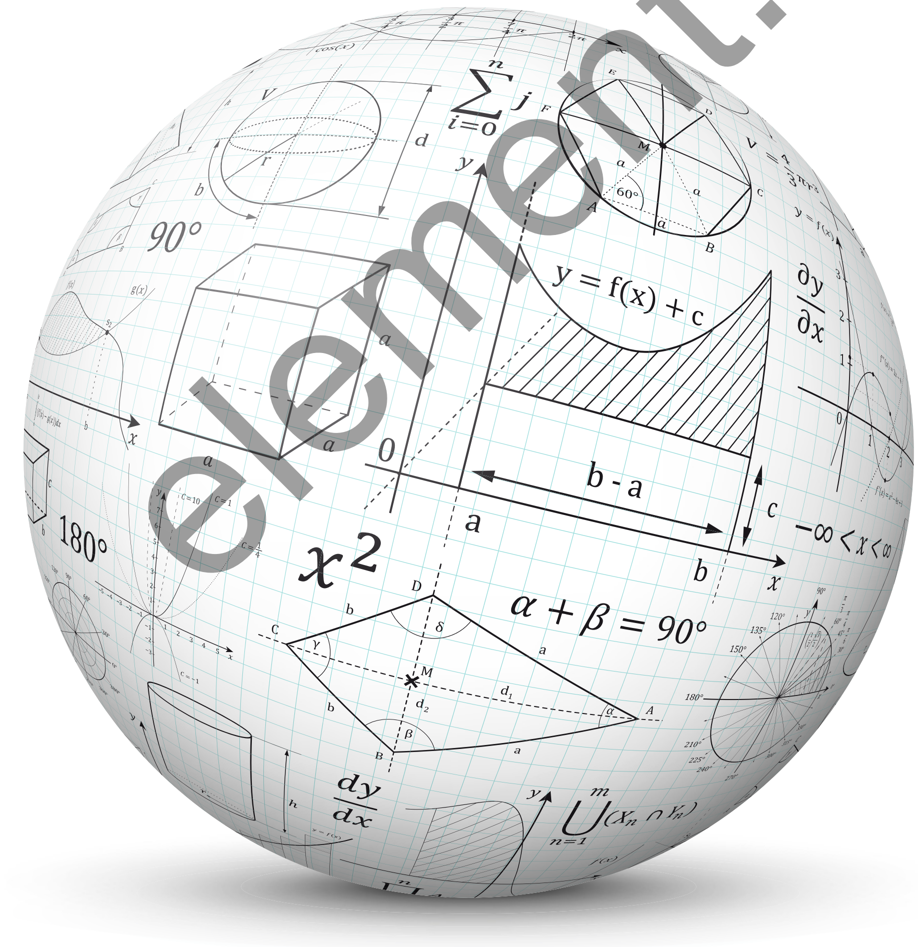
Grafički prikazi 3



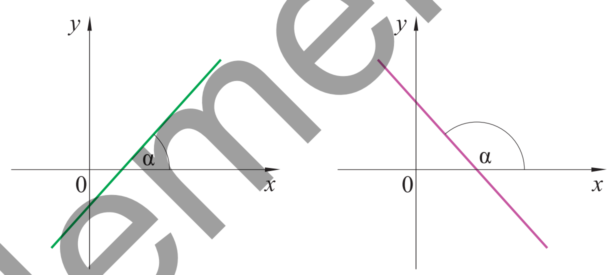
3.1. Ponovimo

Tri su načina osnovna za prikazivanje podataka:

- tablični – unos podataka u tablicu,
- grafički – prikaz podataka u koordinatnom sustavu. Grafički prikaz omogućava nam uočavanje međusobne ovisnosti mjerenih veličina.
- algebarski – određivanje jednadžbe iz zadanih podataka ako takva uopće postoji. Primjerice: linearna funkcija, kvadratna, eksponencijalna, logaritamska itd.

