1 Nizovi

Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- ✓ opisati aritmetički i geometrijski niz i povezati ih s aritmetičkom i geometrijskom sredinom
- ✓ zapisati opći član niza
- ✓ računati zbroj prvih *n* članova niza
- ✓ opisati geometrijski red
- ✓ rješavati probleme iz svakodnevnog života primjenom aritmetičkog i geometrijskog niza
- ✓ objasniti veličine koje se javljaju u kamatnom računu
- ✓ računati jednostavne kamate za dane, mjesece i godine i primjenjivati ih u jednostavnim primjerima iz života
- ✓ opisati razliku između jednostavnog i složenog ukamaćivanja
- ✓ računati konačnu i početnu vrijednost uloga i ukupne složene kamate
- ✓ primjenjivati kamatni račun u primjerima štednje i dugovanja

1.1. Pojam niza

ISTRAŽI!

Nastavi niz s bar još dva člana:

a) 

b) 

c) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$

Vjerojatno se većina od vas susrela sa zadatcima ovakvog tipa:

Uoči pravilnost i napiši još dva člana niza $5, 10, 15, 20, \ldots$

Očekivani odgovor za nova dva člana niza je 25 i 30 jer se svaki sljedeći broj povećava za 5. U ovom poglavlju razmatramo matematičku prirodu ovakvih zadataka.

Zamijetimo da je broj 5 prvi član, broj 10 drugi član, broj 15 treći član itd. Stoga možemo pisati

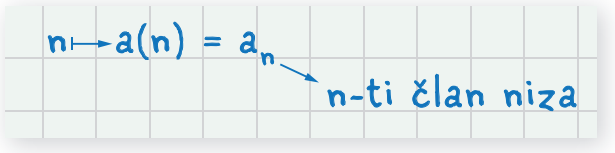
$$1 \mapsto 5, \quad 2 \mapsto 10, \quad 3 \mapsto 15, \quad 4 \mapsto 20, \ldots, n \mapsto 5n$$

Ovime smo opisali jednu funkciju čije pravilo će nam omogućiti da otkrijemo koji se broj nalazi na bilo kojem mjestu u nizu.

Niz

Neka je S neprazan skup. Funkciju $a : \mathbb{N} \to S$ nazivamo **niz** ili **slijed** u skupu S.

Dakle, funkcija a broju n pridružuje element $a(n)$ koji kratko zapisujemo a_n i nazivamo n-ti član niza.



Niz još označavamo i ovako: (a_n), $(a_n)_n$ ili $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Skup S može biti bilo koji neprazni skup: skup brojeva, točaka, pravaca, funkcija, slova itd. Ovdje proučavamo situaciju kad je S neki od skupova brojeva: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

PRIMJER 1.

a) Napišimo prvih pet članova niza (a_n) ako je $a_n = 2n - 3$.

b) Koji je 1000. član niza?

c) Je li broj 2020 član niza?

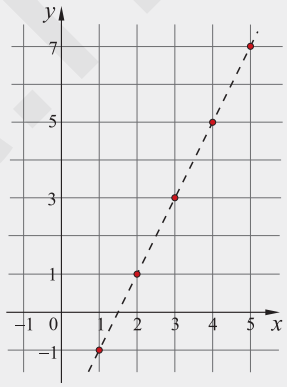
d) Prikažimo niz grafički.

a) $a_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 7$.

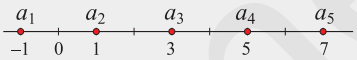
b) $a_{1000} = 2 \cdot 1000 - 3 = 1997$.

c) Tražimo prirodan broj n za koji vrijedi $2020 = 2n - 3$. Tada je $n = \dfrac{2023}{2} \notin \mathbb{N}$. Znači, n nije prirodan broj pa 2020 nije član niza

d) Graf niza je skup uređenih parova $(n, 2n - 3)$ (na slici desno su označeni bojom). Te točke leže na pravcu $y = 2x - 3$.



