# 1.

# Školsko (gradsko) natjecanje

Školsko natjecanje prva je razina natjecanja iz matematike za koju zadatke sastavlja Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Školska natjecanja održana su diljem Hrvatske u četvrtak 27. siječnja 2014.

Svi učenici rješavali su po sedam zadataka. Prvih pet su lakši i bodovali su se sa 6 bodova svaki, a zadnja dva su teža i svaki je vrijedio 10 bodova. Za učenike osnovnih škola natjecanje je trajalo dva sata, a za učenike srednjih škola tri sata.

## ZADACI

## Osnovna škola

### 4. razred

**4.1.** Izračunaj: $3 \cdot (57 \cdot 10 + 10 \cdot 43) + 13 - 3 \cdot 333 =$.

**4.2.** Umjesto zvjezdica upiši odgovarajuće znamenke tako da račun bude točan

$$*4* \cdot 15 = 3*9*.$$

**4.3.** Na livadi je izraslo 53 žuta, 58 crvenih i 89 plavih cvjetova, a na svakom je cvijetu po 11 listova. Svaki žuti cvijet ima 8, svaki crveni 9, a svaki plavi 12 latica. Koliko je ukupno listova, a koliko latica na svim cvjetovima?

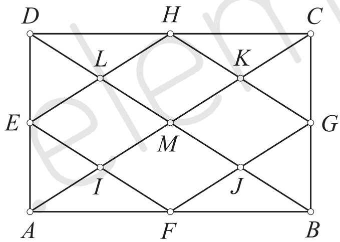

www.element.hr

**4.4.** Stolar je izrađivao stolice. Neke su imale 3, a neke 4 noge. Ukupno je izradio 45 stolica. Njegova kći izbrojala je na njima 159 nogu. Koliko je bilo stolica s 3, a koliko s 4 noge?

**4.5.** Napiši sve četveroznamenkaste brojeve kojima je zbroj znamenaka jednak 3.

**4.6.** Ako učenik kupi 5 bilježnica, ostat će mu 20 kn, a ako ih kupi 8, nedostajat će mu 16 kn. Koliko je kuna učenik imao?

**4.7.** Koliko na slici ima trokuta? Ispiši ih!




## 5. razred

**5.1.** Izračunaj: $[(1 + 2 + 3 + \ldots + 54) : 3] : (3 \cdot 3 : 3 \cdot 3) =$.

**5.2.** Oko Zemlje kruže 3 satelita. Prvi ju obiđe za 75, drugi za 105, a treći za 135 minuta. Koliko im je vremena potrebno, računajući od trenutka u kojemu su se sva 3 istovremeno našla iznad Južnog pola, da se opet svi susretnu na istom tom položaju? Rezultat iskaži u danima, satima i minutama.

**5.3.** Razliku najvećeg i najmanjeg peteroznamenkastog broja s različitim znamenkama koji su djeljivi brojem 15 zaokruži na najbližu deseticu.

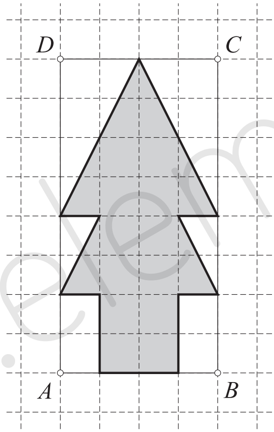
**5.4.** Andrija je posudio 54 kune svojim prijateljima. Marku je posudio deset kuna više nego Ivanu, a Goranu je posudio dva puta više nego Marku. Koliko je novaca posudio svakom od prijatelja?

**5.5.** U magičnom je kvadratu zbroj svih brojeva u svakom retku, stupcu i dijagonali jednak. Prikazani lik je magični kvadrat u kojemu nedostaje 5 brojeva na poljima $A$, $B$, $C$, $D$ i $E$.

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 3 | $A$ |
| $C$ | 10 | $D$ |
| $B$ | $E$ | 4 |

Koliki je zbroj brojeva na poljima $A$, $B$, $C$ i $E$?

**5.6.** Josip je u bilježnici unutar pravokutnika $ABCD$ nacrtao geometrijski lik koji sliči na drvo bora. Izračunaj površinu tog lika ako je razmak između crta u Josipovoj bilježnici 5 milimetara.




