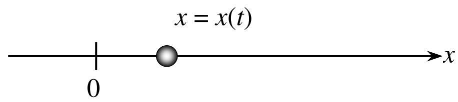
1. MEHANIKA

1. KINEMATIKA TRANSLACIJSKOG GIBANJA

🕮 Brzina

Giba li se tijelo duž x osi možemo njegovo gibanje tijekom vremena t zapisati pomoću jednadžbe:



Od trenutka t_1 do trenutka t_2, dakle u vremenskom intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$ tijelo se pomakne. Pomak tijela definiran je kao: $\Delta x = x_2 - x_1$, gdje je x_1 početni položaj tijela, a x_2 konačni položaj tijela. Srednja brzina tijela po pomaku definira se kao omjer pomaka i vremenskog intervala:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

To je vektorska veličina jer je $\vec{x}$ tzv. položajni vektor. U S.I. sustavu iskazuje se u metrima po sekundi (m/s ili drugačije zapisano: ms^{-1}). Trenutačna brzina tijela v dobije se kao granična vrijednost srednje brzine kada vremenski interval postaje sve manji te teži prema nuli što možemo zapisati kao:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Srednja brzina tijela po putu s (ako ga možemo odrediti) definira se kao omjer ukupnog prijeđenog puta i ukupnog vremena za koje je taj put prijeđen.

$$\overline{v} = \frac{\text{ukupni put}}{\text{ukupno vrijeme}}$$

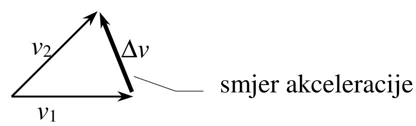
Srednja brzina po putu je skalarna veličina.

🕮 Akceleracija

Srednja akceleracija a je promjena brzine $\Delta v = v_2 - v_1$, u vremenskom intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$ u kojem se ta promjena dogodila. U SI sustavu iskazuje se u metrima po sekundi na kvadrat (m/s^2 ili ms^{-2}).

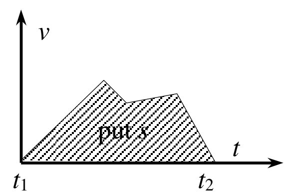
$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Smjer akceleracije je u smjeru *promjene* brzine: $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.

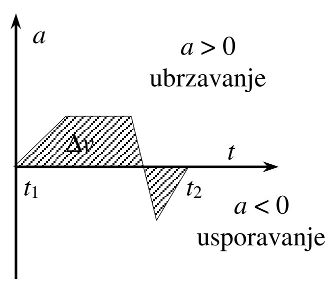


Tako možemo imati jednake brzine po iznosu ali različite po smjeru pa da postoji akceleracija što je ilustrirano crtežom.

Brzinu tijela možemo prikazati u grafu ovisnosti brzine v o vremenu t, tzv. v, t graf (crtež). Površina ispod krivulje u v, t grafu je prijeđeni put s u vremenu od t_1 do t_2.



Akceleraciju tijela možemo prikazati u grafu ovisnosti akceleracije a o vremenu t, tzv. a, t graf (crtež). Površina ispod krivulje u a, t grafu je promjena brzine tijela zbog akceleracije od t_1 do t_2.



🕮 Relativna brzina dvaju tijela:

$$\vec{v}_{\text{relativno}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

🕮 Jednoliko pravocrtno gibanje

Pravocrtno gibanje tijela duž x osi ako je brzina v konstantna i po smjeru i po veličini možemo zapisati kao:

$$\vec{v} = \text{konst.}$$

$$x = x_0 + v \cdot t$$

gdje je x_0 položaj tijela u trenutku $t = 0$. Poklapa li se pomak $x - x_0$ s putom s tada možemo zapisati:

$$s = s_0 + v \cdot t$$

🕮 Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje

Pravocrtno gibanje tijela duž x osi ako je akceleracija a konstantna i po smjeru i po veličini možemo predočiti jednadžbama:

$$\vec{a} = \text{konst.}$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)\, t$$

Poklapa li se pomak $x - x_0$ s putom s tada se oznaka $x - x_0$ može zamijeniti oznakom za put s pa dobivamo:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

$$s = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)\, t$$

🕮 Slobodni pad

Na Zemlji je akceleracija slobodnog pada $a \equiv g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ pa za slobodni pad možemo zapisati jednadžbe:

$$v = v_0 + g \cdot t$$

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gs$$

$$s = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)\, t$$

🕮 Složena gibanja

Složena gibanja su gibanja koja se sastoje od dva ili više jednostavnih koja se zbivaju *istodobno*. To znači, koliko vremena tijelo izvodi jedno gibanje isto toliko vremena tijelo izvodi sva druga gibanja. Vrijeme složenog gibanja jednako je vremenima svih jednostavnih gibanja koja čine to složeno gibanje.

Kosi hitac

Neko tijelo bacimo početnom brzinom v_0, pod kutom α prema horizontalnoj ravnini: Kada ne bi bilo akceleracije g prema dolje, tijelo bi se gibalo jednoliko duž pravca. Budući da tijelo ima akceleraciju g prema dolje, izvodi dva gibanja istodobno: jednoliko duž pravca i slobodni pad. Takvo gibanje nazivamo kosi hitac.