Ponekad se niz grafički prikazuje na pravcu. Zapravo, tada na brojevnom pravcu crtamo članove niza, tj. vrijednosti funkcije



U prethodnom primjeru niz je zadan formulom, kao što je i uobičajeno pri zadavanju funkcija.

Opišimo još jedan način zadavanja nizova: **rekurzivni**.

U takvom načinu definiranja niza svaki se član niza određuje pomoću jednog ili više prethodnih članova. Evo nekoliko rekurzivno zadanih nizova:

Opis rekurzivno zadanih nizova	Rekurzivna formula
član niza jednak je dvostrukom prethodnom članu niza, pri čemu je prvi član niza 17	$a_n = 2a_{n-1}$, $n \geqslant 2$, $a_1 = 17$
član niza jednak je zbroju prethodna dva člana niza, pri čemu su prva dva člana niza 1 i 1	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geqslant 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$
član niza jednak je produktu triju prethodnih članova, pri čemu su prva tri člana niza 2, 3, 5	$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-3}$, $n \geqslant 4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$

Nedostatak rekurzivo zadanih nizova jest u tome da želimo li odrediti n-ti član niza, trebamo poznavati sve prethodne članove.

Primjerice želimo li odrediti sedmi član drugog niza, koji se naziva Fibonaccijev niz, trebamo poznavati vrijednost šestog i petog člana jer je $a_7 = a_6 + a_5$. Za a_6 i a_5 trebamo vrijednost a_4 i a_3 jer je $a_6 = a_5 + a_4$, $a_5 = a_4 + a_3$. I konačno, a_3 dobivamo pomoću a_1 i a_2. Slijedi,

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_1 + a_2 = 2\\
a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3\\
a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5\\
a_6 &= a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8\\
a_7 &= a_6 + a_5 = 8 + 5 = 13.
\end{aligned}$$

Račun bi bio mnogo jednostavniji da smo poznavali formulu za n-ti član niza koja ovisi samo o n, a ne o prethodnim članovima, tj. da smo poznavali formulu za opći član niza.

Određivanje formule za opći član niza može biti složen problem. Obično na temelju nekoliko prvih članova niza postavljamo hipotezu kako bi ta formula mogla izgledati, a potom ju dokazujemo.

PRIMJER 2.

Odredimo opću formulu niza zadanog sljedećom rekurzijom:

$$a_{n+1} = 3a_n - 4, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_1 = 5.$$

Odredimo nekoliko prvih članova niza i u njima tražimo pravilnost

$$\begin{aligned}
a_2 &= 3a_1 - 4 = 3 \cdot 5 - 4 = 11\\
a_3 &= 3 \cdot a_2 - 4 = 3 \cdot 11 - 4 = 29\\
a_4 &= 3 \cdot 29 - 4 = 87 - 4 = 83\\
a_5 &= 3 \cdot 83 - 4 = 249 - 4 = 245\\
a_6 &= 3 \cdot 245 - 4 = 735 - 4 = 731.
\end{aligned}$$

Uočavamo:

$$\begin{aligned}
11 &= 3^2 + 2\\
29 &= 3^3 + 2\\
83 &= 3^4 + 2\\
245 &= 3^5 + 2\\
731 &= 3^6 + 2.
\end{aligned}$$

Postavljamo hipotezu da je $a_n = 3^n + 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Dokažimo tu tvrdnju.

$$3 \cdot a_n - 4 = 3 \cdot (3^n + 2) - 4 = 3 \cdot 3^n + 6 - 4 = 3^{n+1} + 2 = a_{n+1}.$$

Dakle, za niz (a_n), gdje je $a_n = 3^n + 2$ vrijedi $a_{n+1} = 3a_n - 4$ što je upravo zadana rekurzija.

ZADATCI 1.1.

1. Napiši šest početnih članova niza (a_n) ako je

a $a_n = 17n + 1$ **b** $a_n = n^2 - 1$ **c** $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}$ **d** $a_n = \log 2n$.

