_{(16)}} \,|\, \underbrace{1\,0\,1\,0}_{A_{(16)}} \,|\, \underbrace{1\,0\,1\,1}_{B_{(16)}}{}_{(2)}.$$

Općenito, za bazu brojevnog sustava može se upotrijebiti bilo koji prirodni broj $b > 1$. Tada je zapis broja u bazi b:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{(b)} = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$.

Iz tog zapisa jasno je kako se prelazi iz baze b u bazu 10, a za obratan postupak obično koristimo algoritam dijeljenja opisan na konkretnom primjeru.

PRIMJER 1.

Broj 3914 napišimo u oktalnom sustavu.

	ostatci
3914	2
489	1
61	5
7	7
0	

$3914 : 8 = 489$ i ostatak je 2. U tablicu ispod 3914 pišemo 489, a u desni stupac zapisujemo ostatak 2. Dalje nastavljamo tako da količnik 489 dijelimo s 8:

$$489 : 8 = 61 \text{ i ostatak } 1$$
$$61 : 8 = 7 \text{ i ostatak } 5.$$

I konačno $7 : 8 = 0$ i ostatak 7 te tu postupak staje. Traženi broj zapisan je u desnom stupcu i pročitan odozdo prema gore, tj. $3914_{(10)} = 7512_{(8)}$.

Pokažimo što se dešava pri ovom dijeljenju i zašto je ovaj algoritam ispravan. Sve rezultate dijeljenja zapišimo u multiplikativnom obliku.

$$3914 = 489 \cdot 8 + 2$$
$$3914 = (61 \cdot 8 + 1) \cdot 8 + 2 = 61 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 2$$
$$3914 = (7 \cdot 8 + 5) \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 2 = 7 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 2 = 7512_{(8)}.$$

Pogledaj animaciju...
ele-udzbenik.hr

PRIMJER 2.

Zbrojimo dane brojeve i rezultate prikažimo u istoj bazi u kojoj su zadani brojevi:

a) $11\,110_{(2)} + 1011_{(2)}$ **b)** $3442_{(5)} + 443_{(5)}$.

Prisjetimo se kako zbrajamo dva broja u dekadskoj bazi. Zbrojimo znamenke i ako je rezultat manji od 10, zapišemo tu znamenku. Ako je rezultat veći od 10, zapišemo znamenku jedinica (to je broj koji kazuje za koliko smo premašili 10) i dalje prenosimo 1. Slično postupamo i u drugim bazama jedino što su sada znamenke jedinica brojevi koji pokazuju za koliko je zbroj veći od baze b.

Tako je, primjerice, $1_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$ ($1 + 1 = 2$, pišemo 0, 1 dalje), $4_{(5)} + 3_{(5)} = 12_{(5)}$ ($4 + 3 = 7$, pišemo 2, 1 dalje).

$$\begin{array}{r} 11110_{(2)} \\ +\ \ 1011_{(2)} \\ \hline 101001_{(2)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3442_{(5)} \\ +\ \ 443_{(5)} \\ \hline 4440_{(5)} \end{array}.$$

Naravno da smo mogli zbrajati i ovako: oba pribrojnika pretvorimo u zapis u dekadskoj bazi, zbrojimo ih i rezultat pretvorimo natrag u početnu bazu. Evo rješenja za **b)** dio primjera na taj način:

$$3442_{(5)} + 443_{(5)} = (3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 2) + (4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 3)$$
$$= 497 + 123 = 620 = 4440_{(5)}.$$

