1 Realni brojevi

1.1. Matematička indukcija

Zadatak 1. Koristeći induktivni način razmišljanja, predvidi sljedeći član u svakom od nizova:

1) 1, 7, 13, 19, 25, ?;
2) 1, 3, 7, 13, 21, ?;
3) 1, 3, 7, 15, 31, ?;
4) 1, 4, 9, 16, 25, ?;
5) 1, 2, 5, 14, 41, ?;
6) 2, 3, 5, 7, 11, ?;
7) 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ?;
8) J, D, T, Č, P, ?.

Rješenje. **1)** $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 6$. Traženi član niza je $a_6 = 31$.
2) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$. Traženi član niza je broj $a_6 = 31$.
3) $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$. Traženi član niza je broj $a_6 = 63$.
4) $a_1 = 1$, $a_n = n^2$. Traženi član niza je broj $a_6 = 36$.
5) $a_1 = 1$, $a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 1$. Traženi član niza je broj $a_6 = 122$.
6) Niz se sastoji od prostih brojeva. Sljedeći prost broj je 13, dakle $a_6 = 13$.
7) 1.41424.
8) J – jedan, D – dva, T – tri, Č – četiri, P – pet, pa je sljedeći član niza Š – šest.

Zadatak 2. Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

1) $-3 + 3 + 9 + \ldots + (6n - 9) = 3n^2 - 6n$;
2) $-1 + 3 + 7 + \ldots + (4n - 5) = n(2n - 3)$;
3) $-3 - 7 - 11 - \ldots - (4n - 1) = -n(2n + 1)$;
4) $5 + 8 + 11 + \ldots + (3n + 2) = \frac{1}{2}n(3n + 7)$.

Rješenje. **1)** Dokazujemo indukcijom:

$$-3 + 3 + 9 + \ldots + (6n - 9) = 3n^2 - 6n.$$

Baza indukcije. Za $n = 1$ tvrdnja je očito točna: lijeva strana ima samo jedan pribrojnik, -3, a desna strana jednaka je $3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$.
Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da je tvrdnja točna i za $n = k$. Onda vrijedi jednakost

$$-3 + 3 + \ldots + (6k - 9) = 3k^2 - 6k.$$

Korak indukcije. Izračunajmo sada zbroj lijeve strane kojoj je dodan još jedan član:

$$-3 + 3 + \ldots + (6k - 9) + (6(k + 1) - 9).$$

Radi pretpostavke indukcije smijemo koristiti jednakost $-3 + 3 + \ldots + (6k - 9) = 3k^2 - 6k$ pa čitav zbroj iznosi

$$3k^2 - 6k + 6k + 6 - 9 = 3k^2 - 3 = 3(k + 1)^2 - 6(k + 1),$$

dakle, jednakost vrijedi i za broj $n = k + 1$.
Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

element.hr

2) Dokazujemo indukcijom:

$$-1+3+7+\ldots+(4n-5)=n(2n-3).$$

Baza indukcije. $n=1$:

$$-1=1(2\cdot 1-3).$$

Pretpostavka indukcije. Za $n=k$ vrijedi:

$$-1+3+7+\ldots+(4k-5)=k(2k-3).$$

Korak indukcije. Računamo lijevu stranu za $n=k+1$ i koristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}-1+3+7+\ldots+(4k-5)+[4(k+1)-5]&=k(2k-3)+[4k-1]\\&=2k^2-3k+4k-1\\&=2k^2+k-1\\&=(k+1)(2k-1)\\&=(k+1)[2(k+1)-3].\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

3) Dokazujemo indukcijom:

$$-3-7-11-\ldots-(4n-1)=-n(2n+1)$$

Baza indukcije. $n=1$:

$$-3=-1(2\cdot 1+1).$$

Pretpostavka indukcije. Za $n=k$ vrijedi:

$$-3-7-11-\ldots+(4k-1)=-k(2k+1).$$

Korak indukcije. Računamo lijevu stranu za $n=k+1$ i koristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}-3-7-11-\ldots-(4k-1)-[4(k+1)-1]&=-k(2k+1)-[4k+3]\\&=-2k^2-k-4k-3\\&=-(2k^2+5k+3)\\&=-(k+1)(2k+3)\\&=-(k+1)[2(k+1)+1].\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