Brzine tijela u bilo kojem trenutku u smjeru x i y osi su:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

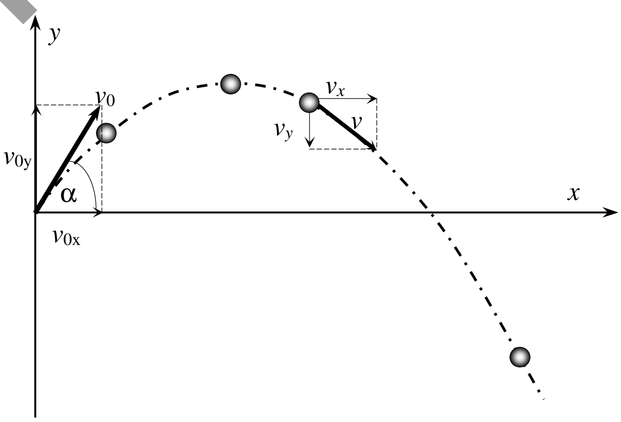
$$v_y = v_0 \sin\alpha - g\, t$$

Iznos brzine je: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Pomaci x i y su:

$$x = v_0\, t \cos\alpha$$

$$y = v_0\, t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2$$



Posebni slučajevi kosog hica su:

a) **Vertikalni hitac prema gore**: $\alpha = 90°$

$$v_y = v_0 - g\, t$$

$$y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

Kada je $v = 0$, tada tijelo postiže najveću visinu. Vrijeme potrebno da tijelo dođe do največe visine (y_{maks}) iznosi: $t_{gore} = \dfrac{v_0}{g}$; $t_{\text{gore}} = t_{\text{dolje}}$, dok je najveća visina: $y_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2g}$

b) **Vertikalni hitac prema dolje**: $\alpha = -90°$

$$v_y = v_0 + g\, t$$

$$y = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

c) **Horizontalni hitac**: $\alpha = 0°$

$$v_x = v_0\, ;\ v_y = g\, t\, ;\ v = \sqrt{v_0^2 + (g\,t)^2}\, ;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x}\, ;\ y = \tfrac{1}{2} g t^2\, ;\ x = v_0 t$$

2. DINAMIKA

I Newtonov zakon: Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu, ako je suma vanjskih sila koje na njega djeluju jednaka nuli.

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \vec{v} = \text{konst.}$$

Tijela se tako ponašaju jer su troma ili inertna, tj. nastoje zadržati stanje u kojem se nalaze (ako miruju nastoje i dalje mirovati, a ako se gibaju nastoje se i dalje gibati jednoliko po pravcu). Zbog toga se taj aksiom naziva i aksiom tromosti ili inercije. Mjera tromosti tijela je masa.

II Newtonov zakon: Ako na tijelo djeluje vanjska sila $\vec{F}$ tada tijelo dobiva akceleraciju $\vec{a}$ koja je direktno proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi m tijela.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Često se taj zakon prikazuje u obliku: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Definicija jedinice za silu je newton: N=kg·m/s^2. Dakle, jedan newton je sila koja masi od 1 kg daje akceleraciju od 1 m/s^2.

Težna sila: Posebna sila u blizini Zemljine površine naziva se težna sila (neki autori nazivaju tu silu težinom ili silom težom). Dakle, ako je $a = g$ tada označavamo težnu silu kao: $F_T = m\,g$

III Newtonov zakon: Ako međusobno djeluju dva tijela, tada je sila kojom prvo tijelo djeluje na drugo, jednaka po veličini sili kojom drugo tijelo djeluje na prvo ali je suprotnog smjera.

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

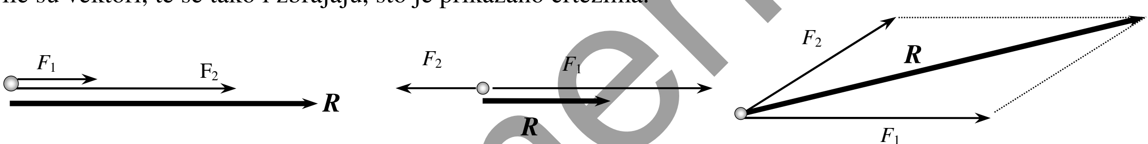
Taj aksiom često nazivamo i aksiom akcije i reakcije. Svaka akcija popraćena je suprotnom i jednakom reakcijom.

Gustoća tijela

Gustoća tijela je omjer mase i volumena $\rho = \frac{m}{V}$. U SI sustavu gustoću iskazujemo u kg/m^3. Tijelo svuda jednake gustoće nazivamo homogenim tijelom.

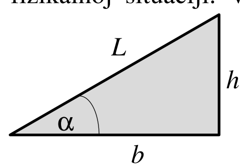
Sastavljanje i rastavljanje sila

Sile su vektori, te se tako i zbrajaju, što je prikazano crtežima.

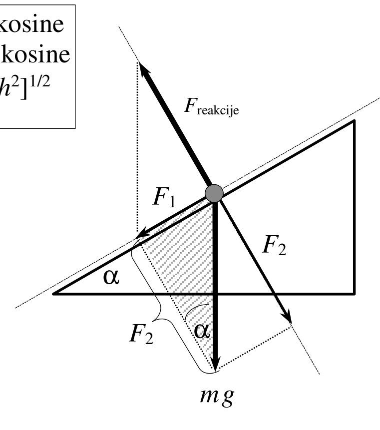


Sile F_1 i F_2 nazivamo komponentama, a $\boldsymbol{R}$ rezultantom. Rezultanta zamjenjuje djelovanje komponenata. Zbrajanje sila je jednoznačno, a rastavljanje ovisi o fizikalnoj situaciji. Vrlo često nam treba neku silu rastaviti na komponente.

