Brojevi i algebra 1

1.1. Skupovi

Skup je osnovni matematički pojam koji se ne definira, ali je intuitivno jasan. Označavamo ga velikim tiskanim slovima, a njegove elemente pišemo unutar vitičastih $\{\}$ zagrada. U skupu možemo promatrati elemente te nalaziti elemente koji mu pripadaju ili ne pripadaju. Također, elemente promatramo i na više skupova te njihovu pripadnost jednom ili više skupova. Konačno, na skupovima se provode i operacije presjek, unija i razlika. Sve navedeno objasnit ćemo u sljedećoj tablici.

simbol	naziv	značenje	primjer
$\in$	element skupa	pripadnost skupu	$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $1 \in A$, $5 \notin A$
$\subseteq$	podskup	svaki element skupa A nalazi se u skupu B	$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \subseteq B$
$\subset$	pravi podskup	svaki element skupa A nalazi se u skupu B i skup B sadrži barem jedan element koji nije u skupu A	$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \subset B$
$\cap$	presjek	skup $A \cap B$ sadržava sve elemente koji pripadaju skupu A i skupu B	$A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $A \cap B = \{2,3\}$
$\cup$	unija	$A \cup B$ sadržava sve elemente koji pripadaju barem jednom od skupova A ili B	$A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4\}$
$\setminus$	razlika	operacija kojom se oduzimaju elementi jednog skupa iz drugog skupa	$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \setminus B = \{1\}$
$\varnothing$	prazan skup	skup bez elemenata	$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4,5\}$, $A \cap B = \varnothing$

$=$	jednakost skupova	$A \subseteq B$ i $B \subseteq A$	$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3\}$, $A = B$
A^C	komplement skupa	komplement skupa A sadrži sve elemente koji ne pripadaju skupu A	$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A \subset \mathbb{N}$, $A^C = \mathbb{N} \setminus \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

Primjer 1.

Neka je

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

$B = \{\text{skup svih prostih brojeva manjih od } 15\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$

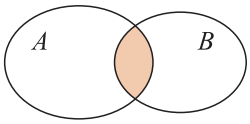
$C = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10x + 21 = 0\right\} = \{3,\ 7\}$.

Tada vrijedi:

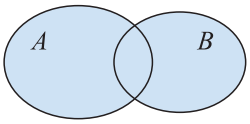
- Broj 2 pripada skupu A i skupu B, ali ne pripada skupu C. Kraće zapisujemo: $2 \in A$, $2 \in B$, $2 \notin C$.
- Ako broj 2 pripada i skupu A i skupu B, onda pripada i njihovom presjeku. Kako je broj 2 jedini zajednički element skupova A i B, vrijedi: $A \cap B = \{2\}$. Isto tako, $A \cap C = \varnothing$ i $B \cap C = \{3,7\}$.
- Elementi skupa C nalaze se u skupu B, pa kažemo da je skup C podskup skupa B. Kraće zapisujemo: $C \subseteq B$. Štoviše, skup C je pravi podskup skupa B, $C \subset B$.
- U skupu B se ne nalazi svaki element skupa A, pa A nije podskup skupa B. Kraće zapisujemo: $A \nsubseteq B$.
- $A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13\}$
- $A \cup C = \{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$
- $B \cup C = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$
- $A \setminus B = \{4,\ 6,\ 8\}$
- $A \setminus C = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$
- $B \setminus C = \{2,\ 5,\ 11,\ 13\}$
- $C \setminus B = \varnothing$.

Vezu među skupovima možemo prikazati i tzv. Vennovim dijagramom. Pogledajmo kako grafički ovim dijagramom prikazujemo presjek, uniju i razliku dvaju skupova.

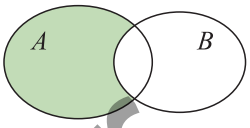
presjek skupova
$A \cap B$



unija skupova
$A \cup B$



razlika skupova
$A \setminus B$



Primjer 2.

Odredimo presjek, uniju i razliku skupova ako je
$A = \{$skup svih prirodnih brojeva većih od 3 i manjih od ili jednakih 12$\}$ i
$B = \{$skup svih prostih brojeva manjih od 15$\}$.

