

3. ELEKTRICITET

ELEKTROSTATIKA

Količina naboja se iskazuje jedinicom *kulon* (znak: C). Kulon je izvedena jedinica i jednak je produktu ampera i sekunde: $C = As$. Električni naboji elementarnih čestica protona i elektrona tzv. *elementarni naboji* su najmanje količine naboja, i označavaju se slovom e . Iznos elementarnog naboja (protona $+e$ i elektrona $-e$) je:

$$\pm e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

Budući da su tvari sastavljene od atoma naboj svakog tijela jednak je cjelobrojnom višekratniku elementarnog naboja e . (Za razliku od elektrona, danas znamo da proton nije elementarna čestica već je sastavljen od manjih čestica koje nazivamo kvarkovima. Eksperimentalno je pokazano da kvarkovi imaju naboj koji je manji od elementarnog naboja e . Tako je proton sastavljen od kvarkova: dva "u" kvarka i jednog "d" kvarka, dakle, "uud". Naboj "u" kvarka je $+2e/3$, a "d" kvarka $-e/3$. Ukupan naboj protona je: $2 \cdot \frac{2}{3}e + (-\frac{1}{3}e) = e$. Međutim izravan eksperimentalni dokaz postojanja kvarkova kao slobodnih čestica još nije proveden, tako da možemo smatrati e za sada najmanjom količinom naboja.)

Označimo li naboj tijela slovom Q tada će za svako tijelo vrijediti:

$$Q = (N_p - N_e) e$$

pri čemu su N_p i N_e broj protona i elektrona koje tijelo sadrži. Broj N pripada skupu prirodnih brojeva, pa je općenito $N=1, 2, 3, \dots$

Ako je $N_p = N_e$ tada je tijelo električki neutralno, pa je naboj tijela $Q = 0$.

Ako je $N_p > N_e$ tada je tijelo pozitivno nabijeno, pa je naboj tijela $Q > 0$.

Ako je $N_p < N_e$ tada je tijelo negativno nabijeno, pa je naboj tijela $Q < 0$.

Za nabijeno tijelo kažemo da ima manjak ili višak elektrona, jer se nabijanje najčešće obavlja prijenosom elektrona. Obično se pri prikazu nabijenog tijela crta samo višak ili samo manjak elektrona. Budući da je naboj e najmanji mogući, tijelo može imati manjak ili višak od $1e, 2e, 3e, 4e, \dots$ odnosno makroskopski naboj tijela Q može biti samo cjelobrojni višekratnik elementarnog naboja e :

$$Q = N \cdot e$$

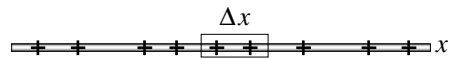
Kažemo da je naboj *kvantiziran* jer se pojavljuje u cjelobrojnim nakupinama. Kažemo da je naboj očuvan i to svojstvo iskazujemo univerzalnim *zakonom o očuvanju naboja*:

Ukupni električni naboj zatvorenog sustava ostaje stalan bez obzira na to kakva se električna međudjelovanja događaju unutar sustava.

Napomenimo da u nekim procesima, primjerice pri jakim sudarima naboji mogu nastati ili nestati ali samo u parovima. Tako je danas poznato da elektromagnetsko zračenje koje nema naboja, u blizini jezgre atoma, može stvoriti par čestica pozitron (tzv. antičestica elektrona) i elektron. Te dvije čestice su potpuno jednake osim što pozitron ima naboj $+e$ dok elektron ima naboj $-e$, pa je ukupan tako "stvoreni" naboj jednak nuli. Taj proces naziva se procesom *stvaranja parova*. Isto tako pri sudaru tvornih čestica, primjerice elektrona i pozitrona, nastaje elektromagnetsko zračenje koje nema naboja. Takav proces nestajanja tvornih čestica i njihove pretvorbe u zračenje nazivamo *anihilacijom*.

Ovisno o objektu po kojem je naboj raspoređen, govorimo o različitim gustoćama naboja:

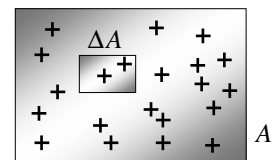
Linijaska gustoća naboja λ : Ako je naboj raspoređen po štapu čije se ostale dimenzije mogu zanemariti prema njegovoj duljini govorimo o linijskoj raspodjeli naboja λ .



Ona se definira kao omjer male količine naboja ΔQ i male duljine Δx na kojoj možemo smatrati da je gustoća naboja konstantna: $\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta x}$. Iskazuje se jedinicom C/m. Ako su naboji jednoliko raspoređeni duž

cijele duljine x ($\lambda = \text{konstantno}$) jednadžba prelazi u $\lambda = Q/x$.

Plošna gustoća naboja σ : Promotrimo naboj raspoređen po ploči površine A zanemarive debljine. Odaberemo li dovoljno mali element površine ΔA na kojem smatramo da je naboj jednoliko raspoređen definiramo plošnu raspodjelu naboja σ relacijom: $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$. Iskazuje se jedinicom C/m². Ako su

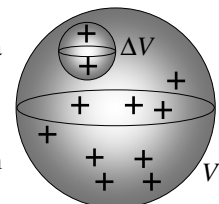


naboji jednoliko raspoređeni po cijeloj površini A ($\sigma = \text{konstantno}$) jednadžba prelazi u $\sigma = Q/A$.

Prostorna gustoća naboja ρ : Prostorna gustoća naboja definira se kao omjer naboja

ΔQ i volumena ΔV na kojem smatramo da je raspodjela naboja konstantna: $\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$

Iskazuje se jedinicom C/m³. Ako su naboji jednoliko raspoređeni po cijelom volumenu V ($\rho = \text{konstantno}$) jednadžba se može zapisati kao $\rho = Q/V$.