Primjer: Kosina duljine L i visine h. Tijelo se nalazi na kosini, koja je nagnuta pod kutom α prema horizontalnoj ravnini. Na njega djeluje težna sila mg i reakcija podloge $F_{reakcije}$. U tijelu odaberemo ishodište koordinatnog sustava, tako da jednu koordinatnu os povučemo u smjeru gibanja (podloge), a drugu okomito na podlogu. Zatim iz vrha mg (rezultanta) konstruiramo komponente. F_1 daje silu u smjeru gibanja, dok je F_2 pritisak na podlogu, odnosno sila koja djeluje okomito na podlogu. Sile koje djeluju okomito na podlogu se poništavaju, tako da se tijelo giba pod djelovanjem sile F_1 koja mu daje akceleraciju. Iz sličnosti trokuta kosine i osjenčanog trokuta dobivamo za sile:



h = visina kosine
L = duljina kosine
$b = [L^2 - h^2]^{1/2}$

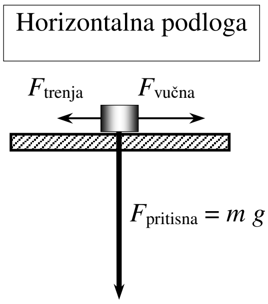


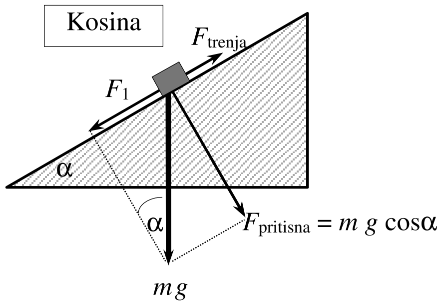
$$F_1 = mg\frac{h}{L} = mg\sin\alpha\,; \quad F_2 = mg\frac{b}{L} = mg\cos\alpha$$

Sila trenja

Trenje je sila koja se javlja pri dodiru dvaju tijela koja se nalaze u međusobnom gibanju ili ih u takvo gibanje želimo dovesti. 1. Smjer sile trenja pri pravocrtnom gibanju je suprotan smjeru gibanja. 2. Veličina sile trenja je: $F_{trenja} = \mu\, F_{pritisna}$. Pritisna sila $F_{pritisna}$ je ona sila koja djeluje okomito na podlogu, a μ je faktor trenja koji se određuje eksperimentalno. To je broj bez dimenzije. Razlikujemo faktore trenja: a) faktor trenja mirovanja (statički faktor), b) faktor trenja klizanja (kinetički faktor). Faktor trenja mirovanja je veći od faktora trenja klizanja.

Vrlo često se javljaju slijedeće podloge: horizontalna i kosina kod kojih su pritisne sile različite što se vidi s crteža.



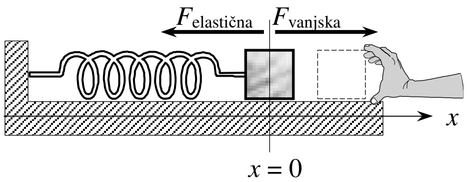


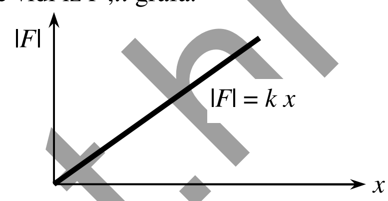
Elastična sila

Elastična sila je sila kojom se tijelo opire deformaciji zbog djelovanja vanjske sile F i proporcionalna je pomaku iz ravnotežnog položaja x:

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x}\ .$$

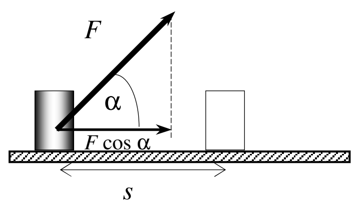
Faktor proporcionalnosti k nazivmo konstantom elastičnosti ili opiranja koji iskazujemo u N/m. x = pomak od ravnotežnog položaja (elongacija); k = faktor opiranja spiralnog pera; Što je k veći opruga je čvršća. Sila se povećava što je veći pomak x od ravnotežnog položaja što se vidi iz F, x grafa.





3. RAD, SNAGA, ENERGIJA

Rad



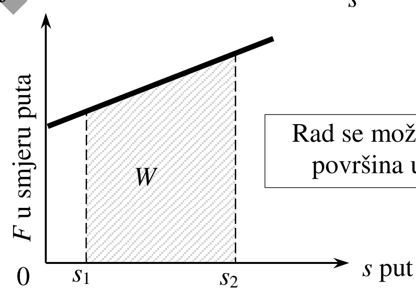
Rad W je savladavanje ili djelovanje sile F na nekom putu s.

$$W = F \cdot s \cos\alpha$$

Ako je $\alpha = 90°$ tada je $W = 0$; Ako je $\alpha = 0°$, tada je $W = F \cdot s$

Rad se iskazuje u joulima (J = Nm).
Osim u joulima rad se može izražavati i jedinicama kilovatsat i elektronvolt:

$$1\ \text{kWh} = 3{,}6 \cdot 10^{6}\ \text{J}$$
$$1\ \text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$



Rad se može prikazati kao površina u F, s grafu.

Snaga

Snaga : Snaga je rad izvršen u nekom vremenu. Snaga je veća ako veći rad obavimo za kraće vrijeme.

$$P = \frac{W}{t}$$

Snaga iskazujemo u wattima (znak: W=J/s). Watt je snaga kad rad od jednog joula obavimo za vrijeme jedne sekunde. Snagu možemo izraziti i u obliku:

$$P = F \cdot v$$

Korisnost

Korisnost je omjer korisnog i uloženog rada. Oznaka je η (čitaj eta).

$$\eta = \frac{W_{korisno}}{W_{uloženo}} = \frac{P_{korisno}}{P_{uloženo}}\ ;\ \eta \le 1$$

Često se η iskazuje u postocima (npr. $\eta = 0{,}8 = 80\ \%$).