Grafičko prikazivanje rezultata nekog eksperimenta ili određene situacije daleko je preglednije od prikaza pomoću tablice. U matematici se grafički prikazi funkcija obično crtaju u pravokutnom koordinatnom sustavu. Na os x se uobičajeno zapisuje varijabla a na os y funkcija. Primjerice, graf linearne funkcije $y = kx + l$ je pravac koeficijenta smjera k koji određuje nagib pravca. Kada je k pozitivno, pravac s pozitivnim smjerom osi x zatvara šiljasti kut. Kada je k negativno, tada je kut tupi. Nagib pravca određuje kut koji je povezan s koeficijentom smjera jednadžbom:

$$k = \mathrm{tg}\,\alpha.$$



Fizikalne veličine koje se mijenjaju tijekom vremena nazivamo varijablama, dok veličine koje su tijekom vremena stalne i koje su karakteristike sustava nazivamo parametrima sustava.

Grafikon crtamo prema podatcima koje dobivamo mjerenjem ili računanjem. Obično se na osi ordinata nalazi neka fizikalna veličina koja se mijenja tijekom vremena koje se bilježi na osi apscisa.

3.2. Primjeri

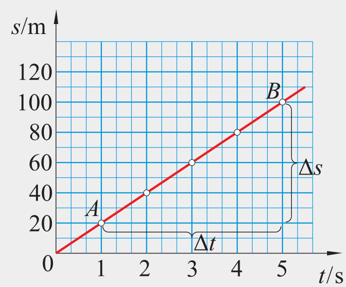
Primjer 1.

Promotrimo gibanje vozila tijekom vremena zapisujući prijeđeni put s svaku sekundu u tablicu.

vrijeme t/s	put $s/\ \mathrm{m}$
0	0
1	20
2	40
3	60
4	80
5	100

Osim tabličnog prikaza koje nije zorno, gibanje možemo predočiti i grafički, i to tako da se tablične vrijednosti prenesu u koordinatni sustav. Na apscisnu os nanosimo vrijeme t, a na ordinatnu os prijeđeni put s. Parovi vrijednosti s i t predstavljaju točke koje prikazuju gibanje.

Kako bi što bolje prikazali neko gibanje, potrebno je uzimati što kraće vremenske intervale u kojima se mijenja položaj materijalne točke (u našem slučaju, položaj vozila). Spojimo li točke, vidimo da je to pravac kroz ishodište. Koeficijent smjera pravca (nagib) određujemo tako da odredimo koji je prirast puta Δs za određeni vremenski interval Δt. Negativne vrijednosti na osima s i t ne prikazujemo jer smo počeli mjerenje tek od trenutka $t = 0$.



Da nađemo nagib našeg pravca odaberimo na grafu dvije udaljene točke A i B koje možemo lako očitati i na apscisnoj osi i na ordinatnoj osi. Primjerice, s grafa odredimo Δs i Δt:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(100-20)\ \mathrm{m}}{(5-1)\ \mathrm{s}} = 20\ \mathrm{m/s}.$$

U matematici pravac prikazujemo jednadžbom $y = kx + l$ gdje k određuje nagib pravca a l odrezak na osi y. Gibanje našeg vozila prikazali smo pravcem kroz ishodište pa nema odreska na ordinatnoj osi. Koeficijent smjera tog pravca je $20\ \mathrm{m/s^{-1}}$ što predstavlja brzinu.

Usporedite izraze:

Matematika	$y = kx$
Fizika	$s = vt$

Jednadžbu koju dobijemo za ovisnost veličine s o veličini t možemo zapisati kao: $s = 20t$. Vodeći računa o mjernim jedinicama ovisnost puta s o vremenu t zapisujemo: $s = (20\ \mathrm{m/s}) \cdot t$.

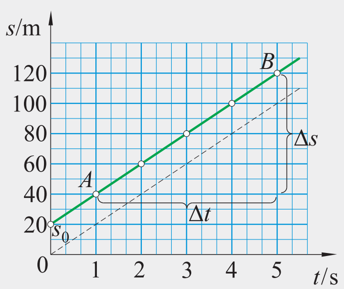
Primjer 2.