**5.7.** Koji se troznamenkasti broj poveća 26 puta kada mu slijeva dopišemo znamenku 3?

### 6. razred

**6.1.** Izračunaj: $\left(0.25 + 1\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot 2\frac{11}{12}\right) : 10 = .$

**6.2.** Odredi četvrti i peti član niza $\frac{8}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$.

**6.3.** U nekom trokutu $ABC$ vrijedi $|AB| = |AC|$. Ako je $\alpha + \gamma = 117^\circ$, izračunaj veličine svih unutarnjih kutova tog trokuta.

**6.4.** U jednakosti $a + b = c + d = e + f$ slova označavaju različite proste brojeve manje od 20. Odredi barem jednu šestorku $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$.

**6.5.** Zadan je trokut $ABC$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka $E$, a na stranici $\overline{AB}$ točka $D$ tako da je $|\sphericalangle CEA| = |\sphericalangle DEB|$. Ako je točka $F$ na dužini $\overline{AE}$ takva da je $DF \parallel BC$, tada je $\triangle DEF$ jednakokračan. Dokaži.

**6.6.** Nacrtaj dužinu $\overline{AB}$. Konstruiraj kružnicu kojoj je dužina $\overline{AB}$ promjer. Odaberi bilo koju točku $T$ na konstruiranoj kružnici, različitu od $A$ i $B$. Odredi veličinu kuta $\sphericalangle ATB$.

**6.7.** Napiši sve prirodne brojeve koji su manji od 2014, pri čemu je umnožak znamenaka svakog tog broja 42.

## 7. razred

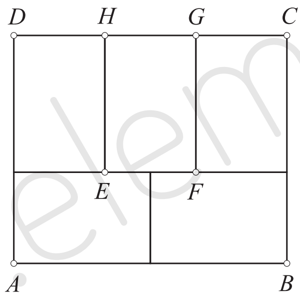
**7.1.** Prvoga dana Petra je pročitala $\frac{1}{10}$ knjige, drugoga dana $\frac{1}{6}$ ostatka, trećega dana $\frac{1}{3}$ novoga ostatka, a četvrtog dana preostalih 105 stranica. Koliko stranica ima ta knjiga?

**7.2.** Na natjecanje iz matematike doputovale su učenice, učenici i njihovi učitelji. Uz svaka 4 dječaka došlo je 6 djevojčica, a uz svakih 18 djevojčica došao je po jedan učitelj. Na natjecanje je pristiglo ukupno 620 osoba. Koliko je na to natjecanje doputovalo dječaka, koliko djevojčica, a koliko učitelja?

**7.3.** Na završnoj utakmici jednog sportskog natjecanja bilo je u gledalištu 450 muškaraca više nego žena. Koliko je bilo ukupno gledatelja ako je broj svih muškaraca 65% od ukupnog broja gledatelja?

**7.4.** U jednoj osnovnoj školi u petak su izmjerene visine svih prisutnih učenika jednog razrednog odjela 7. razreda. Utvrđeno je da njihova prosječna visina iznosi 164 cm. Tog dana na nastavi nije bilo dviju učenica, Maje i Paule. Maja je visoka 160 cm, a Paula 162 cm. Uzme li se u obzir i njihova visina, prosječna visina svih učenika tog razrednog odjela iznosi 163.8 cm. Odredi ukupni broj učenika u tom razrednom odjelu.

**7.5.** Zadan je pravokutnik $ABCD$ čija je površina $750\ \text{cm}^2$. Pravokutnik $ABCD$ je podijeljen na pet sukladnih pravokutnika (vidi sliku).




Pravokutnik $ABCD$ smjestite u I. kvadrant pravokutnog koordinatnog sustava tako da je točka $A$ u ishodištu, a točka $B$ na osi apscisa. Odredite koordinate vrhova pravokutnika $EFGH$.

**7.6.** Izračunaj površinu kvadrata $CDEF$ upisanog u pravokutni trokut $ABC$ čije katete imaju duljine $|AC| = 9$ cm i $|BC| = 6$ cm.

**7.7.** Simetričan novčić baca se za redom 5 puta i zapisuje se je li palo pismo ili glava (npr. PGPGP). Kolika je vjerojatnost da je barem tri puta za redom pala glava?