Zadane skupove možemo zapisati tako da nabrojimo njihove elemente:

$$A = \{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\} \quad \text{i} \quad B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}.$$

Brojevi 5, 7 i 11 su zajednički elementi zadanih skupova, pa vrijedi:

$$A \cap B = \{5,\ 7,\ 11\}.$$

S obzirom na to da unija skupova sadržava sve elemente koji pripadaju barem jednom skupu, slijedi:

$$A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13\}.$$

Odredimo sada $A \setminus B$, tj. iz skupa A oduzmimo sve elemente koji su u skupu B. Dobivamo:

$$A \setminus B = \{4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}.$$

1.2. Skupovi brojeva

Skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ i $\mathbb{R}$

Skup prirodnih brojeva je skup $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Posebno, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Vrijedi:

- Zbroj dvaju ili više prirodnih brojeva je prirodan broj.
- Umnožak dvaju ili više prirodnih brojeva je prirodan broj.
- Ako neki prirodni broj zbrajamo s nulom, rezultat će biti taj isti broj.
- Ako neki prirodni broj pomnožimo brojem 1, rezultat će biti isti taj broj.
- Komutativnost zbrajanja i množenja prirodnih brojeva:
$$a+b=b+a, \quad a\cdot b=b\cdot a.$$
- Asocijativnost zbrajanja i množenja prirodnih brojeva:
$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$
- Distributivnost množenja prema zbrajanju:
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Skup cijelih brojeva je skup $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Uočimo da je $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$. Za skup cijelih brojeva vrijede ista svojstva kao i za skup prirodnih brojeva.

Za skup $\mathbb{Z}$ dodatno vrijedi:

- Razlika dvaju cijelih brojeva je cijeli broj.
- Ako cijeli broj pomnožimo s -1, dobijemo njemu suprotan broj.

Primjer 1.

Broj 5 je prirodan i cijeli, dok je broj -5 cijeli, ali nije prirodan.

U prethodnom primjeru promatrali smo brojeve 5 i -5. Osim toga što su oba cijela, oni su i **suprotni** jer im je zbroj jednak nuli.

Skup racionalnih brojeva je skup $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$. Riječima, čine ga svi brojevi koji se mogu zapisati u obliku razlomka, tako da su brojnik i nazivnik cijeli brojevi pri čemu nazivnik mora biti različit od nule.

Primjer 2.

Racionalni brojevi su primjerice $\frac{1}{2}$, $0.35 = \frac{7}{20}$, 3, $1.333\ldots = 1.\dot{3} = \frac{4}{3}$, -6, $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$.

U primjeru vidimo da neki decimalni brojevi pripadaju skupu racionalnih brojeva. Promotrimo o kakvim se decimalnim brojevima radi.

Primjer 3.

Prikažimo, ako je moguće, sljedeće decimalne brojeve u obliku razlomka.

a) 0.85 **b)** $1.\dot{2}\dot{5}$ **c)** 2.79418514...

a) Broj 0.85 je decimalan konačan i u obliku razlomka glasi:

$$0.85 = \frac{85}{100} = \frac{17}{50}.$$

b) Broj $1.\dot{2}\dot{5}$ je beskonačan periodičan broj: $1.\dot{2}\dot{5} = 1.25252525\ldots$
Rastavimo zadani decimalni broj na cjelobrojni i decimalni dio:

$$1.25252525\ldots = 1 + 0.25252525\ldots$$

Neka je $0.25252525\ldots = x$. S obzirom na to da se iza decimalne točke ponavljaju dvije znamenke, pomnožimo x sa 100 i sredimo dobivenu jednadžbu:

$$\begin{aligned} 0.25252525\ldots &= x \quad / \cdot 100 \\ 25.25252525\ldots &= 100x \\ 25 + 0.25252525\ldots &= 100x \\ 25 + x &= 100x \\ 25 &= 99x \\ x &= \frac{25}{99} \end{aligned}$$

Dakle, $0.\dot{2}\dot{5} = \frac{25}{99}$, a kako je $1.\dot{2}\dot{5} = 1 + 0.\dot{2}\dot{5}$ slijedi da je $1.\dot{2}\dot{5} = 1 + \frac{25}{99} = \frac{124}{99}$.

c) Broj 2.79418514... ne možemo prikazati u obliku razlomka jer je decimalan neperiodičan.