4) Dokazujemo indukcijom:

$$5+8+11+\ldots+(3n+2)=\frac{1}{2}n(3n+7).$$

Baza indukcije. $n=1$:

$$5=\frac{1}{2}\cdot 1(3\cdot 1+7).$$

Pretpostavka indukcije. Za $n=k$ vrijedi:

$$5+8+11+\ldots+(3k+2)=\frac{1}{2}k(3k+7).$$

element.hr

Korak indukcije. Računamo lijevu stranu za $n = k+1$ i koristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}5+8+11+\ldots+(3k+2)+[3(k+1)+2] &= \frac{1}{2}k(3k+7)+[3k+5]\\ &= \frac{1}{2}\left[3k^2+7k+6k+10\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[3k^2+13k+10\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(k+1)(3k+10)\right]\\ &= \frac{1}{2}(k+1)[3(k+1)+10].\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Zadatak 3. Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

1) $2+7+15+\ldots+\frac{1}{2}n(3n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)^2$;

2) $-1+3-5+\ldots+(-1)^n(2n-1) = (-1)^n \cdot n$;

3) $3+6+12+\ldots+3\cdot 2^{n-1} = 3(2^n-1)$;

4) $2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^n = 10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}$.

Rješenje. **1)** Dokazujemo indukcijom:

$$2+7+15+\ldots+\frac{1}{2}n(3n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)^2.$$

Baza. $n = 1$:

$$2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)^2.$$

Pretpostavka. Za $n = k$ vrijedi:

$$2+7+15+\ldots+\frac{1}{2}k(3k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)^2.$$

Korak. Računamo lijevu stranu za $n = k+1$ i koristimo pretpostavku:

$$\begin{aligned}2+7+15+\ldots+\frac{1}{2}k(3k+1)+\frac{1}{2}(k+1)[3(k+1)+1] &\\ = \frac{1}{2}k(k+1)^2+\frac{1}{2}(k+1)[3(k+1)+1] &\\ = \frac{1}{2}(k+1)\left[k(k+1)+3(k+1)+1\right] &\\ = \frac{1}{2}(k+1)\left[k^2+k+3k+3+1\right] &\\ = \frac{1}{2}(k+1)\left[k^2+4k+4\right] &\\ = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)^2 &\\ = \frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]^2. &\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

element.hr

2) Dokazujemo indukcijom:

$$-1+3-5+\ldots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n\cdot n.$$

Baza. $n=1$:

$$-1=(-1)^1\cdot 1.$$

Pretpostavka. Za $n=k$ vrijedi:

$$-1+3-5+\ldots+(-1)^k(2k-1)=(-1)^k\cdot k.$$

Korak. Računamo lijevu stranu za $n=k+1$ i koristimo pretpostavku:

$$\begin{aligned}
-1+3-5+\ldots+(-1)^k(2k-1)+(-1)^{k+1}[2(k+1)-1]\\
&=(-1)^k\cdot k+(-1)^{k+1}[2(k+1)-1]\\
&=(-1)^k\cdot k+(-1)^{k+1}(2k+1)\\
&=(-1)^k[k-(2k+1)]\\
&=(-1)^k[-k-1]\\
&=-(-1)^k[k+1]\\
&=(-1)^{k+1}(k+1).
\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

3) Dokazujemo indukcijom:

$$3+6+12+\ldots+3\cdot 2^{n-1}=3(2^n-1).$$

Baza. $n=1$:

$$3=3(2^1-1).$$

Pretpostavka. Za $n=k$ vrijedi:

$$3+6+12+\ldots+3\cdot 2^{k-1}=3(2^k-1).$$

Korak. Računamo lijevu stranu za $n=k+1$ i koristimo pretpostavku:

$$\begin{aligned}
3+6+12+\ldots+3\cdot 2^{k-1}+3\cdot 2^k&=3(2^k-1)+3\cdot 2^k\\
&=3\cdot 2^k-3+3\cdot 2^k\\
&=6\cdot 2^k-3\\
&=3\cdot 2^{k+1}-3\\
&=3(2^{k+1}-1).
\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

4) Dokazujemo indukcijom:

$$2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^n=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}.$$

Baza. $n=1$:

$$2=10+(3\cdot 1-5)\cdot 2^{1+1}.$$

Pretpostavka. Za $n=k$ vrijedi:

$$2+16+56+\ldots+(3k-2)\cdot 2^k=10+(3k-5)\cdot 2^{k+1}.$$

element.hr

Korak. Računamo lijevu stranu za $n = k + 1$ i koristimo pretpostavku:

$$\begin{aligned}
2 + 16 + 56 + \ldots + (3k-2)\cdot 2^k + [3(k+1)-2]\cdot 2^{k+1} &= 10 + (3k-5)\cdot 2^{k+1} + [3(k+1)-2]\cdot 2^{k+1} \\
&= 10 + (3k-5)\cdot 2^{k+1} + [3k+1]\cdot 2^{k+1} \\
&= 10 + 2^{k+1}[3k-5+3k+1] \\
&= 10 + 2^{k+1}[6k-4] \\
&= 10 + 2^{k+2}[3k-2] \\
&= 10 + [3(k+1)-5]\cdot 2^{(k+1)+1}.
\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Zadatak 4. Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