## 8. razred

**8.1.** Racionaliziraj nazivnik razlomka $\dfrac{3}{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

**8.2.** Riješi jednadžbu

$$\left(2\frac{3}{4}\cdot 3\frac{2}{3}\right) : x = \left(\frac{11}{4}-\frac{11}{3}\right) : \frac{3}{2}.$$

**8.3.** Koja je vrijednost znamenke na mjestu jedinica broja $1+9^{2014}$?

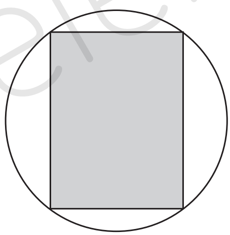
**8.4.** Riješi jednadžbu

$$6(x-1)(x+2)-4(x-3)(x+4)=2(x-5)(x-6).$$

**8.5.** Površine dvaju sličnih trokuta odnose se kao $16:9$. Duljina jedne stranice manjeg trokuta iznosi 12 cm, a duljina visine na tu stranicu 15 cm. Izračunaj površinu i duljinu odgovarajuće stranice većeg trokuta.

**8.6.** Ako je $x+y=0$ i $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$, odredi koliko je $x^4+y^4$?

**8.7.** Pravokutniku je opisana kružnica. Duljine susjednih stranica pravokutnika odnose se kao $4:3$. Površina pravokutnika iznosi $108\ \text{cm}^2$. Izračunaj površinu neosjenčanog dijela kruga.



## Srednja škola — A varijanta

### 1. razred

**1.1.** Dokaži da je broj $2012^9 + 2016^9$ djeljiv s 2014.

**1.2.** Pravilni šesterokut i jednakostranični trokut imaju isti opseg. Koliki je omjer njihovih površina?

**1.3.** U kutiji se nalazi po $k$ loptica s oznakom $k$ za sve $k = 1, 2, \ldots, 50$ (dakle jedna loptica s oznakom 1, dvije loptice s oznakom 2, ..., 50 loptica s oznakom 50). Iz kutije se izvlače loptice bez gledanja. Koliko je najmanje loptica potrebno izvući da bismo bili sigurni da je izvučeno barem 10 loptica s istom oznakom?

**1.4.** Neka su $a$ i $b$ različiti realni brojevi i neka je $s = a - b$ i $t = a^3 - b^3$. Izrazi $(a+b)^2$ pomoću $s$ i $t$.

**1.5.** Koliko ima četveroznamenkastih brojeva koji su sastavljeni od međusobno različitih znamenaka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i djeljivi su s 5?

**1.6.** Odredi sve prirodne brojeve $n$ takve da je

$$3^{2n+1} - 4^{n+1} + 6^n$$

prost broj.

**1.7.** Neka je $ABC$ trokut u kojem je najdulja stranica $\overline{BC}$, a kut $\sphericalangle BCA$ tri puta veći od kuta $\sphericalangle ABC$. Simetrala vanjskog kuta kod vrha $A$ siječe pravac $BC$ u točki $A_0$, a simetrala vanjskog kuta kod vrha $B$ siječe pravac $AC$ u točki $B_0$. Ako je $|AA_0| = |BB_0|$, odredi kutove danog trokuta.

### 2. razred

**2.1.** Učenici su odlučili igrati igru s ukupno 960 žetona. Najprije su podijelili sve žetone tako da svatko od njih ima isti broj žetona. Čim su to napravili, stigao je njihov nastavnik te se poželio priključiti igri. Svaki učenik mu je dao po 4 žetona, pa su svi imali jednak broj žetona i bili su spremni za početak igre. Koliko učenika sudjeluje u igri?

**2.2.** Odredi sve kompleksne brojeve $z$ za koje vrijedi

$$\left|z^2 - i\right| = 1 \quad \text{i} \quad |z| = \sqrt{2}.$$

**2.3.** Neka su $a$, $b$ i $c$ cijeli brojevi i $a \neq 0$. Može li diskriminanta kvadratne funkcije

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

biti jednaka 51?

**2.4.** Vrhovi peterokuta $ABCDE$ leže na istoj kružnici. Ako je $\sphericalangle CAD = 50^\circ$, odredi

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle AED.$$

**2.5.** Neka je $A$ broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 105, a $B$ broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 147. Odredi omjer $A : B$.