2. Napiši n-ti član niza (a_n) ako je

a $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$, $n = 23$ **b** $a_n = |n - n^2|$, $n = 4$

c $a_n = \sin\dfrac{\pi n}{3}$, $n = 11$ **d** $a_n = \sqrt{2+n} - \sqrt{n}$, $n = 9$.

3. Grafički prikaži niz (a_n) ako je

a $a_n = 2n - 3$ **b** $a_n = n^2 - n$ **c** $a_n = 2^n - 1$.

4. Ispiši prva 4 člana niza (a_n) ako je

a $a_n = \begin{cases} n^2 - 2n: & n \text{ paran} \\ \sqrt{n+4}: & n \text{ neparan} \end{cases}$ **b** $a_n = \begin{cases} \sin n\pi: & n = 3k \\ \cos n\pi: & n = 3k+1 \\ \operatorname{tg} n\pi: & n = 3k+2, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$.

5. Zaokruži brojeve koji su članovi niza $a_n = n(n+1)$.

a 7 **b** 2 **c** -3 **d** 110

6. Napiši prva 4 člana niza (a_n) ako je

a $a_{n+1} = a_n - 1$, $a_1 = 6$ **b** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$, $a_1 = 2$

c $a_{n+1} = \dfrac{a_{n-1} + a_n}{3}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ **d** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$.

7. U nizu (a_n) je $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{5}a_n + 2n$ za $n \geqslant 1$. Koji od ponuđenih odgovora je peti član niza (a_n)?

a $\dfrac{173}{25}$ **b** $\dfrac{1152}{2021}$ **c** $\dfrac{25}{5}$ **d** $\dfrac{1173}{125}$

8. Ako je $a_n = 14n + 11$, dokaži da je tada rekurzivna formula tog niza $a_{n+1} = a_n + 14$, $a_1 = 35$.

9. Pronađi rekurzivnu formulu niza (a_n) ako je $a_n = 7 \cdot 5^n$.

10. Koja od ponuđenih rekurzivnih formula vrijedi za niz (a_n) gdje je $a_n = 15n - 1$?

a $a_{n+1} = a_n - 1$ **b** $a_{n+1} = a_n + 15$ **c** $a_{n+1} = 15a_n - 1$ **d** $a_{n+1} = 15 - a_n$

11. Koju od danih rekurzija zadovoljavaju članovi niza (a_n) gdje je $a_n = (2n-1)^2$?

a $a_{n+1} = (2a_n)^2$ **b** $a_n = a_{n-1} - 1$ **c** $a_{n+1} = a_n + 8n$ **d** $a_n = (a_{n-1} - 1)^2$

12. Spoji opći član niza (a_n) i rekurzivnu formulu tog niza

a	$a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$	**1**	$a_n = 5 \cdot 3^{-n}$
b	$a_{n+1} = 2a_n + 3$	**2**	$a_n = 2 \cdot 2^n - 3$
c	$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n$	**3**	$a_n = 2^n$
d	$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$	**4**	$a_n = \dfrac{n}{n+1}$

13. Pronađi formulu za opći član niza (a_n) koji je zadan rekurzivnom relacijom: $a_{n+1} = 2a_n$, $a_1 = 1$.

14. Pronađi formulu za opći član niza (a_n) koji je zadan rekurzivnom relacijom: $a_n = \dfrac{1}{2}a_{n-1}$, $n \geqslant 2$, $a_1 = 7$.

15. Ako je $a_1 = \dfrac{2}{3}$ i $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n}$ odredi formulu za a_n.

1.2. Aritmetički niz

U sljedećim poglavljima promatrat ćemo dva posebna niza: aritmetički i geometrijski niz.

Aritmetički niz

Neka je d zadani realni broj. Niz (a_n) zadan rekurzivnom formulom

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \geqslant 1, \quad a_1 \in \mathbb{R}$$

naziva se **aritmetički niz**. Broj d naziva se **razlika** ili **diferencija** niza.

PRIMJER 1.

Neka je $d = 5$ i $a_1 = 4$. Napišimo prvih 6 članova tog niza.