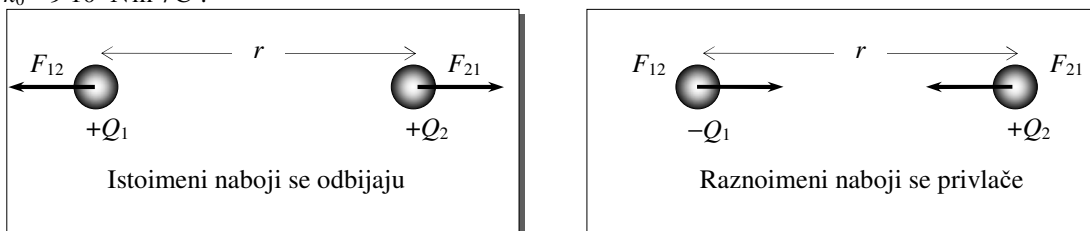


📖 Coulombov zakon

Pod točkastim nabojima podrazumijevamo naboje čije dimenzije možemo zanemariti prema njihovim međusobnim udaljenostima. Pokusi pokazuju da je elektrostatska sila F kojom se točkasti naboji privlače (ili odbijaju) direktno proporcionalna s količinama naboja Q_1 i Q_2 a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove međusobne udaljenosti r . Smjer sile je u smjeru spojnice tih dvaju naboja. Sila je jednaka:

$$F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Konstanta proporcionalnosti k ovisi o sustavu jedinica i mediju koji okružuje naboje. Za vakuum je: $k \equiv k_0 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.



Naboji se mogu nalaziti i u sredstvu (izolatoru). Tada sila međudjelovanja ovisi o sredstvu i manja je od sile kada se naboji nalaze u vakuumu. Coulombov zakon u SI sustavu jedinica tada se zapisuje kao:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Ovdje su:

Q_1, Q_2 = količine točkastih naboja

r = udaljenost između naboja

ϵ_0 = permitivnost vakuuma (dielektrična konstanta vakuuma) $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$

ϵ_r = relativna permitivnost (relativna dielektrična konstanta) – ovisi o sredstvu u kojem se nalaze naboji. To je broj bez dimenzije koji pokazuje koliko puta je manja sila F ako se naboji nalaze u sredstvu od one u vakuumu.

Produkt permitivnosti vakuuma i relativne permitivnosti nazivamo apsolutnom permitivnošću i označavamo slovom ϵ . Dakle apsolutna permitivnost je: $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$. Za rješavanje zadataka zgodno je konstantu proporcionalnosti $1/4\pi\epsilon_0\epsilon_r$ prikazati u obliku: $k = \frac{k_0}{\epsilon_r}$ pri čemu je $k_0 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ C}^{-2} \text{ N m}^2$, pa se Coulombov zakon

može izraziti kao: $F = \frac{k_0}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$. Coulombov zakon vrijedi u golemom rasponu udaljenosti od atomnih do svemirskih veličina.

📖 Električno polje

Općenito je svaki naboj okružen električnim poljem. Ako se naboj giba s njime se pomiče i njegovo polje. Osjetilima ne možemo neposredno opažati električno polje već o njemu doznajemo samo po učincima na naboje na koje polje djeluje silom. Električno polje nepomičnih naboja nazivamo *elektrostatičkim poljem*. Elektrostatička polja se u granicama točnosti mjerenja ne mijenjaju tijekom vremena. Električno polje je prostor oko električki nabijenih tijela u kojem se očituje djelovanje sile. To je vektorsko polje. Svakoju točki prostora možemo pridružiti vektor jakosti električnog polja \vec{E} definiran kao omjer sile \vec{F} i probnog naboja q :

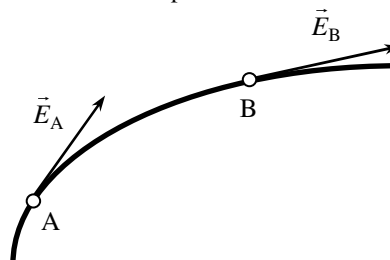
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Po dogovoru probni naboj q ima pozitivan predznak. Jakost električnog polja iskazuje se jedinicom njutn po kulonu tj. N/C ili kao što će kasnije biti objašnjeno volt po metru (V/m). Te jedinice su ekvivalentne tj. vrijedi: N/C=V/m.

Električna sila koja djeluje na probni naboj q mijenja se od točke do točke u prostoru. Svakoju točki prostora pridružen je jedan vektor jakosti električnog polja \vec{E} . Kako zorno prikazati takav skup vektora? Električno polje može se opisati modelom silnica.

Silnice su geometrijske konstrukcije kojim opisujemo polje i nemaju nekog dubljeg fizikalnog značenja.

- Silnice su zamišljene crte čije tangente u svakoj točki prostora pokazuju smjer vektora električnog polja.
- Električne silnice su otvorene crte koje imaju izvor u pozitivnom naboju, a ponor u negativnom naboju.
- One se ne mogu sjeći, jer bi to značilo da u jednoj točki prostora imamo više smjerova električnog polja.



Homogeno električno polje

Ako u svakoj točki prostora na probni naboj djeluje sila jednake jakosti i smjera dobivamo homogeno električno polje. Takva se polja primjerice pojavljuju između dviju usporednih metalnih ploča nabijenih jednakim količinama naboja suprotna predznaka. Silnice kojima prikazujemo polje su usporedne i jednako razmaknute.

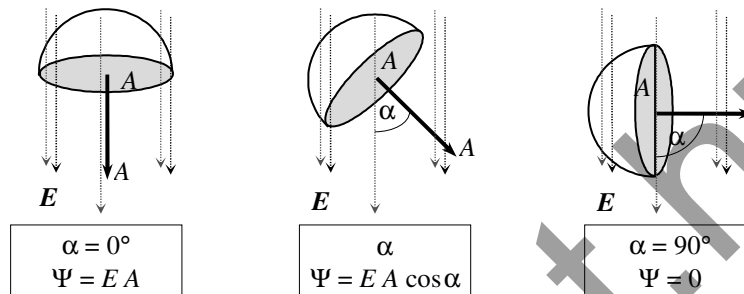
Električno polje točkastog naboja

Odredimo jakost električnog polja točkastog naboja Q . Probni naboj označimo slovom q . Između ta dva naboja sila iznosi: $F = k \frac{Qq}{r^2}$. Uvrštavanjem sile u definicijsku jednadžbu za jakost električnog polja $E = F/q$ polja, dobivamo za jakost električnog polja točkastog naboja Q jednadžbu:

$$E = k \frac{Q}{r^2} \text{ ili } E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}$$

Tok električnog polja

Promotrimo homogeno elektrostatičko polje jakosti E u kojem se nalazi ravna ploha površine A , koja s obzirom na smjer silnica oba polja može stajati pod različitim kutovima α .