ENERGIJA

Za sve što radimo – igramo se, kuhamo, učimo ili nešto proizvodimo – potrebna je energija. Energija je sposobnost izazivanja zbivanja. Različite vrste energije uzrokuju različita zbivanja. Mehanička energija jednaka je količini rada koju tijelo može izvršiti. Zbog toga se energija kao i rad iskazuje u joulima (J). U mehanici energiju dijelimo na dvije vrste: a) kinetičku b) potencijalnu

Kinetička energija

Kinetičku energiju E_k ima tijelo mase m zbog svoje brzine v.

$$E_k = \frac{m v^2}{2}$$

Ako na tijelo koje ima početnu kinetičku energiju E_{k1} djelujemo silom koja obavlja rad W pa tijelo dobiva kinetičku energiju E_{k2} tada se promijenila kinetička energija tijela za $\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = W$

Potencijalna energija

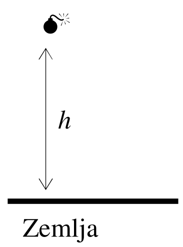
Potencijalnu energiju tijelo ima zbog svog specijalnog položaja u polju neke konzervativne sile. Konzervativna sila je ona kod koje rad ne ovisi o putu nego samo o početnom i konačnom položaju tijela. Disipativna sila je ona kod koje rad ovisi o putu. Takva je primjerice sila trenja. Ta sila nam ne može vratiti uloženi rad, pa sila trenja ne može dati potencijalnu energiju tijelu.

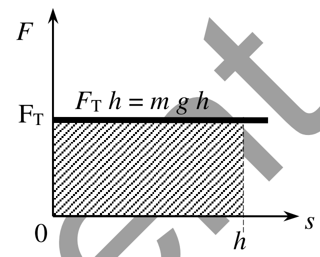
Općenito promjena potencijalne energije ΔE_p jednaka je uloženom radu W:

$$\Delta E_p = -W$$

Predznak minus je zbog toga što je uloženi rad negativan po definiciji. Potencijalne energije sile teže i harmonijske sile:

a) **Sila teža:** $F_T = m\,g$



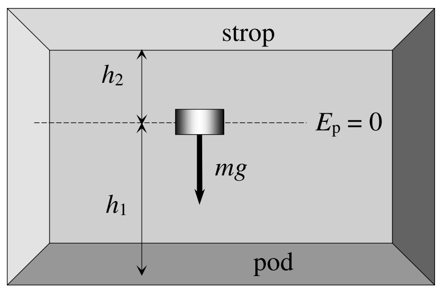


Tijelo na visini h iznad tla ima potencijalnu energiju prema tlu:
$E_p = m\,g\,h$

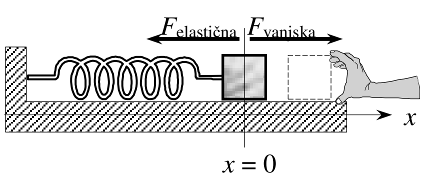
Potencijalna energija uvijek se treba odrediti prema nečemu. Ona može biti pozitivna i negativna. Ako dobivamo rad tada je $E_p > 0$, a ako moramo uložiti rad s obzirom na neki položaj $E_p < 0$. Primjerice:

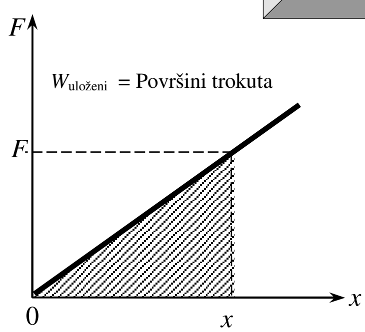
$$E_p\ (\text{prema stropu}) = -m\,g\,h_2 < 0$$

$$E_p\ (\text{prema podu}) = m\,g\,h_1 > 0$$



b) **Elastična sila:** $F = k \cdot x$





$$W_{uloženi} = \Delta E_p$$

$$E_p = \frac{F\,x}{2} = \frac{k\,x^2}{2}$$

ZAKON OČUVANJA ENERGIJE

Navedimo nekoliko ravnopravnih formulacija zakona očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već se samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednaki prirast nekog drugog oblika energije. Za oblike mehaničke energije možemo to zapisati kao:
  $$\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_k = 0 \ \text{ ili } \ \Delta E_k = -\Delta E_p \ \text{ ili } \ E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}$$
- Ukupna energija izoliranog sustava je konstantna bez obzira koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Perpetuum mobile prve vrste nije moguć.

4. KOLIČINA GIBANJA I IMPULS SILE

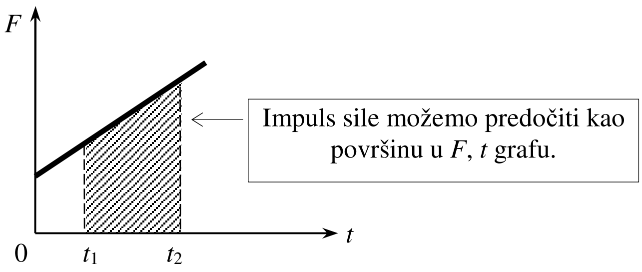
- **Količina gibanja** $\vec{p}$ je produkt mase tijela m i njegove brzine $\vec{v}$.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

U SI sustavu mjernih jedinica iskazuje se u kg·m/s.