**2.6.** U trokut $ABC$ upisan je romb $AKLM$ tako da točka $K$ leži na $\overline{AB}$, točka $L$ na $\overline{BC}$, a točka $M$ na $\overline{CA}$. Ako je duljina stranice tog romba $2\sqrt{2}$, površina trokuta $LMC$ iznosi 3, a površina trokuta $KLB$ iznosi 4, dokaži da je $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

**2.7.** Neka je $a$ prirodni broj te $b$ i $c$ cijeli brojevi, takvi da jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva različita rješenja u intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right]$. Dokaži da je $a \geqslant 6$.

## 3. razred

**3.1.** Kolika je najmanja, a kolika najveća vrijednost koju postiže funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \cos^2 x + \sin x$?

**3.2.** Dokaži da je

$$\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log_2\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ldots + \log_2\left(1+\frac{1}{k}\right) + \ldots + \log_2\left(1+\frac{1}{2014}\right) < 11.$$

**3.3.** U trokutu $ABC$ vrijedi $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$. Dokaži da je $|AC| < 2|BC|$.

**3.4.** Ako su $p$ i $p^2+8$ prosti brojevi, dokaži da je i broj $p^3+4$ prost.

**3.5.** Šahovska ploča je ploča s 8 redaka i 8 stupaca čija su polja obojana naizmjence crno-bijelo tako da je polje u prvom retku i prvom stupcu obojano crno. U svako polje šahovske ploče upisan je po jedan cijeli broj. Poznato je da je zbroj svih brojeva na bijelim poljima jednak 26, a zbroj svih brojeva u neparnim stupcima jednak 43. Ako promijenimo predznake svih brojeva na bijelim poljima, koliki će biti zbroj svih brojeva u neparnim redcima nakon te promjene?

**3.6.** Dan je pravokutni trokut $ABC$. Na simetrali pravog kuta $\sphericalangle ACB$ odabrana je točka $M$. Ako vrijedi $\sin\sphericalangle MAC = \frac{8}{17}$ i $\cos\sphericalangle MBC = \frac{3}{5}$, odredi omjer $|AB| : |CM|$.

**3.7.** Dokaži da među bilo kojih sedam kvadrata prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika djeljiva s 20.

## 4. razred

**4.1.** Nikola je zamislio pet brojeva. Prvi broj koji je zamislio je $-2$, a peti je 6. Prva četiri broja su uzastopni članovi aritmetičkog niza, a zadnja tri su uzastopni članovi geometrijskog niza. Koje je brojeve Nikola zamislio?

**4.2.** Dokaži da za svaki prirodni broj $n$ vrijedi

$$\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} < \sqrt{n}+1.$$

**4.3.** Za realni broj $a$, neka je $\mathcal{P}_a$ parabola s jednadžbom $y = x^2+ax+(2014-a)$. Dokaži da sve parabole $\mathcal{P}_a$ prolaze istom točkom.

**4.4.** Tamara je na ploču napisala paran prirodan broj. Nakon toga je, jednog za drugim, napisala još dvanaest brojeva tako da je svaki od njih za 5 veći od kvadrata prethodno napisanog broja. Odredi kojom znamenkom može završiti posljednji napisani broj.

**4.5.** Na ploči dimenzija $5 \times 7$ kojoj su sva polja bijela, potrebno je obojati točno 17 polja crnom bojom tako da nastali raspored crnih i bijelih polja na ploči bude centralnosimetričan, tj. da se ne mijenja rotacijom za $180^\circ$ oko središta ploče. Na koliko je načina to moguće napraviti?

**4.6.** Točkama $A$, $B$ i $C$ parabole povučene su tangente na nju. One se u parovima sijeku u točkama $K$, $L$ i $M$ tako da je $KL$ tangenta u točki $A$, $KM$ tangenta u točki $B$, a $LM$ tangenta u točki $C$. Presjek pravca $AC$ i paralele s osi parabole kroz točku $B$ je točka $N$. Dokaži da je četverokut $KLMN$ paralelogram.

**4.7.** Višnja je odlučila napisati na ploču sve prirodne brojeve od 1 do 2014 u nekom poretku. Višnjin brat Marijan će između svaka dva susjedna broja napisati apsolutnu vrijednost njihove razlike, a zatim sve početne brojeve obrisati. Ovaj postupak Marijan će ponavljati sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj. Odredi najveći mogući broj koji na kraju može ostati na ploči.