Definirajmo vektor površine \vec{A} . To je vektor koji je okomit na plohu i ima dvojaku orijentaciju (pozitivan je kad izlazi iz volumena obuhvaćenog nekom plohom, dok je pri ulasku u taj volumen negativan), a veličina mu je određena veličinom površine na koju je okomit. Kut α je kut između vektora površine \vec{A} i vektora polja \vec{E} . S obzirom na položaj plohe u polju razlikujemo dva krajnja slučaja:

1. kada je tok najveći ($\alpha = 0^\circ$). Silnice tada probadaju okomito danu površinu.
2. kada je tok jednak nuli ($\alpha = 90^\circ$). Silnice polja uopće ne probadaju površinu.

Vidimo da je "probadanje" jače kad je kut α manji. Tok polja (znak: Ψ) je to veći što više nacrtanih silnica probada zadanu površinu A . Kad je površina tako postavljena da ju niti jedna silnica ne probada tada je tok jednak nuli. Tok polja Ψ kroz površinu A je produkt između modula vektora \vec{E} i vektora površine \vec{A} , te kosinusa kuta α što ga čine ta dva vektora. Takav produkt dvaju vektora naziva se skalarni produkt jer kao rezultat njihova množenja dobivamo skalarnu veličinu. Dakle kroz zadanu površinu A tok električnog polja je:

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A \cos \alpha$$

Tok električnog polja iskazujemo jedinicom: $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ ili $\text{V} \cdot \text{m}$.

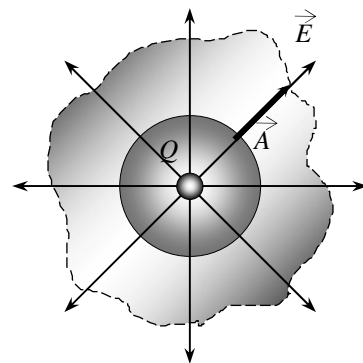
Gaussov zakon

Gaussov zakon dat će nam vezu između električnog polja i naboja koji to polje proizvodi, pa ćemo pomoću njega moći izraziti jakost nekih tipičnih električnih polja. Koristeći Coulombov zakon nalazimo električno polje ako je poznata raspodjela naboja, dok po Gaussovom zakonu iz poznate raspodjele električnog polja zaključujemo o razdiobi naboja. Promotrimo električno polje točkastog naboja. Sa slike vidimo da je tok električnog polja isti kroz kuglu i kroz bilo koju zatvorenu plohu (prikazana crtkano) kojom je naboj Q obuhvaćen. Broj nacrtanih silnica koje probadaju obje plohe je jednak.

Gaussov zakon glasi:

Tok električnog polja kroz bilo koju zatvorenu plohu proporcionalan je sumi naboja obuhvaćenih tom plohom i jednak je:

$$\Psi_{\text{zat. pov.}} = \frac{\sum Q_{\text{obuhv.}}}{\epsilon_0}$$



☞ Napon u homogenom električnom polju

Na naboj $+q$ djeluje homogeno električno polje jakosti E stalnom silom $F = qE$. Naboj premještamo iz točke P u točku K homogenog električnog polja. Pritom vanjska sila $F_{\text{vanjska}} = -qE$ obavlja rad. Promjena električne potencijalne energije jednaka je radu vanjskih sila:

$$\Delta E_{\text{pot}} = -W \equiv -(-F) \cdot d \equiv qEd$$

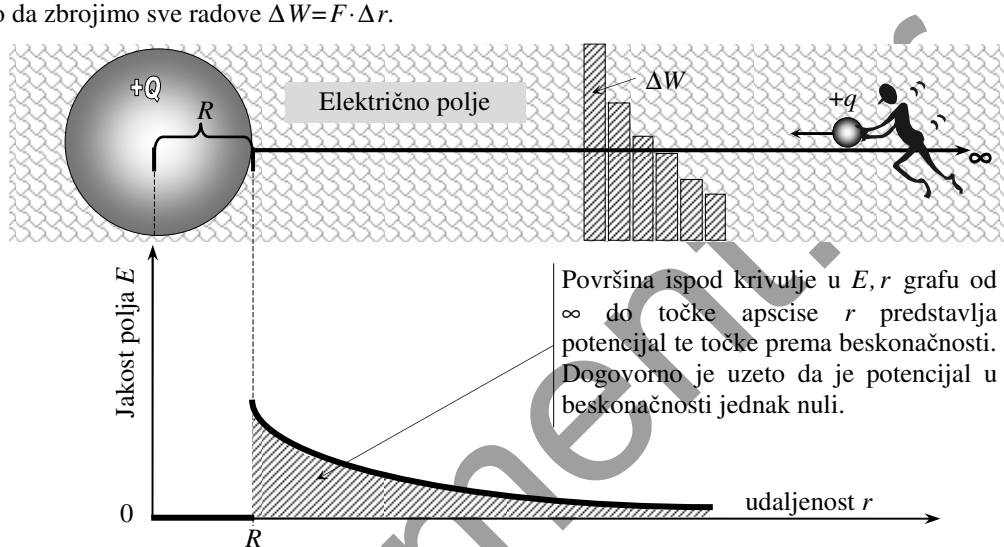
Budući da je $U = \Delta E_p / q$ dobivamo: $U = \frac{qEd}{q}$, pa je napon jednak:

$$U = Ed$$

pa se jakost električnog polja iskazuje i jedinicom V/m.

📖 Potencijal

Zamislimo da probni naboj $+q$ želimo dovesti iz beskonačnosti u neku točku električnog polja koje stvara metalna kugla polumjera R nabijena nabojem $+Q$. Unutar kugle nema polja. Pritom moramo savladavati odbojnu silu između ta dva naboja koja postaje to veća što su naboji bliži (polje je sve jače), dakle moramo obavljati rad. Što je veći naboj $+q$ koji "guramo" odbojna sila je veća, pa je i rad veći. Ukupan rad dobijemo tako da zbrojimo sve radove $\Delta W = F \cdot \Delta r$.