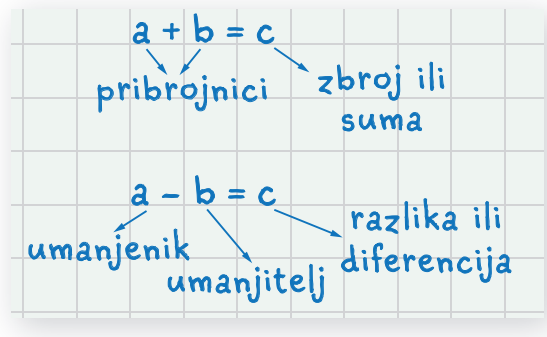
620	0
124	4
24	4
4	4
0	

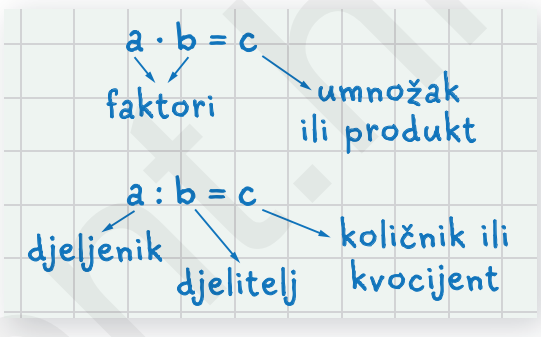
Pogledaj animaciju...
ele-udzbenik.hr

Računske operacije u skupu $\mathbb{N}$

Kao što znamo, u skupu prirodnih brojeva definiramo četiri osnovne računske operacije: zbrajanje i oduzimanje, množenje i dijeljenje.

Pri tome su zbrajanje i oduzimanje operacije nižeg prioriteta od množenja i dijeljenja. To znači da se u brojevnim izrazima u kojima se ne pojavljuju zagrade, prvo vrši množenje i dijeljenje, redom slijeva nadesno, a zatim zbrajanje i oduzimanje.





Osnovna svojstva računskih operacija su:

- komutativnost zbrajanja, odnosno množenja:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a, \qquad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

  Znak $\forall$ koristi se umjesto izraza "za svaki".

- asocijativnost zbrajanja, odnosno množenja:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$$

- distributivnost množenja prema zbrajanju i oduzimanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$$
$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{N}, b > c$$

- broj 1 je neutralni element za množenje

$$a \cdot 1 = a, \qquad \forall a \in \mathbb{N}.$$

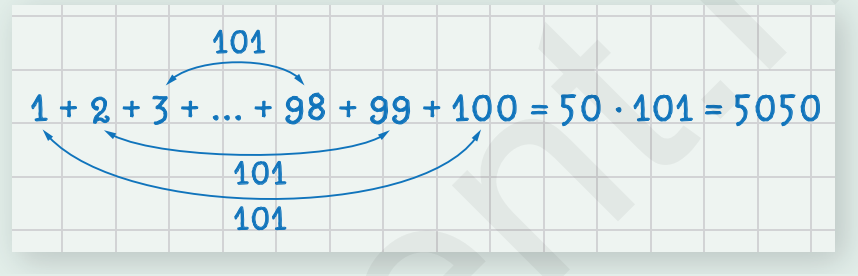
$N_0 = N \cup \{0\}$

Operacije oduzimanja i dijeljenja nisu uvijek izvedive u skupu $\mathbb{N}$ i ta će činjenica biti uzrokom potrebe za proširenjem skupa $\mathbb{N}$ do novih skupova brojeva. Prvo proširenje koje ćemo ovdje spomenuti je proširenje brojem 0. Naime, kad iz skupa s a elemenata uklonimo a elemenata, nije ostao nijedan element. Ta se činjenica označava nulom, tj. $a - a = 0$, a skup $\mathbb{N}$ s dodanim novim elementom 0 označavamo $\mathbb{N}_0$ i nazivamo skup prirodnih brojeva s nulom.

PRIMJER 3.

Izračunajmo zbroj prvih 100 prirodnih brojeva.

Ovo je povijesni problem koji povezujemo s velikim njemačkim matematičarom Carlom Friedrichom Gaussom. Anegdota kazuje da je učitelj učenicima, želeći ih zaposliti na dulje vrijeme, zadao ovaj zadatak. No, ubrzo, tada devetogodišnji, Gauss donosi učitelju rješenje. Evo kako se može izračunati zadani zbroj.
Uočimo da je zbroj prvog i posljednjeg broja u zbroju jednak 101, drugog i pretposljednjeg također 101 i tako dalje. U zbroju postoji 50 takvih parova čiji je zbroj 101 te je ukupni zbroj $50 \cdot 101 = 5050$.