$a_1 = 4$. Tada je

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 5 = 4 + 5 = 9 \\ a_3 &= a_2 + 5 = 9 + 5 = 14 \\ a_4 &= 14 + 5 = 19 \\ a_5 &= 19 + 5 = 24 \\ a_6 &= 24 + 5 = 29. \end{aligned}$$

Uočimo da je (a_n) rastući niz, svaki sljedeći član je za 5 veći od prethodnog člana.

Pogledaj animaciju...
ele-udzbenik.hr

Odredimo opći član aritmetičkog niza. Napišimo rekurzivne jednakosti za članove od a_2 do a_n i zbrojimo sve te jednakosti. Nakon dokidanja brojeva $a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$ koji se pojavljuju i na lijevoj i na desnoj strani, na lijevoj strani ostaje broj a_n, a na desnoj strani a_1 i pribrojnik d $(n-1)$ puta.

$$\left.\begin{aligned} \cancel{a_2} &= a_1 + d \\ \cancel{a_3} &= \cancel{a_2} + d \\ \cancel{a_4} &= \cancel{a_3} + d \\ &\vdots \\ \cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} + d \\ a_n &= \cancel{a_{n-1}} + d \end{aligned}\right\} +$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Znači, $a_n = a_1 + (n-1)d$ i to je formula za $n-$ti član aritmetičkog niza iskazana pomoću prvog člana a_1 i razlike d.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

PRIMJER 2.

Zadan je aritmetički niz (a_n) formulom $a_n = 7n - 2$. Odredimo a_1 i d.

Uvrstimo li $n = 1$ u pravilo, dobivamo

$$a_1 = 7 \cdot 1 - 2 = 5.$$

Svaka dva uzastopna člana aritmetičkog niza razlikuju se za d, pa ćemo d odrediti iz $d = a_2 - a_1$. Budući da je $a_2 = 7 \cdot 2 - 2 = 12$ slijedi da je

$$d = 12 - 5 = 7.$$

PRIMJER 3.

Izračunajmo prvi član a_1 i razliku d aritmetičkog niza ako je $a_{151} = 607$ i $a_{2021} = 8087$.

Upotrijebit ćemo formule za članove a_{151} i a_{2021}.

$$a_{151} = a_1 + 150d, \quad a_{2021} = a_1 + 2020d.$$

Uvrstimo li poznate članove dobivamo sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama a_1 i d:

$$\begin{aligned} 607 &= a_1 + 150d \\ 8087 &= a_1 + 2020d. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo: $a_1 = 7$, $d = 4$.

PRIMJER 4.

Dokažimo da za aritmetički niz (a_n) vrijedi

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n \geqslant 2.$$

Ovo nam svojstvo pokazuje da je $n-$ ti član aritmetičkog niza (za $n \geqslant 2$) jednak aritmetičkoj sredini njegovog prethodnika i sljedbenika. Upravo zbog ovog svojstva aritmetički niz je i dobio svoj naziv. Dokažimo to svojstvo.

Prema rekurzivnoj formuli vrijedi: $a_{n+1} = a_n + d$.

Iz formule $a_n = a_{n-1} + d$ slijedi $a_{n-1} = a_n - d$. Sad imamo

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n,$$

a to je upravo trebalo dokazati.

Zbroj prvih n članova

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak je

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right).$$

Dokaz. Prvo izračunajmo zbroj prvih $(n-1)$ prirodnih brojeva: $1+2+3+\ldots+(n-1)$. Napišimo taj zbroj na dva načina:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1)$$
$$S = (n-1) + (n+2) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Zbrojimo te dvije jednakosti:

$$2S = \underbrace{n + n + n + \ldots + n + n + n}_{n-1 \text{ pribrojnik}} = (n-1)n$$

$$S = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ovo je formula za zbroj prvih $n-1$ prirodnih brojeva

U izraz za zbroj S_n uvrstimo formule za $a_2, a_3, \ldots, a_n$ i dobivamo:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\ &= n \cdot a_1 + d(1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)). \end{aligned}$$

Iskoristimo formulu za prvih $n-1$ prirodnih brojeva i dobivamo

$$S_n = na_1 + \frac{d(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Uočimo da se S_n može zapisati i ovako:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + (a_1 + (n-1)d)) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

i to je druga formula za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza. ◄

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{ili} \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

PRIMJER 5.