Potencijal ϕ jednak je radu W koji je potrebno obaviti da probni naboj q iz beskonačnosti, gdje je sila jednaka nuli, dovedemo u neku točku električnog polja:

$$\phi = \frac{W_{\infty \rightarrow r}}{q}$$

Potencijal također iskazujemo jedinicom volt. Jakost električnog polja jednaka je po iznosu sili na probni naboj $E = F/q$, pa će osjenčana površina u E, r grafu predstavljati potencijal. Dogovorno je uzeto da je potencijal u beskonačnosti jednak nuli. Napon U između dviju točaka električnog polja je jednak radu koji je potrebno obaviti da probni naboj q dovedemo iz jedne točke (koordinate r_1) električnog polja u drugu (koordinate r_2).

$$U = \frac{W_{r_1 \rightarrow r_2}}{q}$$

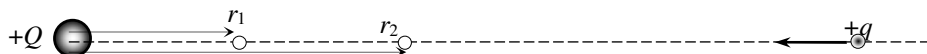
Napon U možemo iskazati kao razliku potencijala: $U = \phi_1 - \phi_2$.

Potencijal prema beskonačnosti na udaljenosti r od točkastog naboja Q jednak je:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \text{ ili } \phi = k \frac{Q}{r}$$

gdje je $k = 1/4\pi\epsilon_0$

Iz definicijske jednadžbe za napon možemo izračunati rad W koji je potrebno uložiti da naboj q premjestimo iz jedne točke električnog polja točkastog naboja Q ($r = r_2$) u drugu točku električnog polja ($r = r_1$).



$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \cdot q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \text{ ili } W = k Q q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Potencijal metalne kugle polumjera R : Metalna kugla polumjera R nabijena je količinom naboja Q .

Potencijal kugle je: $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$. Ako je $r > R$ kugla se ponaša kao točkasti naboj kada se nalazimo na

udaljenostima većim od polumjera kugle, dok je unutar kugle potencijal konstantan.

□ Veza između jakosti električnog polja i potencijala

Ako u električnom polju spojimo sve točke istog potencijala dobivamo *ekvipotencijalne plohe*. Njih je beskonačno mnogo ali je uobičajeno označiti samo neke od njih, na primjer one čiji se potencijali međusobno razlikuju za neku usvojenu vrijednost (primjerice za 1V). U bilo kojoj točki ekvipotencijalne plohe naboj ima istu potencijalnu energiju, pa se pomicanjem naboja po ekvipotencijali *ne obavlja rad*. Iz toga se može zaključiti da silnice električnog polja moraju biti okomite na ekvipotencijalne plohe. Općenito ekvipotencijalne plohe za istu razliku potencijala nisu ekvidistantne, nego su gušće ako je polje jače, a rjeđe ako je slabije, jer se pri većoj gustoći ploha brže mijenja potencijal. Budući da je potencijal skalarna veličina često je jednostavnije računati potencijal, nego određivati jakost električnog polja koje je vektorska veličina.

Promotrimo proizvoljno električno polje \vec{E} i označimo dvije vrlo bliske ekvipotencijalne plohe koje se razlikuju za potencijal $\Delta\varphi$. Neka je $\Delta\varphi > 0$, tj. krećimo se u smjeru rastućeg potencijala. Povucimo okomicu \vec{r} prema rastućem potencijalu. Sa Δr označimo razmak između ekvipotencijalnih ploha. Za tako bliske plohe možemo smatrati da se jakost električnog polja u prostoru između ploha ne mijenja odnosno da je $\vec{E} = \text{konst.}$ Za rad ΔW pri pomicanju naboja $+q$ od plohe potencijala φ do plohe potencijala $\varphi + \Delta\varphi$ možemo pisati:

$$\Delta W = F \Delta r = E q \Delta r \quad (1)$$

Izraz za rad možemo također izraziti pomoću napona tj. razlike potencijala:

$$\Delta W = U q = [\varphi - (\varphi + \Delta\varphi)] q$$

odnosno:

$$\Delta W = -q \Delta\varphi \quad (2)$$

Ako izjednačimo izraze (1) i (2) dobivamo:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta r}$$

Veličina $\Delta\varphi/\Delta r$ pokazuje promjenu potencijala u smjeru okomice i zove se *gradijent* potencijala. Negativni predznak dolazi zbog toga što su \vec{E} i \vec{r} suprotno orijentirani. Kada je promjena potencijala $\Delta\varphi$ veća za što manji Δr tada je električno polje jače pa možemo nacrtati "gušće" ekvipotencijalne plohe.

□ Gibanje nabijene čestice u homogenom električnom polju

U električnom polju na nabijenu česticu naboja Q djeluje sila $F = Q\vec{E}$ gdje je \vec{E} jakost električnog polja u točki polja gdje se čestica nalazi. Prema Newtonovu zakonu gibanja sila je jednaka produktu mase i akceleracije tj. $\vec{F} = m\vec{a}$. Uvrstimo li taj izraz u izraz za električnu silu dobijemo $m\vec{a} = Q\vec{E}$, pa je akceleracija nabijene čestice:

$$\vec{a} = \frac{Q\vec{E}}{m}$$

📖 Kapacitet

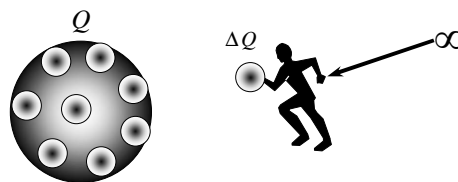
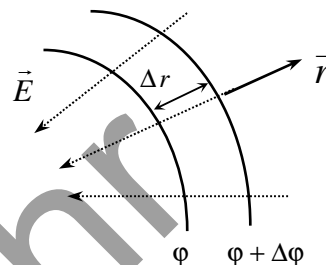
Promotrimo proces prenošenja naboja s jednog tijela na drugo. Neka su tijela jako udaljena tako da je utjecaj jednog tijela na drugo zanemariv.

Određenu količinu naboja ΔQ postupno prenosimo na tijelo obavljajući rad. U nekom trenutku na tijelu imamo naboj Q koji je jednak zbroju svih prenešenih naboja ΔQ . Naboj i potencijal svakog izoliranog vodiča međusobno su proporcionalni. Što se više naboja nalazi na vodiču to je njegov potencijal veći. Dakle, naboj vodiča je razmjernan potencijalu tj. $Q \propto \varphi$.