Ovaj se zadatak mogao riješiti i na drugi način. Označimo sa S zadani zbroj. Tada je

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 \\ S &= 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1 \end{aligned} \Big\} +$$

$$\begin{aligned} 2S &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1) \\ 2S &= 100 \cdot 101 \\ S &= \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050. \end{aligned}$$

Ovaj je postupak lako poopćiti na zbroj $1 + 2 + \ldots + n$, te se dobiva $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
S ovom formulom za zbroj prvih n prirodnih brojeva susrest ćemo se i u poglavlju o matematičkoj indukciji te o aritmetičkom nizu.

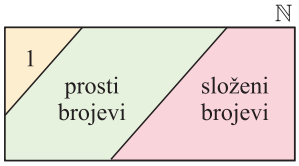
Carl F. Gauss (Braunschweig, 1777. – Göttringen, 1855.) veliki je njemački matematičar, često zvan princem matematike. Djelovao je u raznim područjima matematike. S 19 godina uspio je konstruirati pravilni sedamnaesterokut, a potom je i dokazao kakav mora biti broj n da bi se pravilan n-terokut mogao konstruirati. Dokazao je osnovni teorem algebre, opisao metodu rješavanja sustava linearnih jednadžbi koju danas zovemo Gaussova metoda eliminacije, razmatrao pitanje neeuklidske geometrije itd. Vodio je zvjezdarnicu Göttingen, izračunao putanju planetoida Cerere i Palade, napisao matematičke tablice za potrebe astronomije, a za obradu pogrešaka koristio krivulju koja danas ima značajnu važnost u teoriji vjerojatnosti.

Više o ovome
ele-udzbenik.hr

Djeljivost

Sve prirodne brojeve veće od 1 razvrstavamo u dvije skupine: u skup prostih brojeva i skup složenih brojeva.

Prvo se prisjetimo nekih pojmova kao što su djelitelj, višekratnik i biti djeljiv.



Prirodan je broj a **djeljiv** s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj k takav da je

$$a = kb.$$

U tom slučaju kažemo da je b **djelitelj** od a, odnosno a je **višekratnik** od b.

Pišemo $b|a$ te čitamo "b dijeli a". Smatramo da je nula djeljiva sa svakim prirodnim brojem.

Prost broj je prirodan broj veći od 1 koji ima točno dva djelitelja: broj 1 i samog sebe.

Složeni je broj prirodan broj veći od 1 koji ima više od dva različita djelitelja.

Sadržaj **osnovnog teorema aritmetike** jest da se svaki prirodni broj veći od 1 može prikazati kao umnožak prostih faktora i taj je rastav jedinstven ako zanemarimo različite poretke faktora. Prostih brojeva ima beskonačno mnogo i tu činjenicu su poznavali i starogrčki matematičari.

Teorem

Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da prostih brojeva ima konačno mnogo. Neka je $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ skup svih prostih brojeva. Formiramo novi prirodni broj q ovako

$$q = p_1 p_2 \ldots p_n + 1.$$

Broj q je veći od svakog broja $p_1, \ldots, p_n$; dakle, on se ne nalazi u skupu P. Budući da je veći od 1 i nije prost, on je složen broj.

Kad ga podijelimo s bilo kojim $p_i \in P$, ostatak je 1, tj. q nije djeljiv ni s jednim prostim brojem, dakle nije složen.