Uočimo da je $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Za skup racionalnih brojeva vrijede ista svojstva kao i za skup cijelih brojeva.

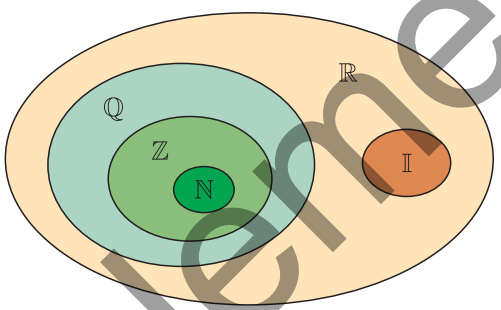
Skupu iracionalnih brojeva pripadaju svi brojevi koji nisu racionalni. To su brojevi koji u decimalnom zapisu imaju beskonačno znamenaka koje nisu periodične. Označavamo ga sa $\mathbb{I}$.

Primjer 4.

Iracionalni brojevi su primjerice $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$, $\sqrt{57} = 7.54983443\ldots$, π, e, $\frac{\pi}{2}$, $1.78421375\ldots$.

Skup realnih brojeva je skup $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, odnosno ovom skupu pripadaju svi racionalni i iracionalni brojevi.

Vrijedi: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Za skup realnih brojeva vrijede ista svojstva kao i za skup racionalnih brojeva. Uočimo konačno da za skupove brojeva vrijedi:



$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$$

Primjer 5.

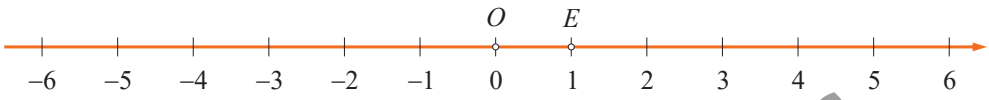
Odredimo kojim skupovima pripadaju sljedeći brojevi.

a) 7 **b)** -3 **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\sqrt{15}$

a) $7 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Riječima, broj 7 je prirodni, cijeli, racionalan i realan.
b) $-3 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Riječima, broj -3 je cijeli, racionalan i realan.
c) $\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Riječima, broj $\frac{2}{5}$ je racionalan i realan.
d) $\sqrt{15} \in \mathbb{I}, \mathbb{R}$. Riječima, broj $\sqrt{15}$ je iracionalan i realan.

Prikaz realnih brojeva na brojevnom pravcu

Brojevni pravac je pravac na kojemu je svakom realnom broju jednoznačno pridružena točka. **Ishodište** brojevnog pravca je točka $O(0)$, a **jedinična točka** je točka $E(1)$. Dužina $\overline{OE}$ naziva se **jedinična dužina**.



Pokažimo na sljedećem primjeru kako se označavaju točke pridružene realnim brojevima na brojevnom pravcu.

Primjer 6.

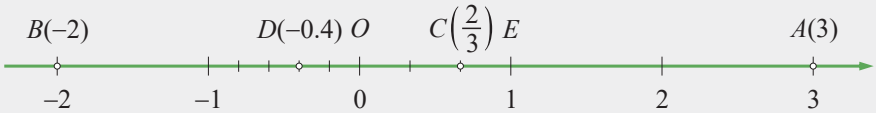
Na brojevnom pravcu nacrtajmo točke $A(3)$, $B(-2)$, $C\left(\frac{2}{3}\right)$, $D(-0.4)$.

Nacrtajmo brojevni pravac i nacrtajmo zadane točke.

Točka $A(3)$ pridružena je broju 3, a točka $B(-2)$ pridružena je broju -2.

Zatim imamo točku $C\left(\frac{2}{3}\right)$. Broj $\frac{2}{3}$ nalazi se između cijelih brojeva 0 i 1. Zbog toga ćemo dužinu OE podijeliti na 3 jednaka dijela te odrediti gdje se nalazi broj $\frac{2}{3}$, odnosno točka $C\left(\frac{2}{3}\right)$.