- **Impuls sile** $\vec{I}$ je produkt sile $\vec{F}$ i vremenskog intervala Δt u kojem ona djeluje:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$



U SI sustavu mjernih jedinica iskazuje se u N·s.
Iz 2. Newtonovog zakona i definicije akceleracije: $\vec{F} = m\vec{a}$ i $\vec{a} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ dobivamo:

$$\vec{F}\,\Delta t = m\,\Delta \vec{v}$$

pa drugi Newtonom zakon možemo zapisati u općenitijem obliku:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}.$$

Brzina promjene količine gibanja tijela proporcionalna je sili i zbiva se u u smjeru te sile. Impuls sile izaziva promjenu količine gibanja tijela:

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

Zakon očuvanja količine gibanja

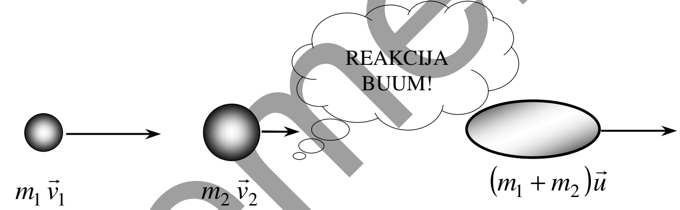
U izoliranom sustavu koji je sastavljen od više tijela zbroj količine gibanja prije reakcije jednak je zbroju količine gibanja nakon reakcije. Izolirani sustav je onaj u kojem nema djelovanja vanjskih sila. Ukupna količina gibanja izoliranog sustava je konstantna što možemo zapisati kao:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + ... + m_n\vec{v}_n = \text{konst.}$$

Taj zakon vrijedi za svaku pojavu i svaku vrstu međudjelovanja.

- **Savršeno neelastičan sudar:**

Dva tijela masa m_1 i m_2 i brzina v_1 i v_2 centralno se sudare pa se nakon sudara gibaju zajedno.



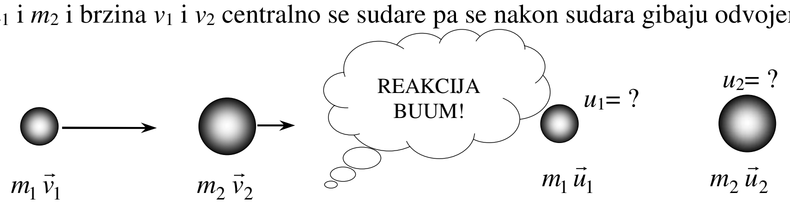
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$

Kod tog sudara vrijedi zakon očuvanja količine gibanja, dok kinetička energija nije očuvana, jer se dio energije gubi na promjenu unutarnje energije, odnosno kod tog sudara dolazi do gubitka mehaničke energije. Ukupni gubitak Q mehaničke energije je:

$$Q = \frac{m_1\vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\vec{u}^2}{2}$$

- **Elastičan sudar:**

Dva tijela masa m_1 i m_2 i brzina v_1 i v_2 centralno se sudare pa se nakon sudara gibaju odvojeno.



Kod elastičnog sudara uz očuvanje količine gibanja:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

vrijedi i očuvanje kinetičke energije:

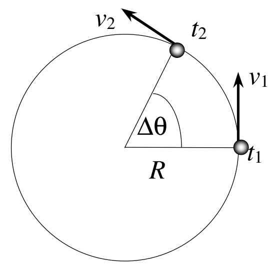
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

Rješenje ovih jednadžbi daje da je relativna brzina prije i nakon reakcije očuvana s negativnim predznakom, odnosno: $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$. Ta jednadžba i zakon očuvanja količine gibanja daju nam mogućnost jednostavnijeg rješavanja numeričkih zadataka.

5. JEDNOLIKO GIBANJE PO KRUŽNICI

R = polumjer kružnice

T = ophodno vrijeme ili period (to je vrijeme za koje tijelo jednom obiđe kružnicu) Iskazuje se u sekundama.



f = frekvencija (broj ophoda u jednoj sekundi) $f = \dfrac{1}{T}$. Iskazuje se u s^{-1}= Hz

v = obodna ili periferijska brzina. Iskazuje se u m/s. $v = \dfrac{2R\pi}{T}$

ω= kutna brzina. Iskazuje se u rad/s. $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

Kod jednolikog gibanja po kružnici brzina v je konstantna po iznosu, ali ne i po smjeru. S obzirom da postoji promjena brzine po smjeru, mora postojati akceleracija tzv. centripetalna akceleracija:

$$a_{\text{cp.}} = \frac{v^2}{R} ,$$

odnosno sila koja mijenja smjer brzine. Ta sila naziva se centripetalna sila i ima smjer prema središtu kružnice: $F_{\text{cp}} = m \cdot a_{\text{cp.}}$ odnosno: $F_{\text{cp}} = m\dfrac{v^2}{R}$ ili izraženo pomoću perioda T, frekvencije f ili kutne brzine ω:

$$F_{\text{cp}} = m\frac{v^2}{R} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R = m\,4\pi^2 f^2 R = m\,\omega^2 R$$

Koju od ovih jednadžbi ćemo upotrijebiti ovisi o zadanim podacima u zadatku.

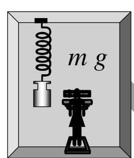
🕮 Inercijski i akcelerirani referentni sustavi

❑ Inercijski sustav

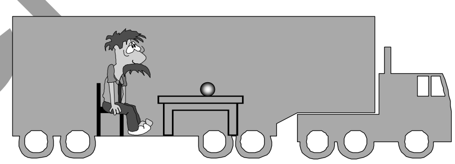
Sustav u kojem obavljamo promatranje nekog događaja nazivamo referentnim sustavom. Svi sustavi koji miruju ili se gibaju konstantnom brzinom po smjeru i veličini, nazivaju se inercijski sustavi.