Uvedemo li konstantu proporcionalnosti C koju nazivamo kapacitetom vodiča možemo zapisati $Q = C\varphi$. Taj zaključak vrijedi za svaki izolirani vodič bez obzira na njegov oblik i veličinu. Kapacitet vodiča C je omjer njegova naboja Q i potencijala φ :

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

Dva vodiča koji su nabijeni količinama naboja suprotnih predznaka razdvojena izolatorom (dielektrikom) ili vakuumom nazivamo *kondenzatorima*, a površine vodiča na kojima se nalaze naboji $+Q$ i $-Q$ nazivamo armaturama kondenzatora. U kondenzatorima se mogu uskladištiti električni naboji. Električni kapacitet kondenzatora pokazuje koliko količinu naboja Q možemo uskladištiti na njegove armature ako između njih



postoji napon U . Što je više naboja na armaturama to je napon veći dakle, $Q = CU$. Kapacitet kondenzatora iskazujemo jednadžbom:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Mjerna jedinica za kapacitet je farad (znak: F). Ako se pri dovođenju naboja od 1 C potencijal vodiča poveća za 1 V tada vodič ima kapacitet od 1 F. Dakle, farad je omjer kulona i volta: $F = C/V$

Kapacitet C metalne kugle polumjera R iznosi: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ ili $C = R/k$. Kapacitet pločastog kondenzatora površine ploča A koje su razmaknute za d u kojem je dielektrik relativne permitivnosti ϵ_r iznosi:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

Spajanje kondenzatora

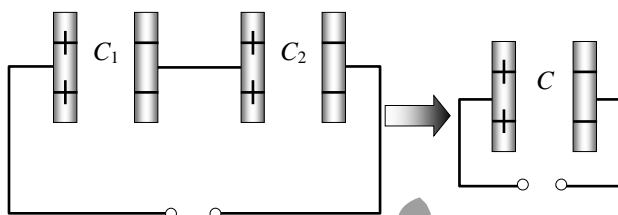
a) Serijsko spajanje

Naboj na kondenzatorima je jednak:

$$Q_1 = Q_2 = Q_{\text{ekv}}$$

Općenito kapacitet C n serijski spojenih kondenzatora možemo izračunati prema formuli:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$



Recipročna vrijednost kapaciteta ekvivalentnog kondenzatora jednaka je zbroju recipročnih vrijednosti kapaciteta svakog pojedinog kondenzatora.

a) Paralelno spajanje

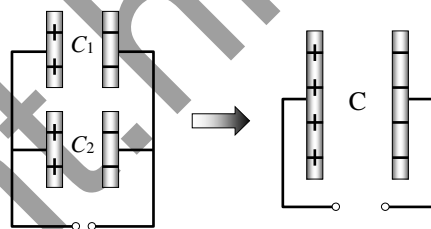
Kod paralelnog spoja je napon U na svim kondenzatorima

jednak, odnosno: $U_1 = U_2 = U$

Općenito za n paralelno spojenih kondenzatora možemo zapisati:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Kapacitet ekvivalentnog kondenzatora jednak je zbroju kapaciteta svakog pojedinog kondenzatora.



Energija sadržana u kondenzatoru

Energiju W elektrostatičkog polja sadržanu u kondenzatoru kapaciteta C , napona U i naboja Q je:

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} U^2 C$$

Gustoća energije w je energija W pohranjena u jedinici volumena V električnog polja E , te se definira kvocijentom $w = \frac{W}{V}$, pa je gustoća energije $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$. Izraz za gustoću energije neovisan je o geometrijskim veličinama već samo ovisi o kvadratu jakosti električnog polja, pa taj izraz vrijedi općenito za bilo koje električno polje.

STALNE STRUJE

Električna struja je usmjereno gibanje slobodnih nosioca naboja. Jakost električne struje I jednaka je količini naboja ΔQ koja prođe kroz presjek vodiča A u vremenskom intervalu Δt .

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Jakost električne struje mjeri se amperom (znak: A). Amper je osnovna jedinica SI sustava, pa se jedinica količine naboja kulon iskazuje kao $C=As$. Ako je jakost struje stalna pišemo: $I = Q/t$. Ako postoji razlika potencijala, onda se slobodni naboji gibaju u električnom polju jer na njih djeluje električna sila $\vec{F} = Q\vec{E}$. Jakosti struje općenito pridonosi gibanje i pozitivnih i negativnih slobodnih naboja:

$$I = \frac{\Delta Q^+}{\Delta t} + \frac{\Delta Q^-}{\Delta t}$$

Za mnoge vodiče, osobito metale, jakost struje kroz vodič pri stalnoj temperaturi razmjerna je naponu na njegovim krajevima. Ta se činjenica naziva Ohmovim zakonom koji glasi:

$$I = \frac{U}{R}$$

Jakost električne struje I je proporcionalna s naponom U a obrnuto proporcionalna s otporom R vodiča. Ako je na bateriju priključeno više trošila na svakom od njih postoji neki napon U i njime prolazi prolazi struja jakosti I . Umnožak otpora trošila i jakosti električne struje koja njime prolazi ($R \cdot I = U$) nazivamo još i padom

napona na tom trošilu. Omjer napona U i jakosti struje I električni je otpor R vodiča: $R = U/I$. Vodiči za koje vrijedi Ohmov zakon nazivaju se omski otpornici. Jedinica električnog otpora je om, (znak: Ω). Om je omjer volta i ampera: $\Omega = V/A$.

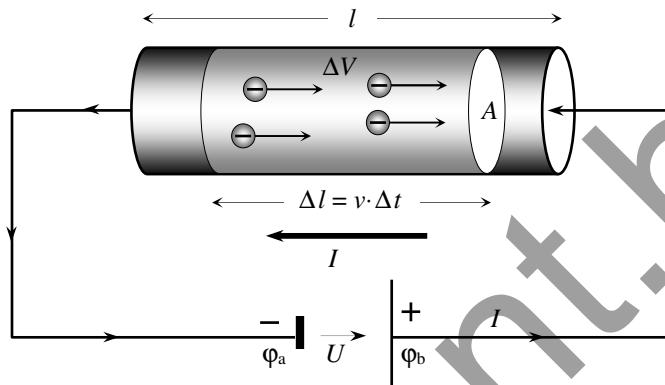
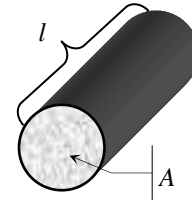
Električni otpor metalnog vodiča ovisi o njegovim geometrijskim obilježjima i svojstvu materijala. Tako vodič duljine l i površine presjeka A ima otpor:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

gdje je ρ karakteristično svojstvo materijala tzv. otpornost. Otpornost iskazujemo u om metrima ($\Omega \cdot m$).

