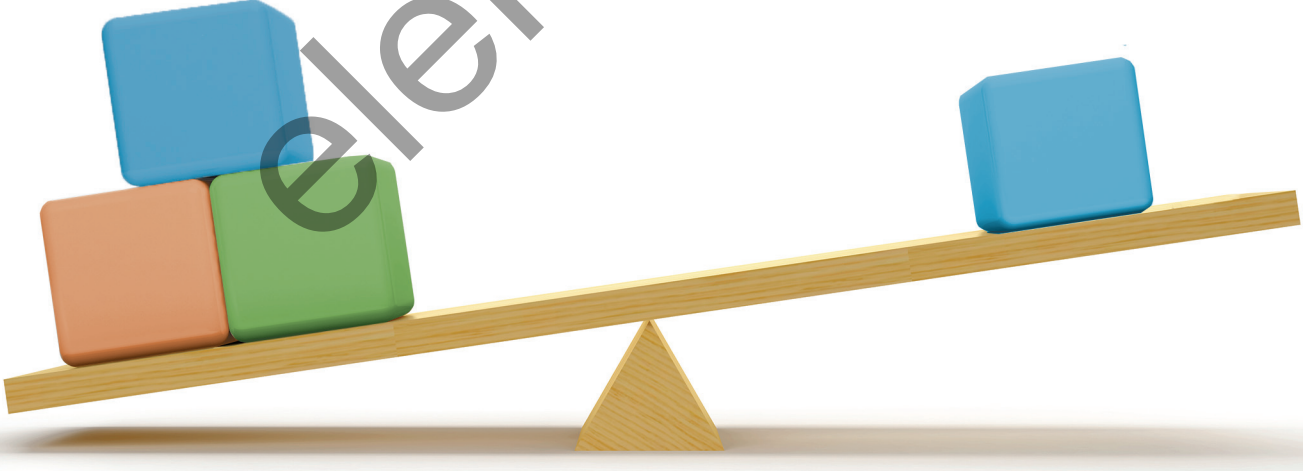
1

SKUP RACIONALNIH BROJEVA



1. Skup racionalnih brojeva

Do dolaska u 7. razred susreli smo se sa skupom prirodnih brojeva i skupom cijelih brojeva. Skup prirodnih brojeva označavamo s **N**:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}.$$

Važno svojstvo skupa prirodnih brojeva jest postojanje sljedbenika. Ako je n neki prirodni broj, onda je broj $n + 1$ njegov sljedbenik. Svi prirodni brojevi osim broja 1 imaju i svog prethodnika. Ako je n neki prirodni broj veći od 1, onda je broj $n - 1$ njegov prethodnik.

Zbroj i umnožak bilo kojih dvaju prirodnih brojeva uvijek je prirodni broj. Kažemo da je skup **N** zatvoren s obzirom na računske operacije zbrajanja i množenja.

Broj 0 nije prirodni broj.

Skup **N** proširujemo s nulom i negativnim brojevima do skupa cijelih brojeva **Z**:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

Time smo dobili skup koji je zatvoren ne samo s obzirom na zbrajanje i množenje nego i s obzirom na oduzimanje.

Broj 0 je cijeli broj koji nije ni pozitivan ni negativan. Svaki cijeli broj osim nule ima svoj suprotni broj, odnosno za svaki $m \neq 0$ postoji $-m$ tako da je $m + (-m) = 0$.

Zbroj, umnožak i razlika dvaju cijelih brojeva je cijeli broj. Kažemo da je skup **Z** zatvoren za računske operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja.

Skup **Z** dalje proširujemo do skupa racionalnih brojeva **Q**, tj. do skupa svih brojeva koje možemo zapisati u obliku razlomka:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

Skup racionalnih brojeva zatvoren je s obzirom na zbrajanje, oduzimanje i množenje, a skup racionalnih brojeva bez nule zatvoren je i s obzirom na dijeljenje. Na narednim stranicama upoznat ćemo se s osnovnim svojstvima racionalnih brojeva.