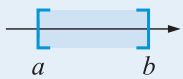
Točku $D(-0.4)$ nalazimo tako da -0.4 pretvorimo u razlomak: $-0.4 = -\frac{2}{5}$. Broj -0.4 nalazi se između cijelih brojeva -1 i 0 pa ćemo dužinu između tih dvaju brojeva podijeliti na pet jednakih dijelova i pronaći broj $-\frac{2}{5}$, odnosno točku $D(-0.4)$.



Intervali

Interval je skup realnih brojeva koji sadrži sve realne brojeve između granica intervala.

Razlikujemo zatvoreni, poluotvoreni ili poluzatvoreni i otvoreni interval. Sljedeća tablica opisuje navedene intervale.

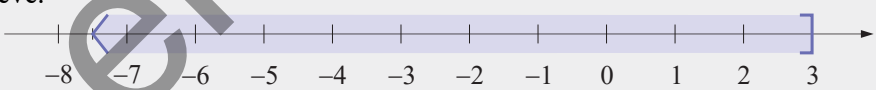
intervalski zapis	naziv intervala	grafički prikaz	skupovni prikaz
$[a,\ b]$	zatvoreni		$\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$
$[a,\ b\rangle$	poluotvoreni ili poluzatvoreni		$\{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$
$\langle a,\ b]$	poluotvoreni ili poluzatvoreni		$\{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$
$\langle a,\ b\rangle$	otvoreni		$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Primjer 7.

Odredimo koliko u intervalu $\left\langle -\frac{15}{2},\ 3\right]$ ima:

a) prirodnih brojeva **b)** cijelih brojeva.

Prikažimo grafički interval i na njemu istaknimo prirodne brojeve i cijele brojeve.



Iz grafičkog prikaza vidimo da zadani interval sadrži

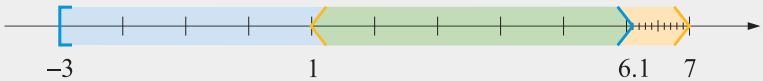
a) tri prirodna broja, to su 1, 2 i 3
b) deset cijelih brojeva, to su −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2 i 3.

Primjer 8.

Neka je $A = [-3,\ 6.1\rangle$ i $B = \langle 1,\ 7\rangle$. Odredimo:

a) presjek $A \cap B$ **b)** uniju $A \cup B$ **c)** razliku $A \setminus B$ **d)** razliku $B \setminus A$.

Dane intervale prikažimo grafički:



Iz grafičkog prikaza vidimo da je

a) $A \cap B = \langle 1, 6.1 \rangle$ **b)** $A \cup B = [-3, 7\rangle$

c) $A \setminus B = [-3, 6.1\rangle \setminus \langle 1, 7\rangle = [-3, 1]$ **d)** $B \setminus A = \langle 1, 7\rangle \setminus [-3, 6.1\rangle = [6.1, 7\rangle$.

Apsolutna vrijednost realnog broja

Apsolutnu vrijednost realnog broja definiramo na sljedeći način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Uočimo da je $|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Geometrijski gledano, apsolutna vrijednost nekog broja predstavlja udaljenost realnog broja od 0 na brojevnom pravcu.

Primjer 9.

$|15| = 15,\ |-15| = 15,\ |\sqrt{3}| = \sqrt{3},\ |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}.$

Vrijedi:

1) $\sqrt{x^2} = |x|$ **2)** $|x| \geq 0$ **3)** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ **4)** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

5) $|x + y| \leq |x| + |y|$ **6)** $|x - y| = |y - x|$ **7)** $|x^n| = |x|^n$.

Primjer 10.

Odredimo vrijednost izraza $|2a - b|$ ako je $a = -1$ i $b = 3$.

Uvrstimo li vrijednosti od a i b u zadani izraz, dobivamo:

$$|2 \cdot (-1) - 3| = |-2 - 3| = |-5| = 5.$$

Primjer 11.

Zapišimo izraz $|1 - \pi|$ bez znaka apsolutne vrijednosti.