□ Mikroskopski opis električne struje kroz metale

Zamislimo vodič duljine l i presjeka A . Nosioci naboja u metalnom vodiču su slobodni elektroni naboja $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$. Ako vodič priključimo na izvor stalnog napona U elektroni se počinju gibati pod utjecajem električnog polja tj. pod utjecajem sile $\vec{F} = e \cdot \vec{E}$. Elektroni bi se trebali gibati ubrzano. Međutim zbog međusobnih sudara, zbog sudara s ionima metala cijeli skup slobodnih elektrona ima neku prosječnu brzinu v , brzinu pomaka (tzv. driftnu brzinu), koja ima vrijednost oko 0,01 m/s.



Na slici je ucrtana samo usmjerena brzina, dok brzina (zbog termičkog gibanja) koja je znatno veća nije nacrtana. Promatramo mali dio volumena vodiča ΔV i uvedimo veličine: v = prosječna usmjerena brzina skupa slobodnih elektrona izazvana električnim poljem E ; N = broj slobodnih elektrona u volumenu vodiča ΔV ; e = naboj elektrona; l = duljina vodiča (m); A = površina presjeka vodiča (m^2); n = koncentracija (broj slobodnih elektrona u volumenu ΔV). Po definiciji koncentracija je jednaka omjeru broja slobodnih elektrona N i elementa volumena ΔV u kojem se oni nalaze, dakle: $n = N/\Delta V$. Ona ovisi o vrsti metala i iskazuje se u m^{-3} ; μ = pokretljivost elektrona - ovisi o vrsti metala: $\mu = v/E$. U elementu volumena $\Delta V = A \cdot \Delta l$ kroz presjek A prođe tijekom vremena Δt količina naboja $\Delta Q = N \cdot e$. Iz definicijske jednadžbe za jakost struje slijedi:

$$I = A v e n$$

Budući da je $v = \mu E$ dobijemo: $I = n e \mu A E$. Kako je $E = U/l$ proizlazi: $I = n e \mu \frac{A}{l} U$. Vidimo da je jakost električne struje I proporcionalna s naponom U . Veličinu koja povezuje struju I i napon U nazvamo vodljivost označavamo slovom: $G = n e \mu \frac{A}{l}$. Izdvojimo li iz napisanog izraza one njegove članove koji su neovisni o dimenzijama vodiča, možemo definirati tzv. specifičnu vodljivost (znak: σ) - veličinu koja će karakterizirati metal $\sigma = n e \mu$. S novo uvedenom oznakom vodljivost možemo zapisati:

$$G = \sigma \frac{A}{l}$$

Sada Ohmov zakon možemo iskazati jednakošću: $I = G U$, iz čega je: $G = I/U$.

Jedinicu za vodljivost nazivamo simens (znak: $S = A/V$). Veličina obrnuto proporcionalna vodljivosti zove se električni otpor $R = \frac{1}{G}$. Električni otpor mjerimo omima (znak: $\Omega = V/A$). Vidimo da električni (omski)

otpor ovisi o vrsti metala i o dimenzijama vodiča kojim prolazi struja jakosti I : $R = \frac{1}{n e \mu} \frac{l}{A}$. Ako uvedemo

veličinu koju nazivamo otpornost (znak: ρ) i koja je karakteristika metala $\rho = \frac{1}{n e \mu}$ onda električni otpor

možemo opisati izrazom: $R = \rho \frac{l}{A}$. Otpor je to veći ako je duljina vodiča l veća, a površina presjeka vodiča

A manja. Iz gornje jednadžbe vidimo da se otpornost ρ mjeri u $\Omega \cdot m$.

□ Ovisnost električnog otpora o temperaturi

Električni otpor ovisi o temperaturi vodiča, pa za isti prirast napona prirast struje postaje sve manji. Promjenu otpora s temperaturom možemo opisati temperaturnim koeficijentom otpora α , koji je karakteristika tvari:

$\alpha = \frac{1}{R} \frac{\Delta R}{\Delta T}$. Temperaturni koeficijent otpora pokazuje kolika je relativna promjena otpora ΔR pri promjeni

temperature ΔT za jedan kelvin. Ovisnost električnog otpora o temperaturi dana je jednadžbom:

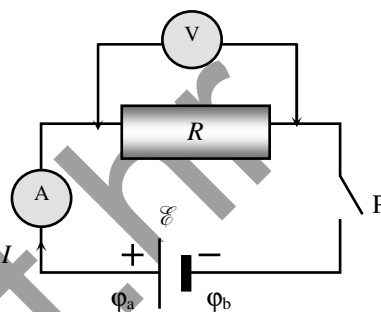
$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

ili za otpornost: $\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T)$, gdje su R_0 i ρ_0 otpor i otpornost kod 0°C , a R i ρ odgovarajuće veličine kod $T^\circ\text{C}$. Linearna ovisnost otpora o temperaturi vrijedi za čiste metale u području od oko -250°C do 100°C , a za više temperature ovisnost je kvadratična. Za čiste metale α je uvijek pozitivan. Pri vrlo niskim temperaturama otpor nekih metala iščezava i oni postaju supravodljivi. Za izolatore α je negativan.

□ Elektromotorni napon \mathcal{E}

Strujni krug sastoji se od izvora stalnog elektromotornog napona \mathcal{E} , otpornika otpora R , prekidača P, te mjernih instrumenata ampermetra A i voltmetra V. Zbog povijesnih razloga često se elektromotorni napon \mathcal{E} naziva elektromotorna sila.