Zbroj prvih 40 početnih članova aritmetičkog niza je 1000, a zbroj sljedećih 40 članova niza je $-15\,000$. Koliki su a_1 i d?

► Zadano je: $S_{40} = 1000$, $a_{41} + \ldots + a_{80} = -15\,000$. Zbroj $a_{41} + \ldots + a_{80}$ možemo zapisati kao $S_{80} - S_{40}$ pa imamo: $S_{80} - S_{40} = -15\,000$, tj. $S_{80} = -15\,000 + S_{40} = -14\,000$.

Korištenjem formule za S_n dobivamo ovaj sustav:

$$1000 = \frac{40}{2}(2a_1 + 39d)$$

$$-14\,000 = \frac{80}{2}(2a_1 + 79d)$$

odakle dobivamo: $d = -10$, $a_1 = 220$.

ZADATCI 1.2.

1. Napiši prva četiri člana aritmetičkog niza ako je

a $a_1 = 2$, $d = 4$ **b** $a_1 = 3$, $d = -2$ **c** $a_1 = 2.5$, $d = 0.5$.

2. Zaokruži brojeve koji su članovi aritmetičkog niza $a_n = 4n + 5$.

a 45 **b** 10 **c** 405 **d** -35

3. Odredi opći član aritmetičkog niza ako je zadana razlika d i prvi član:

a $a_1 = -2$, $d = 3$ **b** $a_1 = 5$, $d = -8$ **c** $a_1 = 12$, $d = \frac{1}{2}$.

4. Spoji opći član aritmetičkog niza s njegovom razlikom.

a $a_n = 4n + 18$ **b** $a_n = 5 - 2n$ **c** $a_n = 0.5n - 4.3$ **d** $a_n = 2n - 2.5$

1 $d = -2$ **2** $d = 4$ **3** $d = 0.5$ **4** 2

5. Uz niz koji je aritmetički zaokruži T, a uz onaj koji nije zaokruži N.

a $a_n = 1.7n - 2$ T N **b** $b_n = n - n^2$ T N

c $c_n = \frac{8 - 3n}{5}$ T N **d** $d_n = \log(2n - 5)$ T N

6. Koji član u aritmetičkom nizu $25, 21, 17, \ldots$ prvi ima negativan predznak?

a -7 **b** -2 **c** -1 **d** -3

7. Na kojem je mjestu prvi pozitivni član aritmetičkog niza $-110, -80, -50, \ldots$?

a 3. **b** 4. **c** 5. **d** 6.

8. Odredi a_{201} ako je $a_3 = 4$ i $d = 3$.

9. Izračunaj prvi član a_1 i razliku aritmetičkog niza ako je

a $a_{12} = -85$, $a_{16} = -117$ **b** $a_{53} = 118$, $a_{100} = 212$

c $a_{21} = -8$, $a_{15} = -2$ **d** $a_{100} = 41$, $a_{200} = 91$.

10. Odredi opći član aritmetičkog niza (a_n) ako je

a $a_2 = -5$, $a_3 + a_8 = -66$ **b** $a_5 + a_{10} = 28$, $2a_1 + 4a_{11} = 86$

c $a_9 - a_{11} = 8$, $a_{21} - a_{24} = 12$ **d** $a_5 \cdot a_4 = 132$, $a_8 + a_9 = 31$.

11. Uz ona tri broja koja su tri uzastopna člana aritmetičkog niza zaokruži T, u suprotnom zaokruži N.

a $18, 25, 32$ T N **b** $\log 40, \log 400, \log 4000$ T N

c $\sqrt{5}, \sqrt{14}, \sqrt{23}$ T N **d** $2^{31}, 2^{32}, 2^{33}$ T N

12. Odredi one realne brojeve x za koje su dana tri broja tri uzastipna člana aritmetičkog niza, ako je:

a $x + 1$, x^2, $x + 11$ **b** $2x + 1$, $x^2 - 1$, $5x + 1$.