Time smo dobili kontradikciju, a to znači da je početna pretpostavka "prostih brojeva ima konačno mnogo" lažna. Tada je istinita izjava da prostih brojeva ima beskonačno mnogo. ◄

Poznajemo i razne kriterije djeljivosti brojeva. Navedimo ovdje neke od njih:

- Broj je djeljiv s 2 (5 ili 10) ako i samo ako mu je znamenka jedinica djeljiva s 2 (5 ili 10).
- Broj je djeljiv s 4 (25 ili 100) ako i samo ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4 (25 ili 100).
- Broj je djeljiv s 3 (ili 9) ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3 (ili s 9).

PRIMJER 4.

Dokažimo da 3 dijeli broj $n^3 + 5n$ gdje je n bilo koji prirodni broj.

Svaki prirodni broj pri dijeljenju s 3 daje ili ostatak 0 ili 1 ili 2, tj. možemo zapisati

$$n = 3k + r, \qquad k \in \mathbb{N}_0, \quad r \in \{0, 1, 2\}.$$

Uvrstimo li taj oblik u $n^3 + 5n$, dobivamo

$$\begin{aligned} n^3 + 5n &= (3k + r)^3 + 5(3k + r) = 27k^3 + 27k^2r + 9kr^2 + r^3 + 15k + 5r \\ &= 3(9k^3 + 9k^2r + 3kr^2 + 5k) + (r^3 + 5r). \end{aligned}$$

Ako dokažemo da je $r^3 + 5r$ djeljivo s 3, tada će i broj $n^3 + 5n$ biti djeljiv s 3. Izračunajmo $r^3 + 5r$ za sve tri vrijednosti broja r.

Ako je $r = 0$, tada $r^3 + 5r = 0^3 + 5 \cdot 0 = 0$.

Ako je $r = 1$, tada $r^3 + 5r = 6$.

Ako je $r = 2$, tada $r^3 + 5r = 18$.

U sva tri slučaja dobili smo da $3 | r^3 + 5r$ pa slijedi $3 | n^5 + 5n$.

I konačno spomenimo još jednu formulu koja je vrlo korisna pri ispitivanju djeljivosti, a čije posebne slučajeve smo obradili u prvom razredu. Naime, dobro nam je poznata formula za razliku kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

a postoje i formule za razliku i zbroj kubova:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \qquad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Poopćenje tih formula dano je u sljedećoj tvrdnji.

Teorem

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Tada je

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Ako je uz to n neparan broj, tada je

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Uvjerimo se u istinitost prve formule. Pomnožimo li izraze na desnoj strani, dobivamo

$$\begin{aligned} &(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} \\ &\qquad - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \ldots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n \\ &= a^n - b^n. \end{aligned}$$

PRIMJER 5.

Dokažimo da 9 dijeli $11^n - 2^n$ za svaki prirodni broj n.

Rastavom na faktore izraza $11^n - 2^n$ dobivamo

$$\begin{aligned} 11^n - 2^n &= (11-2)(11^{n-1} + 11^{n-2} \cdot 2 + 11^{n-3} \cdot 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) \\ &= 9 \cdot (11^{n-1} + 11^{n-2} \cdot 2 + \ldots + 2^{n-1}). \end{aligned}$$

Budući da je izraz u zagradi prirodan broj, zaključujemo da je desna strana oblika $9k$, $k \in \mathbb{N}$, tj. $11^n - 2^n = 9k$ pa $9 | 11^n - 2^n$.

ZADATCI 1.1.

1. U dekadskom sustavu zapiši brojeve:

a VII **b** IV **c** IX **d** XCIX **e** CI **f** XXIII
g LIV **h** DI **i** MCMXC **j** MMI **k** MMDV **l** MMXXIX.

2. U rimskom brojevnom sustavu zapiši brojeve:

a 8 **b** 12 **c** 29 **d** 49 **e** 58 **f** 111
g 241 **h** 401 **i** 736 **j** 880 **k** 923 **l** 2022.