Kada ne bi bilo neke vanjske energije koja bi neprestano održavala tu stalnu razliku potencijala struja bi vrlo brzo prestala teći. Za vraćanje naboja na viši potencijal, da bi se održala stalna razlika potencijala potreban je rad neke vanjske sile. To čine izvori elektromotornog napona (sile) pretvarajući neku energiju (na primjer kemijsku energiju baterije) u električnu energiju. Elektromotorni napon \mathcal{E} je jednak radu (W) po jedinici naboja (q) potrebnom da se naboj ponovo vrati u istu točku strujnog kruga. Mjeri se voltima.



$$\mathcal{E} = \frac{W_{a \rightarrow a}}{q}$$

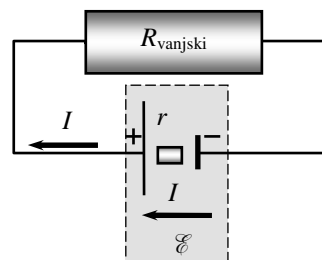
Izvor elektromotornog napona također ima svoj otpor kojeg nazivamo unutarnji otpor i označavamo slovom r . Energija koja se pretvara u električnu troši se u vanjskom krugu za transport naboja od točke potencijala ϕ_a do točke potencijala ϕ_b (tzv. pad napona na vanjskom otporu), te za transport naboja od točke potencijala ϕ_b do točke ϕ_a unutar izvora, da bi se održala stalna razlika potencijala.

$$\frac{W_{a \rightarrow a}}{q} = \frac{W_{a \rightarrow b}}{q} + \frac{W_{b \rightarrow a}}{q}$$

$$\mathcal{E} = U_{\text{vanjski}} + U_{\text{unutarnji}}$$

Ohmov zakon za zatvoreni strujni krug možemo zapisati u obliku:

$$\mathcal{E} = I \cdot R_{\text{vanjski}} + I \cdot r$$



Ako je vanjski otpor $R=0$ tada krugom prolazi maksimalna struja koju nazivamo strujom kratkog spoja I_{ks} :

$$I_{\text{ks}} = \mathcal{E} / r.$$

Dio energije po jedinici naboja koji se potroši u nekom elementu strujnog kruga nazivamo padom napona. Za otpornik otpora R , kojim prolazi struja jakosti I pad napona je: $U = I \cdot R$

📖 Kirchhoffova pravila i spajanje otpora

Prvo Kirchhoffovo pravilo

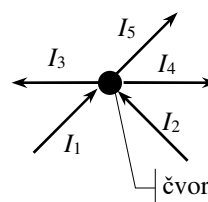
Svaku točku u strujnom krugu gdje se struja može granati u barem tri vodiča nazivamo čvorom. U bilo kojoj točki električnog kruga, pa prema tome i u bilo kojem čvoru, nema gomilanja naboja. Iz toga proizlazi da je količina naboja koja ulazi u čvor jednaka količini naboja koja iz njega izlazi.

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 + Q_5$$

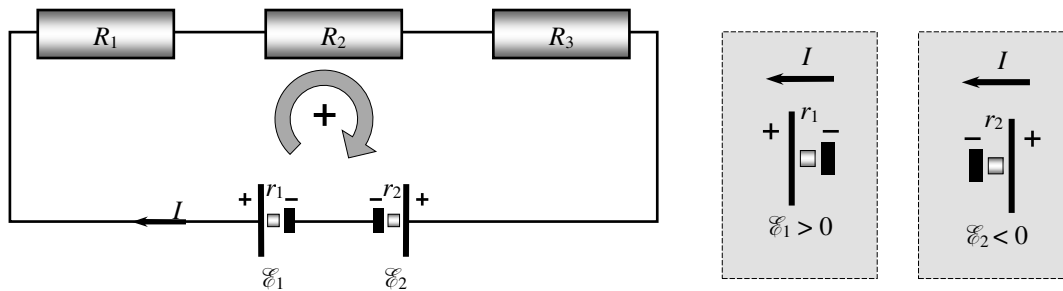
Ako tu jednadžbu podijelimo s intervalom vremena Δt dobivamo struje:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

Struja koja ulazi u čvor jednaka je zbroju struja koje iz njega izlaze. Ako strujama koje ulaze u čvor damo neki predznak, a strujama koje iz čvora izlaze suprotan predznak možemo Kirchhoffovo pravilo izreći:



$$\text{Algebarski zbroj struja u čvoru jednak je nuli. } \sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Drugo Kirchhoffovo pravilo

Drugo Kirchhoffovo pravilo je zapravo zakon očuvanja energije za zatvoreni strujni krug. Promotrimo zatvoreni strujni krug koji se sastoji od dvaju izvora elektromotornih napona i tri otpornika (crtež). Odaberimo smjer obilaska kruga u smjeru kazaljke na satu. Napomenimo, da općenito smjer obilaska može biti proizvoljno odabran. Izvor elektromotornog napona u strujnom krugu može pridonositi pojačanju ili smanjenju struje, već prema tome kako je u taj krug priključen izvor. Jednadžba strujnog kruga može se izraziti u pogodnom obliku ako elektromotornom naponu pripišemo predznak $\mathcal{E} > 0$ kad struja kroz izvor ima smjer od negativnog prema pozitivnom polu, i obrnuto. Ako kroz otpornike otpora R prolazi struja u smjeru koji je isti s odabranim, tada padovima napona na otporima pridajemo pozitivan predznak i obrnuto.

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 + I \cdot r_1 + I \cdot r_2$$

Općenito za zatvoreni strujni krug možemo zbog zakona o očuvanju energije izraziti drugo Kirchhoffovo pravilo:

U zatvorenom strujnom krugu je suma elektromotornih napona jednaka sumi padova napona.

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i = \sum_{j=1}^m I \cdot R_j$$

U desnu sumu ulaze padovi napona na unutarnjim otporima i na vanjskom otporu.

SPAJANJE OTPORNIKA**Serijsko spajanje**

Kod serijskog spoja kroz sve otpore prolazi *jednaka* struja. Sva tri tako spojena otpornika možemo zamijeniti s jednim otpornikom otpora R kojeg nazivamo ekvivalentnim otporom. Zakon očuvanja energije daje:

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

Budući je po Ohmovom zakonu $U = IR$, a struja je jednaka možemo pisati:

$$IR = IR_1 + IR_2 + IR_3$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

Općenito za n otpornika spojenih u seriju možemo zapisati:

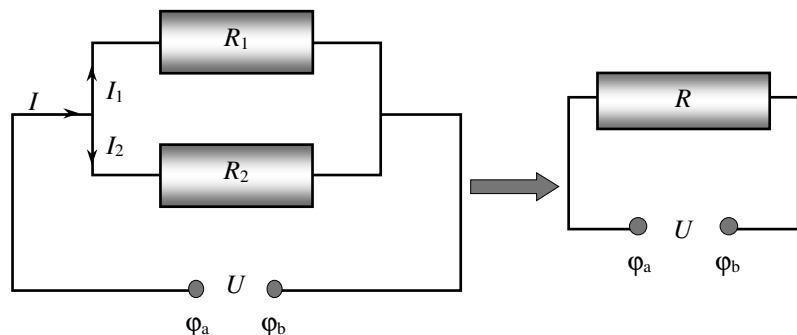
$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

Dakle, ekvivalentni otpor serijskog spoja jednak je zbroju svih otpora.