Sam naziv inercijski označuje da u njemu vrijedi zakon inercije (tromosti) tj. 1. Newtonov zakon. Slobodno tijelo tj. ono koje ne međudjeluje s okolinom giba se jednoliko po pravcu ili miruje bez obzira iz kojeg se inercijskog sustava promatra.

$a_{\text{dizala}} = 0$
dizalo stoji ili se giba stalnom brzinom $\vec{v}$



$a_{\text{kamiona}} = 0$
kamion stoji ili se giba stalnom brzinom $\vec{v}$



❑ Akcelerirani sustavi

Ako su sustavi akcelerirani, a promatrač se nalazi u takvom sustavu, javljaju se zbog akceleracije sustava dodatne sile koje nazivamo inercijskim silama. U svakom referentnom sustavu koji se akcelerira akceleracijom $\vec{a}_0$ na tijelo mase m djeluje inercijska sila $\vec{F}_{\text{in}}$:

$$\vec{F}_{\text{in}} = -m \cdot \vec{a}_0 .$$

Za opisivanje gibanja u takvu sustavu možemo upotrijebiti drugi Newtonov zakon, ali moramo uključiti i inercijsku silu pa zapisujemo:

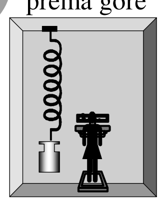
$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{in}} = m \cdot \vec{a}$$

odnosno:

$$\vec{F} - m \cdot \vec{a}_0 = m \cdot \vec{a} ,$$

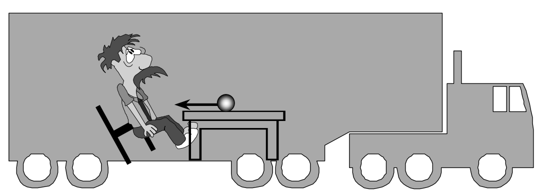
pri čemu $\vec{a}$ označava akceleraciju tijela mase m u sustavu koji se akcelerira akceleracijom $\vec{a}_0$. Kada brzina mijenja smjer također se javlja inercijska sila koju kod jednolikog gibanja po kružnici nazivamo centrifugalnom silom koja je usmjerena radijalno tj. od središta vrtnje prema van. Centripetalna i centrifugalna sila su dvije različite sile u dva različita sustava i nikada ih ne crtamo na istoj slici.

$a_0 = a_{\text{dizala}} \uparrow$
dizalo se akcelerira prema gore

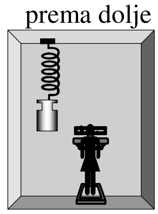


$m\,g + m\,a$

$a_0 = a_{\text{kamiona}} \rightarrow$
kamion ubrzava prema naprijed

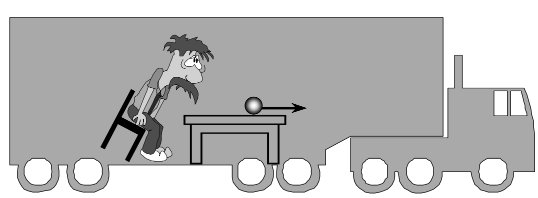


$a_0 = a_{\text{dizala}} \downarrow$
dizalo se akcelerira prema dolje



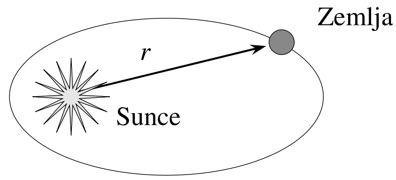
$m\,g - m\,a$

$a_0 = a_{\text{kamiona}} \leftarrow$
kamion koči tj. ubrzava prema natrag



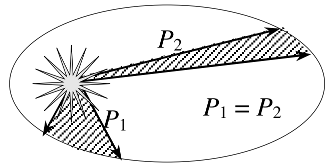
6. GRAVITACIJA

Keplerovi zakoni



1. Planeti se gibaju po elipsama oko Sunca, koje se nalazi u jednom od žarišta (fokusa) elipse.

Spojnica Sunce - Zemlja zove se radijvektor r.

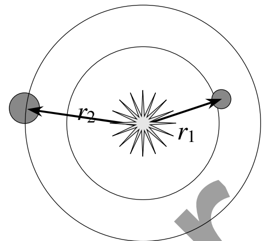


2. Radijvektor r u jednakim vremenskim razmacima prebriše jednake površine P.

Zaključujemo da se Zemlja giba brže kada je bliža Suncu, a sporije kada je od njega udaljenija. (Očuvanje momenta količine gibanja)

3. Kvadrati ophodnih vremena T oko Sunca odnose se kao kubovi srednjih udaljenosti r od Sunca.

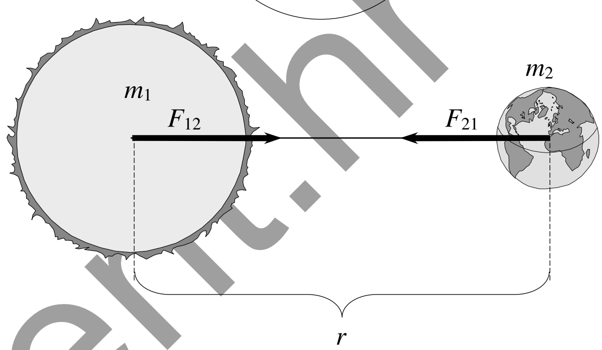
$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$



Elipse su jako malo izdužene te ih možemo zamijeniti kružnicama.

Opći zakon gravitacije

Uspoređujući Keplerova saznanja o gibanju planeta i saznanje o postojanju sile teže Newton je zaključio da je to jedna te ista univerzalna sila kojoj daje ime gravitacijska sila.



Ako postoje dvije mase m_1 i m_2 onda između njih postoji privlačna sila F koja je proporcionalna s masama a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove međusobne udaljenosti r.