1) $1\cdot 2^n + 2\cdot 2^{n-1} + 3\cdot 2^{n-2} + \ldots + n\cdot 2 + (n+1) = 2^{n+2} - (n+3)$;

2) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot n^2 = (-1)^{n-1}\cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$;

3) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \ldots + \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2n+3}{4\cdot 3^n}$.

Rješenje. **1)** Dokazujemo indukcijom:

$$1\cdot 2^n + 2\cdot 2^{n-1} + 3\cdot 2^{n-2} + \ldots + n\cdot 2 + (n+1) = 2^{n+2} - (n+3).$$

Baza. S lijeve strane nalazi se $n+1$ pribrojnik. Zato za $n = 1$ zbroj s lijeve strane ima dva člana, prvi i posljednji:

$$1\cdot 2^1 + (1+1) = 2^{1+2} - (1+3).$$

(Svejedno je hoćemo li uzeti formulu za drugi ili formulu za posljednji član i u nju staviti $n = 1$.)

Pretpostavka. Za $n = k$ vrijedi:

$$1\cdot 2^k + 2\cdot 2^{k-1} + 3\cdot 2^{k-2} + \ldots + k\cdot 2 + (k+1) = 2^{k+2} - (k+3).$$

Korak. Moramo dokazati tvrdnju za broj $n = k+1$. Tada lijeva strana jednakosti glasi:

$$1\cdot 2^{k+1} + 2\cdot 2^k + 3\cdot 2^{k-1} + \ldots + (k+1)\cdot 2 + (k+2).$$

Ovaj izraz možemo dovesti u vezu s onim iz pretpostavke indukcije. Dovoljno je iz svih članova osim posljednjeg izlučiti 2:

$$2\cdot\left[1\cdot 2^k + 2\cdot 2^{k-1} + 3\cdot 2^{k-2} + \ldots + (k+1)\right] + (k+2).$$

Izraz u zagradi iznosi, prema pretpostavci indukcije $2^{k+2} - (k+3)$. Dakle:

$$\begin{aligned}
2\cdot\left[1\cdot 2^k + 2\cdot 2^{k-1} + 3\cdot 2^{k-2} + \ldots + (k+1)\right] + (k+2) &= 2\cdot\left[2^{k+2} - (k+3)\right] + (k+2) \\
&= 2^{k+3} - 2(k+3) + k + 2 \\
&= 2^{k+3} - 2k - 6 + k + 2 \\
&= 2^{k+3} - k - 4 \\
&= 2^{(k+1)+2} - [(k+1)+3].
\end{aligned}$$

element.hr

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

2) Dokazujemo indukcijom:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Baza. $n = 1$:

$$1^2 = (-1)^{1-1} \cdot \frac{1(1+1)}{2}.$$

Pretpostavka. Za $n = k$ vrijedi:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{k-1} \cdot \frac{k(k+1)}{2}.$$

Korak. Računamo lijevu stranu za $n = k+1$ i koristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}
1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + &(-1)^{k-1} \cdot k^2 + (-1)^k \cdot (k+1)^2 \\
&= (-1)^{k-1} \cdot \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k \cdot (k+1)^2 \\
&= (-1)^{k-1} \cdot \frac{k+1}{2}\Big[k - 2(k+1)\Big] \\
&= (-1)^{k-1} \cdot \frac{k+1}{2}\Big[-k-2\Big] \\
&= (-1)^{k} \cdot \frac{k+1}{2}(k+2) \\
&= (-1)^{(k+1)-1} \cdot \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.
\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

3) Dokazujemo indukcijom:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

Baza. $n = 1$:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 1 + 3}{4 \cdot 3^1}.$$

Pretpostavka. Za $n = k$ vrijedi:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k}.$$

Korak. Računamo lijevu stranu za $n = k+1$ i koristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + &\frac{k}{3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{k+1}}\Big[3(2k+3) - 4(k+1)\Big] \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{k+1}}\Big[6k + 9 - 4k - 4\Big]
\end{aligned}$$

element.hr

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{k+1}}\left[2k+5\right]$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{2(k+1)+3}{4 \cdot 3^{k+1}}.$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Zadatak 5. Uvrsti nekoliko početnih vrijednosti za broj n i pokušaj odrediti izraz za sljedeće zbrojeve. Dobivenu formulu provjeri matematičkom indukcijom.

1) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = ?$

2) $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{n-1} = ?$

3) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = ?$

Rješenje. **1)** Početne vrijednosti ovog zbroja su

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad 1 \\ n = 2: &\quad 1 + 2 = 3 \\ n = 3: &\quad 1 + 2 + 4 = 7 \\ n = 4: &\quad 1 + 2 + 4 + 8 = 15 \\ n = 5: &\quad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 \end{aligned}$$

Prepoznajemo brojeve koji su za 1 manji od potencija broja 2. Zato je pretpostavka:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Bazu smo provjerili. Dokazujemo korak indukcije:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n &= 2^n - 1 + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

2) Početne vrijednosti ovog zbroja su

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad 1 \\ n = 2: &\quad 1 + 3 = 4 \\ n = 3: &\quad 1 + 3 + 9 = 13 \\ n = 4: &\quad 1 + 3 + 9 + 27 = 40 \\ n = 5: &\quad 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121 \end{aligned}$$

Niti nakon pet vrijednosti nismo sigurni u svoju pretpostavku. Zbrajali smo potencije broja 3, a u prethodnom primjeru (gdje je rezultat bio $2^n - 1$) bilo je riječi o potencijama broja 2. To nam daje ideju da je i ovdje riječ o izrazu povezanom s potencijama broja 3. Napišimo sad red tih potencija, umanjenih za jedan:

$$2, \quad 8, \quad 26, \quad 80, \quad 242.$$

Usporedbom s gore napisanim vrijednostima možemo otkriti pretpostavku indukcije:

$$1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

element.hr

Bazu smo provjerili. Dokazujemo korak indukcije:

$$\begin{aligned}1+3+9+27+\ldots+3^{n-1}+3^n &= \frac{1}{2}(3^n-1)+3^n\\ &= \frac{1}{2}\left[3^n-1+2\cdot 3^n\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[3\cdot 3^n-1\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[3^{n+1}-1\right].\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

3) Početne vrijednosti ovog zbroja su

$$\begin{aligned}n=2:&\quad \frac{1}{2}\\ n=3:&\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\\ n=4:&\quad \frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}\\ n=5:&\quad \frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Pretpostavka indukcije

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}$$

je provjerena za $n=2,3,4,5$. Dokazujemo korak indukcije:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{n-1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}\\ &= \frac{(n-1)(n+1)+1}{n(n+1)}\\ &= \frac{n^2-1+1}{n(n+1)}\\ &= \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Zadatak 6. Dokaži da za $x\neq 1$ (i $x\neq -1$ u trećem primjeru) i za svaki $n\in\mathbb{N}$ vrijedi:

1) $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$;

2) $x+2x^2+\ldots+nx^n=\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+n\cdot x^{n+2}}{(x-1)^2}$, za sve $n\in\mathbb{N}$;

3) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\ldots+\dfrac{2^n}{1+x^{2^n}}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

Rješenje. Dokazujemo indukcijom.

1) *Baza.* $n=1$:

$$1+x=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1.$$

element.hr

Pretpostavka. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Korak. Dokažimo da ona onda vrijedi i za broj $n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} &= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} \\ &= \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1} \\ &= \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}. \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

2) *Baza.* $n = 1$:

$$x = \frac{x - 2x^2 + x^3}{(x-1)^2};$$

$$x = \frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2}.$$

Pretpostavka. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n:

$$x + 2x^2 + \ldots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + n \cdot x^{n+2}}{(x-1)^2}.$$

Korak. Dokažimo da ona onda vrijedi i za broj $n + 1$:

$$\begin{aligned} & x + 2x^2 + \ldots + nx^n + (n+1)x^{n+1} \\ &= \frac{x - (n+1)x^{n+1} + n \cdot x^{n+2}}{(x-1)^2} + (n+1)x^{n+1} \\ &= \frac{x - (n+1)x^{n+1} + n \cdot x^{n+2} + (n+1)x^{n+1}(x-1)^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x - (n+1)x^{n+1} + n \cdot x^{n+2} + (n+1)x^{n+1}(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x + n \cdot x^{n+2} - 2(n+1)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x - (n+2)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

3) *Baza.* Zbroj s lijeve strane ima samo jedan član ako je $n = 0$, i tu vrijednost broja n uzimamo za bazu indukcije:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{1-x^2},$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{-1 - x + 2}{(1-x)(1+x)},$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1 - x}{(1-x)(1+x)},$$

što je istina.

element.hr