Paralelno spajanje

Na svim otporima spojenim paralelno je razlika potencijala jednaka, tj. svi otpori su na istom naponu. Izrazimo li struje preko Ohmovog zakona, uzevši u obzir jednakost napona na otporcima ($U_1 = U_2 = U$) dobivamo:

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



Općenito za n otpornika spojenih paralelno možemo zapisati: $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$. Dakle, kod paralelnog spoja recipročna vrijednost ekvivalentnog otpora jednaka je zbroju recipročnih vrijednosti pojedinih otpora.

📖 Rad i snaga električne struje

Kada električna struja protječe nekim trošilom, primjerice otpornikom otpora R , pretvara se u druge vrste energije (toplinsku, mehaničku, kemijsku). Koristeći definicije napona i struje, te Ohmov zakon:

$$U = \frac{W}{Q}; I = \frac{Q}{t}; U = I \cdot R,$$

možemo iskazati rad W električne struje:

$$W = U I t; W = I^2 R t; W = \frac{U^2}{R} t$$

Budući da je snaga rad izvršen u jedinici vremena $P = W/t$ dobivamo izraze za snagu:

$$P = U I; P = I^2 R; P = \frac{U^2}{R}$$

U praksi se često osim džula (J) upotrebljavaju još dvije jedinice za rad, odnosno električnu energiju:

$$\text{kilovatsat: } 1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

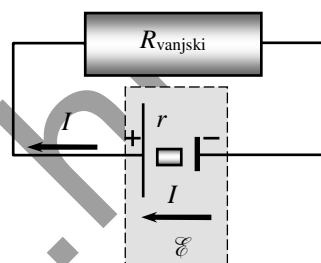
$$\text{elektronvolt: } 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Rad je $W = Q \cdot U$, pa jedinicu za rad džul (J) iskazujemo pomoću kulona i volta $J = C \cdot V$.

❑ Teorem o maksimalnoj snazi

Ako je otpornik otpora R , tzv. vanjski otpor, priključen na izvor elektromotornog napona \mathcal{E} unutarnjeg otpora r , tada se na vanjskom otporu razvija snaga $P = I^2 \cdot R$. Može se pokazati da će se na vanjskom otporniku otpora R razviti najveća snaga ako je vanjski otpor R jednak unutarnjem otporu r izvora elektromotornog napona \mathcal{E} u zadanom strujnom krugu tj. $R = r \Rightarrow P = P_{\text{maks}}$

Tu činjenicu nazivamo *teoremom o maksimalnoj snazi*.

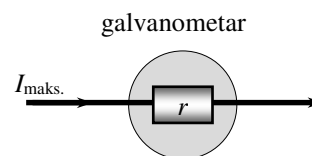


📖 Mjerni instrumenti

Instrumente koji, zakretom vodiča kojim prolazi struja u magnetskom polju, mogu mjeriti vrlo male struje i napone nazivamo galvanometrima.

Svaki galvanometar ima svoj unutarnji otpor r i kroz njega može prolaziti neka maksimalna struja $I_{\text{maks.}}$, odnosno može biti priključen na neki maksimalni napon U_{maks} a da se ne ošteti. Obično su za mjerni instrument zadana dva podatka, a treći se može izračunati iz Ohmovog zakona $U_{\text{maks.}} = r I_{\text{maks.}}$.

Želimo li mjeriti veće struje ($I_{\text{mj.}}$) od dopuštene struje $I_{\text{maks.}}$, moramo instrumentu paralelno spojiti otpor kroz koji će se višak struje odvesti. Taj otpornik nazivamo paralelni otpor ili šant otpora $R_{\text{š}}$. Budući da je galvanometar u paraleli sa šantom:

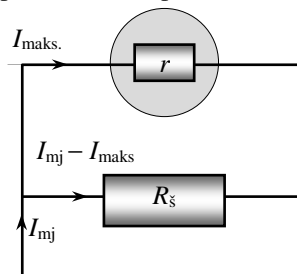


$$U_{\text{g}} = U_{\text{š}}$$

$$r I_{\text{maks.}} = R_{\text{š}} (I_{\text{mj.}} - I_{\text{maks.}})$$

$$R_{\text{š}} = \frac{r I_{\text{maks.}}}{I_{\text{mj.}} - I_{\text{maks.}}}$$

Otpor šanta je mali, da bi kroz njega mogla proći što veća struja.

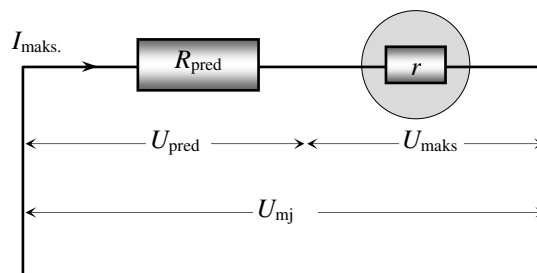


Ako želimo mjeriti veće napone ($U_{\text{mj.}}$) od maksimalnog napona $U_{\text{maks.}}$ galvanometru moramo serijski spojiti predotpor na kojem se troši dio napona. Otpor predotpora je relativno velik.

$$U_{\text{maks.}} = r I_{\text{maks.}}$$

$$U_{\text{mj.}} = U_{\text{pred.}} + U_{\text{maks.}}$$

$$R_{\text{pred.}} = \frac{U_{\text{mj.}} - U_{\text{maks.}}}{I_{\text{maks.}}}$$



Idealni voltmetri trebali bi imati beskonačno veliki otpor, tako da ne propuštaju struju. Idealni ampermetri trebali bi imati otpor jednak nuli. Voltmetri se spajaju paralelno u strujni krug, a ampermetri serijski.