13. Izračunaj zbroj prvih n članova aritmetičkog niza ako je

a $a_1 = 2$, $d = 1.5$, $n = 10$ **b** $a_1 = 9$, $d = -3$, $n = 90$

c $a_1 = 0$, $d = 2$, $n = 20$ **d** $a_1 = 1$, $d = 4$, $n = 100$.

14. Odredi o kojem se aritmetičkom nizu radi u zbroju $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$ te dokaži da je $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

15. Izračunaj zbroj prvih n članova aritmetičkog niza ako je

a $a_5 = 2$, $a_{40} = 142$, $n = 10$ **b** $a_4 + a_9 = 26$, $a_{11} - a_3 = 16$, $n = 20$

c $a_4 + a_8 = 42$, $a_5 \cdot a_6 = 357$, $n = 15$ **d** $a_4 : a_7 = 5 : 11$, $a_4 \cdot a_8 = 1040$, $n = 30$.

16. Ako je zbroj prvih n članova aritmetičkog niza 1030, $a_1 = 4$ i $d = 5$, koliki je n?

17. Zbroj prvih 15 članova aritmetičkog niza je 180, $a_1 = 40$. Koliki je zbroj drugog i sedmog člana niza?

a -4 **b** 52 **c** 24 **d** 60

18. Spoji jednadžbu s njezinim rješenjem.

a $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = 169$ **1** 20

b $2^{-5-1+\ldots+(4n-9)} = 16$ **2** 10

c $4 + 7 + 10 + \ldots + (3n + 1) = 175$ **3** 4

d $(n - 2) + (n - 4) + \ldots + (n - 40) = -20$ **4** 13

1.3. Geometrijski niz

Geometrijski niz

Neka je q zadani realni broj, $q \neq 0$. Niz (a_n) zadan rekurzivnom relacijom

$$a_{n+1} = qa_n, \quad n \geqslant 1, \quad a_1 \in \mathbb{R}$$

naziva se **geometrijski niz**. Broj q naziva se **kvocijent** ili **količnik** geometrijskog niza.

PRIMJER 1.

Neka je $q = 2$ i $a_1 = 5$. Napišimo prva 4 člana geometrijskog niza (a_n).

$a_1 = 5$ pa je

$$\begin{aligned} a_2 &= qa_1 = 2 \cdot 5 = 10 \\ a_3 &= qa_2 = 2 \cdot 10 = 20 \\ a_4 &= qa_3 = 2 \cdot 20 = 40. \end{aligned}$$

Uočimo da je

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = q,$$

tj. kvocijent dva uzastopna člana geometrijskog niza jednak je q.

Pogledaj animaciju...
ele-udzbenik.hr

Kao što smo radili kod aritmetičkog niza, i ovdje ćemo odrediti opći član geometrijskog niza.

Pretpostavimo da je $a_1 \neq 0$, te napišimo pomoću rekurzije članove $a_2, \ldots, a_n$. Pomnožimo li sve te jednakosti dobit ćemo s lijeve strane produkt $a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$, a s desne strane $q^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$. Nakon skraćivanja preostaje $a_n = q^{n-1} a_1$ i to je formula za $n-$ti član geometrijskog niza.

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= qa_1 \\ a_3 &= qa_2 \\ a_4 &= qa_3 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= qa_{n-2} \\ a_n &= qa_{n-1} \end{aligned}\right\} .$$

$$\begin{aligned} \cancel{a_2}\ \cancel{a_3} \ldots \cancel{a_{n-1}} a_n &= q^{n-1} a_1\ \cancel{a_2}\ \cancel{a_3} \ldots \cancel{a_{n-1}} \\ a_n &= q^{n-1} a_1 \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$