1.1. Jednakost racionalnih brojeva

Racionalni brojevi

Racionalni brojevi su količnici cijelih brojeva. Ako su m i n cijeli brojevi i $n \neq 0$, tada je količnik $m : n$ racionalan broj.

Racionalne brojeve pišemo u obliku razlomaka

$$m : n = \frac{m}{n}.$$

Jednakost racionalnih brojeva

Racionalni brojevi $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ su jednaki ako je $a \cdot d = b \cdot c$.

I obrnuto, ako je $a \cdot d = b \cdot c$, onda je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c, \quad b, d \neq 0.$$

Skraćivanje i proširivanje racionalnih brojeva

Izravno iz definicije jednakosti racionalnih brojeva slijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}, \quad k \neq 0.$$

Brojnik i nazivnik svakog razlomka možemo pomnožiti s bilo kojim, od nule različitim brojem. Kažemo da smo razlomak **proširili**. Proširivanjem dobijemo isti racionalni broj.

Istu jednakost čitamo zdesna ulijevo:

Ako brojnik i nazivnik razlomka imaju neki jednak faktor, tim faktorom ih možemo podijeliti.

Tada kažemo da smo razlomak **skratili**.

Primjer 1.

Jesu li jednaki razlomci $\frac{121}{222}$ i $\frac{212}{333}$?

Ne, ti razlomci nisu jednaki jer je $121 \cdot 333 \neq 222 \cdot 212$. To i ne moramo provjeravati množenjem. Naime, posljednja znamenka umnoška s lijeve strane je 3, a posljednja znamenka umnoška s desne strane 4, pa su ti umnošci različiti brojevi.

Primjer 2.

Odredi sve cijele brojeve za koje vrijedi jednakost

$$\frac{5}{x} = \frac{y}{3}.$$

Dana je jednakost ekvivalentna jednakosti $x \cdot y = 15$, gdje su x i y cijeli brojevi te $x \neq 0$. Imamo dakle ove mogućnosti:

$$x = 1,\ y = 15, \quad x = 15,\ y = 1, \quad x = 3,\ y = 5, \quad x = 5,\ y = 3.$$

Ne zaboravimo negativne brojeve, pa je ukupno 8 rješenja. Možemo ih zapisati kao uređene parove:

$(1, 15)$, $(15, 1)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, $(-1, -15)$, $(-15, -1)$, $(-3, -5)$, $(-5, -3)$.

Za prvi uređeni par imali bismo $\frac{5}{1} = \frac{15}{3}$, za drugi $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, itd.

Primjer 3.

Brojniku i nazivniku razlomka $\frac{11}{41}$ treba dodati isti broj tako da se dobije razlomak $\frac{3}{8}$. O kojem se broju radi?

Iz jednakosti $\frac{11+x}{41+x} = \frac{3}{8}$ slijedi $8 \cdot (11 + x) = 3 \cdot (41 + x)$. Rješenje te

jednadžbe je $x = 7$.

Zaključujemo: Brojniku i nazivniku razlomka $\frac{11}{41}$ valja dodati 7 kako bismo dobili dobili razlomak $\frac{3}{8}$.

Provjerimo to: $\frac{11+7}{41+7} = \frac{18}{48} = \frac{3 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{3}{8}$.

Primjer 4.

Skrati razlomke:

a) $\frac{222}{555}$ b) $\frac{123\,123}{234\,234}$.

a) Lako je uočiti $\frac{222}{555} = \frac{2 \cdot 111}{5 \cdot 111}$. Broj 111 zajednički je faktor i brojnika i nazivnika, pa ga stoga možemo ispustiti. Tako smo razlomak skratili, te je $\frac{222}{555} = \frac{2}{5}$.

b) U ovom je zadatku nešto teže uočiti zajednički faktor brojnika i nazivnika. Možda uočite da je to broj 3. No postoji li još koji?