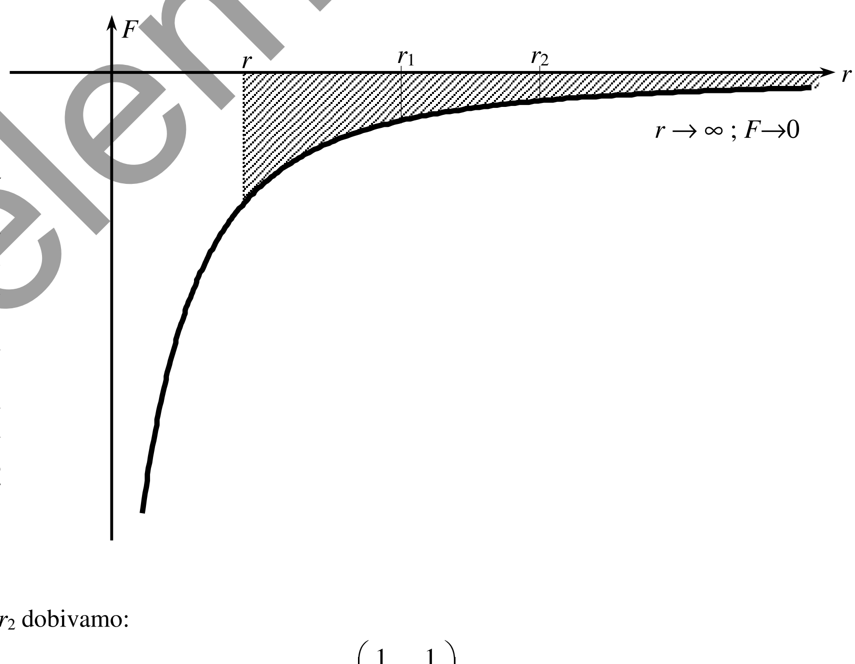
$$F = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Pravac sile leži na spojnici središta dvaju tijela. Konstanta proporcionalnosti G naziva se gravitacijska konstanta i iznosi:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$$

Po dogovoru sve privlačne sile imaju predznak minus.

$$F = -G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$



Iz grafa ovisnosti sile F o udaljenosti r vidimo da sila teži prema nuli kad r teži u beskonačnost. Prisjetimo se da je površina u F,r grafu jednaka uloženom radu odnosno potencijalnoj energiji. Veličina te površine od r do beskonačnosti jednaka je uloženom radu, pa je potencijalna energija E_p *prema beskonačnosti* jednaka:

$$E_{p(r \to \infty)} = -G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r}\,,$$

dok za uloženi rad od r_1 do r_2 dobivamo:

$$W_{(r_1\ \mathrm{do}\ r_2)} = G\,m_1\,m_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Na samoj Zemlji gravitacijska sila očituje se kao sila teža mg. Uz oznake: m = masa tijela; M = masa Zemlje; R = polumjer Zemlje; G = gravitacijska konstanta; g = akceleracija sile teže proizlazi:

$$m\,g = G\,\frac{M\,m}{R^2} \Rightarrow G\,M = g\,R^2 \Rightarrow \text{masa Zemlje } M = \frac{g\,R^2}{G}\,.$$

Kozmičke brzine

1. Prva kozmička brzina je brzina kojom bi trebali tijelo lansirati s površine Zemlje tako da ono kruži tik uz njenu površinu, to jest da bude njezin satelit na udaljenosti $r = R$. ($R_{Zemlje} \approx 6400$ km ; $g \approx 10$ m/s^2)

$$F_{\text{centripetalna}} = F_{\text{gravitacije}}$$

$$\frac{m v^2}{R} = G \frac{M\, m}{R^2}$$

$$\text{Budući da je } G\,M = g\,R^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{R\,g} \approx 8 \text{ km/s}$$

2. Druga kozmička brzina je brzina kojom bi tijelo trebali lansirati s površine Zemlje tako da trajno napusti Zemlju, tj. da ode izvan dosega gravitacijske sile Zemlje. Dakle, kinetička energija mora biti jednaka potencijalnoj energiji prema beskonačnosti:

$$E_p = E_k$$

$$G\frac{M\, m}{R} = \frac{m v^2}{2}$$

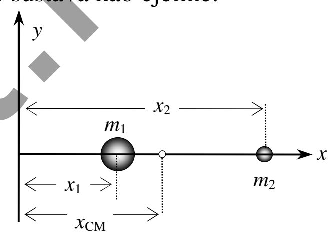
$$\text{Budući da je } G\,M = g\,R^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2\,R\,g} = v_1 \cdot \sqrt{2} \approx 11 \text{ km/s}$$

7. ROTACIJA KRUTOG TIJELA

Središte mase

Gibanje sustava čestica mogli bismo proučavati promatranjem gibanja svake pojedine čestice tog sustava. U slučaju velikog broja čestica to je složen i često nemoguć posao. Zato se definira zamišljena točka sustava koju nazivamo središtem mase pomoću koje jednostavnije opisujemo gibanje sustava kao cjeline.

Promotrimo sustav dviju čestica masa m_1 i m_2 smještenih na x osi u udaljenostima x_1 i x_2 od ishodišta koordinatnog sustava. Definiramo točku sustava koju nazivamo središtem mase s koordinatom x_{CM} kao:



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M},$$

gdje je M ukupna masa sustava čestica ($M = m_1 + m_2$).