3. Rimskim brojkama zapiši datum svojeg rođenja.

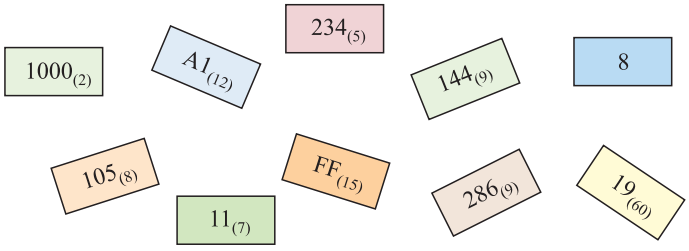
4. Napiši u dekadskom sustavu zadane brojeve:

a $11\,001_{(2)}$ **b** $1\,101\,101_{(2)}$ **c** $3\,412_{(8)}$ **d** $2735_{(8)}$
e $11\,001_{(8)}$ **f** $123_{(4)}$ **g** $123_{(5)}$ **h** $2A79_{(11)}$
i $11\,001_{(16)}$ **j** $FFF_{(16)}$ **k** $ABCD_{(16)}$ **l** $ABCD_{(20)}$.

5. Prepiši i popuni tablicu.

broj u dekadskom sustavu	39	63	201	432	505	1600
sustav s bazom 2						
sustav s bazom 5						
sustav s bazom 8						
sustav s bazom 16						

6. Spoji kartice na kojima su napisani brojevi jednakih vrijednosti.



7. Odredi $b \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

a $21_{(b)} = 15$ **b** $321_{(b)} = 86$ **c** $AAA_{(b)} = 1330$

d $2223_{(b)} = 171$ **e** $2121_{(b)} = 70$ **f** $DAD_{(b)} = 2701$.

8. Zbroji

a $11\,101_{(2)} + 111_{(2)}$ **b** $10\,111_{(2)} + 1011_{(2)}$ **c** $2102_{(3)} + 121_{(3)}$

d $1121_{(3)} + 111_{(3)}$ **e** $413_{(5)} + 124_{(5)}$ **f** $FF_{(16)} + AAA_{(16)}$.

9. U kojem brojevnom sustavu vrijedi:

a $2102_{(b)} + 1211_{(b)} = 11\,020_{(b)}$ **b** $3516_{(b)} + 4523_{(b)} = 12443_{(b)}$ **c** $9B3_{(b)} + 77A_{(b)} = 1571_{(b)}$?

10. Izračunaj sljedeće zbrojeve:

a $1 + 2 + 3 + \ldots + 200$ **b** $1 + 2 + 3 + \ldots + 2021$

c $51 + 52 + \ldots + 100$ **d** $1900 + 1901 + \ldots + 2021 + 2022$.

11. Koliki je zbroj prvih 30 parnih prirodnih brojeva?

a 1860 **b** 930 **c** 450 **d** 339

12. Spoji zadani zbroj i njegovu vrijednost:

a $505 + 506 + 507 + \ldots + 600$ **1** 250 000

b $504 + 506 + 508 + \ldots + 902$ **2** 53 040

c $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 999$ **3** 140 600

13. Ispisujemo redom brojeve od 1 do n.

a Koliko smo ukupno znamenaka napisali ako je $n = 120$?

b Koliko smo puta zapisali znamenku 5 ako je $n = 160$?

c Koja se znamenka nalazi na 70. mjestu ako je $n = 100$?

14. Koliko ima prirodnih brojeva koji su rješenje nejednadžbe $12 - 5x > 0$?

a 1 **b** 2 **c** 3 **d** 4

15. Koliko ima prirodnih brojeva $n \leqslant 200$ koji su djeljivi sa 7?

a 28 **b** 29 **c** 27 **d** 30

16. Koliko ima prirodnih brojeva $n \leqslant 400$ koji su djeljivi s 2 ili s 3?

a 200 **b** 133 **c** 333 **d** 267

17. Iz skupa A izbaci uljeza ako je $A = \{3, 5, 11, 69, 71, 101, 103\}$.

18. Zaokruži odgovor koji opisuje istinitost tvrdnje: Zbroj četiriju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je s 4.

a nikad **b** ponekad **c** uvijek