Primijetimo da su oba broja, i onaj u brojniku, i onaj u nazivniku šesteroznamenkasti, a zapisani su tako da je broj što ga tvore prve tri znamenke još jednom dopisan. Takve brojeve možemo pisati na sljedeći način:

$$123\,123 = 123 \cdot 1\,000 + 123 = 123 \cdot 1\,001$$

$$234\,234 = 234 \cdot 1\,000 + 234 = 234 \cdot 1\,001.$$

Dakle imamo:

$$\frac{123\,123}{234\,234} = \frac{123 \cdot 1\,001}{234 \cdot 1\,001} = \frac{123}{234} = \frac{41}{78}.$$

Zadatci za vježbu 1.1.

1. Jesu li jednaki razlomci:

   a) $\frac{246}{369}$ i $\frac{642}{963}$

   b) $\frac{1234}{2345}$ i $\frac{2345}{3456}$

   c) $\frac{303}{505}$ i $\frac{333}{555}$

   d) $\frac{2121}{3232}$ i $\frac{4343}{5454}$?

2. Odredi sve cijele brojeve a i b za koje vrijedi:

   a) $\frac{a}{7} = \frac{3}{b}$

   b) $\frac{a-1}{3} = \frac{2}{b+1}$

   c) $\frac{a-1}{b+1} = \frac{3}{4}$.

3. Brojniku i nazivniku razlomka $\frac{11}{14}$ treba dodati isti cijeli broj tako da se dobije razlomak $\frac{5}{6}$. Koji je to broj?

4. Brojniku i nazivniku razlomka $\frac{15}{43}$ treba oduzeti isti broj tako da se dobije razlomak $\frac{1}{8}$. Koji je to broj?

5. Brojniku razlomka $\frac{15}{17}$ treba dodati, a nazivniku oduzeti isti broj kako bi se dobio razlomak $\frac{3}{5}$. Koji je to broj?

6. Skrati razlomke:

   a) $\frac{660}{1386}$

   b) $\frac{1848}{5148}$

   c) $\frac{2772}{8190}$.

7. Skrati razlomke:

   a) $\frac{121212}{151515}$

   b) $\frac{121121121}{132132132}$.

8. Izračunaj:

$$\left(1+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51}\right)\cdot\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51}+\frac{1}{61}\right)-\left(1+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51}+\frac{1}{61}\right)\cdot\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51}\right).$$

9. Izračunaj:

$$1-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}.$$

1.2. Nejednakost racionalnih brojeva

Svaki se racionalni broj može zapisati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje je m cijeli, a n prirodni broj. To proizlazi izravno iz definicije jednakosti racionalnih brojeva.

Nejednakost racionalnih brojeva

Neka su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, $a, c \in \mathbf{Z}$, $b, d \in \mathbf{N}$ racionalni brojevi. Tada je $\frac{a}{b}$ veći od $\frac{c}{d}$ ako i samo ako je $a \cdot d > b \cdot c$.

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d > b \cdot c.$$

S druge strane, broj $\frac{a}{b}$ manji je od broja $\frac{c}{d}$ ako i samo ako je $a \cdot d < b \cdot c$.

Za svaka dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ vrijedi jedna i to samo jedna od triju mogućnosti:

$$\text{ili je } \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Još jedna mogućnost uspoređivanja racionalnih brojeva može se provesti na sljedeći način:

Uspoređivanje racionalnih brojeva

Racionalni broj $\frac{a}{b}$ veći je od racionalnog broja $\frac{c}{d}$ ako i samo ako je $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0$.

Primjer 1.

Koji je od brojeva $\frac{1234}{1235}$ i $\frac{1235}{1236}$ veći?

Do odgovora možemo doći na nekoliko načina. Najprije možemo usporediti umnoške $1234 \cdot 1236 = 1525224$ i $1235 \cdot 1235 = 1525225$ i vidjeti da je drugi veći. Zaključujemo da je prvi razlomak manji.