Kad su mase jednake središte mase se nalazi u sredini spojnice čestica, a za različite mase on se nalazi bliže većoj. Ako su čestice prostorno razmještene, tada se koordinate središta mase računaju za svaku koordinatu posebno. Koordinate položajnog vektora r_{CM} središta mase nađu se za sustav od n čestica mase m_i koje su udaljene od ishodišta za $\vec{r}_i$ relacijom:

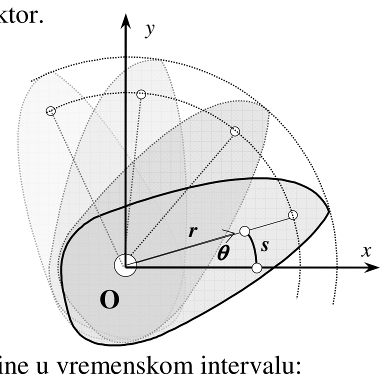
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}$$

Kod gibanja tijela središte mase se giba kao materijalna točka u kojoj je koncentrirana sva masa sustava čestica. Često se (posebice u statici pri proučavanju ravnoteže tijela) govori o težištu tijela. Sila teža djeluje na sve točke tijela. Ukupna sila teža na tijelo jednaka je zbroju sila na pojedine materijalne točke, odnosno mase m_i koje čine tijelo. Rezultanta svih tih vanjskih sila ima hvatište u središtu mase. Tu točku nazivamo *težištem tijela*.

Rotacija krutog tijela oko učvršćene osi

Rotaciju svakog dijela krutog tijela u ravnini (x,y) možemo promatrati kao rotaciju niza materijalnih točaka od kojih svaka ima kutnu brzinu $\vec{\omega}$. Os rotacije O je okomita na ravninu crteža. Točke tijela koje se nalaze na osi rotacije ostaju tijekom gibanja nepomične. Općenito brzina v kojim se giba materijalna točka ovisi o udaljenosti r od osi rotacije r nazivamo radijvektor ili položajni vektor.

Što je točka dalje od osi to će njena brzina biti veća jer za isto vrijeme opiše veći luk. Relacija koja povezuje kut θ i luk s glasi:



$$\theta = \frac{s}{r}.$$

Ako uočena materijalna točka krutog tijela za vrijeme Δt prebriše kut $\Delta\theta$ tada je kutna brzina tijela:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Kutna akceleracija α tijela se tada definira kao promjena kutne brzine u vremenskom intervalu:

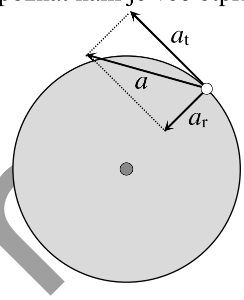
$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Tijelo jednoliko rotira kada je kutna brzina tijela stalna veličina. Tada za vrijeme jedne periode T prebrisani kut iznosi 2π radijana pa se kutna brzina može izraziti kao:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ili } \omega = 2\pi f$$

Rotira li tijelo stalnom kutnom brzinom ω, tada sve točke na udaljenosti r od središta rotacije imaju tangencijalnu brzinu $v = 2r\pi/T$ ili $v = \omega r$. Dakle, što je neka točka krutog tijela dalje od osi rotacije to će imati veću brzinu. Često se brzina v naziva obodna ili linijska brzina. Općenito gibanje po kružnici može biti nejednoliko. Da se materijalna točka uopće giba po kružnici, dakle da mijenja smjer brzine, potrebna je sila koju nazivamo centripetalnom silom. Smjer centripetalne sile (F_r) je uvijek u smjeru polumjera i djeluje prema središtu rotacije. Ako se tijelo još i ubrzava tijekom gibanja po kružnici tada treba djelovati i sila u smjeru tangente na kružnicu tzv. tangencijalna sila F_t. U tom slučaju tijelo ima tangencijalnu i radijalnu akceleraciju. Promjena smjera brzine v određena je radijalnom akceleracijom (a_r), dok je promjena iznosa brzine određena tangencijalnom akceleracijom (a_t). Iznos radijalne akceleracije poznat nam je već otprije:

$$a_r = \frac{v^2}{r} \; ; \; a_r = \omega^2 \cdot r$$



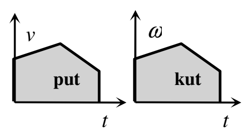
Tangencijalna akceleracija nastaje kad se mijenja iznos obodne brzine tijekom vremena:

$$a_t = r \cdot \alpha$$

Ukupna akceleracija $\vec{a}$ jednaka je vektorskom zbroju radijalne $\vec{a}_r$ i tangencijalne akceleracije $\vec{a}_t$. Sa slike vidimo da je iznos ukupne akceleracije jednak:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

Između relacija za gibanje po kružnici i pravocrtnog gibanja duž x osi postoje analogije koje su prikazane u tabeli:

Pravocrtno gibanje	**Kružno gibanje**	**Veza i napomena**
pomak: x	kut: θ	$x = r\,\theta$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
brzina: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$	kutna brzina: $\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$	
akceleracija: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ Površina u v, t grafu je pomak x	kutna akceleracija: $\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ Površina u ω, t grafu je prebrisani kut θ	
Jednoliko gibanje:		
$\vec{v}$ = konst. $x = x_0 + v\,t$	$\vec{\omega}$ = konst. $\theta = \theta_0 + \omega t$	N = broj okretaja $N = \frac{\theta}{2\pi}$
Jednoliko ubrzano gibanje:		
$\vec{a}$ = konst. $v = v_0 + a\,t$ $x = x_0 + v_0\,t + \frac{a}{2} t^2$ $v^2 = v_0^2 + 2\,a\,x$	$\vec{\alpha}$ = konst $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0\,t + \frac{\alpha}{2} t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	$a_t = r\,\alpha$ $a_r = \frac{v^2}{r}$ $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$