Ovo množenje četveroznamenkastih brojeva najradije bismo izveli malim džepnim kalkulatorom. Ako već imamo kalkulator, onda bismo mogli provesti i dijeljenje, pa bi bilo:

$$\frac{1234}{1235} = 0.999190283; \quad \frac{1235}{1236} = 0.999190938.$$

I opet vidimo da je prvi razlomak manji.

No, ako nemamo pri ruci kalkulator, a ne volimo velike račune, do rješenja možemo doći s malo dosjetljivosti.

Uočimo najprije kako su oba ova razlomka vrlo blizu jedinici.

Pa koji je bliži?

$$1 - \frac{1234}{1235} = \frac{1235 - 1234}{1235} = \frac{1}{1235}$$

$$1 - \frac{1235}{1236} = \frac{1236 - 1235}{1236} = \frac{1}{1236}.$$

Zaključujemo:

Razlika broja 1 i prvog razlomka veća je od razlike broja 1 i drugog razlomka pa je prvi razlomak manji. Drugim riječima, drugi je razlomak bliži jedinici pa je veći.

Primjer 2.

Poredaj po veličini brojeve:

$$\frac{4}{5},\quad \frac{14}{15},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{7}{10},\quad \frac{23}{30}.$$

Mogli bismo ići redom pa uspoređivati dva po dva od šest razlomaka: $\frac{4}{5} < \frac{14}{15}$ jer je $4 \cdot 15 < 5 \cdot 14$, zatim $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$ jer je $4 \cdot 6 < 5 \cdot 5$ itd.

No to je očito dug posao. Možemo ga skratiti tako da sve razlomke proširivanjem najprije svedemo na jednak nazivnik pa ih onda poredamo prema veličini brojnika. Tako dobijemo:

$$\frac{24}{30},\quad \frac{28}{30},\quad \frac{25}{30},\quad \frac{20}{30},\quad \frac{21}{30},\quad \frac{23}{30}.$$

I evo konačno razlomaka poredanih po veličini, od najmanjeg prema najvećem:

$$\frac{2}{3},\quad \frac{7}{10},\quad \frac{23}{30},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{14}{15}.$$

Primjer 3.

Odredi najveći cijeli broj x za koji vrijedi nejednakost

$$\frac{3}{5} < \frac{13}{x}.$$

Dana je nejednakost ispunjena za sve brojeve x za koje je $\frac{13}{x} - \frac{3}{5} > 0$, odnosno $\frac{65-3x}{5x} > 0$.

Primijetimo kako je x pozitivan broj. U suprotnom bismo imali netočnu nejednakost pozitivnog broja $\frac{3}{5}$ i negativnog $\frac{13}{x}$. Pozitivan je onda i broj $5x$. A da bi i razlomak $\frac{65-3x}{5x}$ bio pozitivan, mora biti pozitivan i brojnik.

Mora dakle biti $65 - 3x > 0$.

Najveći cijeli broj x koji zadovoljava ovaj uvjet, tj. ovu nejednakost je $x = 21$.

Primjer 4.

Koje su tvrdnje istinite?

1. Ako je $a < b$, onda je $a^2 < b^2$.
2. Ako je $\frac{a}{b} < 0$, onda je $a \cdot b < 0$.
3. Ako je $a < b$, onda je i $-a < -b$.
4. Ako je $a > b$, onda je $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

1. Ova tvrdnja općenito nije istinita. Dovoljno je navesti primjer: $-3 < 1$, ali $9 < 1$ nije istinito. Slično tako $-5 < -3$, no $25 > 9$.

2. Tvrdnja je točna, umnožak dvaju brojeva istog je predznaka kao i njihov količnik.

3. Netočno. Ako je $a < b$, onda je $-a > -b$. Primjerice, $2 < 3$, ali $-2 > -3$.

4. Netočno. Evo primjera: $3 > 2$, ali $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.