Kako bi izgledali tablica i grafikon da smo počeli mjeriti vrijeme u trenutku kada se vozilo nalazilo na poziciji 20 m od ishodišta? Kažimo da su početni uvjeti drukčiji. Naime, u trenutku $t = 0$ s put iznosi $s_0 = 20$ m.

vrijeme t/s	put s/m
0	20
1	40
2	60
3	80
4	100
5	120

Kao što smo prije napomenuli, pravac u matematici prikazujemo jednadžbom $y = kx + l$ gdje k određuje nagib pravca a l odrezak na osi y.

Nagib našeg pravca je isti kao i prije. Odrezak na ordinatnoj osi je 20 m, to je početni put s_0. Koeficijent smjera k je 20 m s^{-1}, što predstavlja brzinu.



Usporedite izraze:

Matematika	$y = kx + l$
Fizika	$s = vt + s_0$

Jednadžbu koju dobijemo za ovisnost veličine s o veličini t možemo zapisati kao:

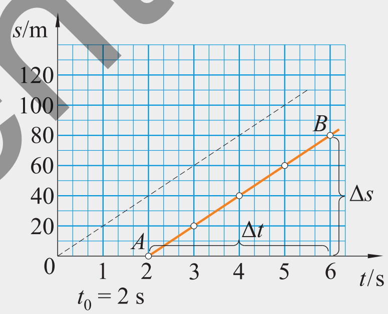
$$s = 20t + 20$$
$$s = (20\ \mathrm{m/s}) \cdot t + 20\ \mathrm{m}.$$

Primjer 3.

Kako bi izgledali tablica i grafikon da smo počeli mjeriti vrijeme prije nego što smo ga počeli bilježiti? Na poziciji $s = 0$ m sat bi već pokazivao neko vrijeme, primjerice $t_0 = 2$ s.

vrijeme t/s	put s/ m
2	0
3	20
4	40
5	60
6	80

Nagib našeg pravca je isti kao i prije, samo vrijeme t nije nula već mu moramo oduzeti početno vrijeme koje kod nas iznosi 2 s. Koeficijent smjera k je 20 m s^{-1}, što predstavlja brzinu.



Usporedimo li izraze:

Matematika $y = kx + l$

Fizika $s = v(t - t_0) = vt - vt_0$

Odrezak na ordinatnoj osi je −40 m.

Jednadžbu koju dobijemo za ovisnost veličine s o veličini t možemo zapisati kao: $s = 20(t - 2)$, odnosno

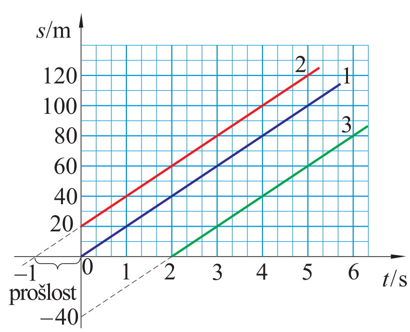
$$s = 20t - 40$$

$$s = (20 \text{ m/s}) \cdot t - 40 \text{ m}.$$

Usporedba primjera 1., 2. i 3.

Pretpostavimo da su se vozila u prošlosti, sadašnjosti i budućnosti jednako gibala.
Budući da su nagibi pravaca jednaki, sva tri vozila imaju jednake brzine, ali su početni uvjeti različiti.

$$s = vt + s_0.$$



Početni uvjeti za vozilo iz primjera 1.:

U trenutku $t_0 = 0$ vozilo se nalazi na poziciji $s_0 = 0$.

$$s = vt.$$

Početni uvjeti za vozilo iz primjera 2.:

U trenutku $t_0 = 0$ vozilo se nalazi na poziciji $s_0 = 20$ m. Ono je krenulo jednu sekundu ranije nego vozilo 1.

$$s = 20t + 20$$
$$s = \left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)t + 20\ \mathrm{m}.$$

Početni uvjeti za vozilo iz primjera 3.:

Vozilo krene 2 sekunde kasnije nego vozilo 1, pa se umjesto vremena t zapisuje $(t-2)$.

$$s = 20(t-2)$$
$$s = \left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(t - 2\ \mathrm{s}).$$

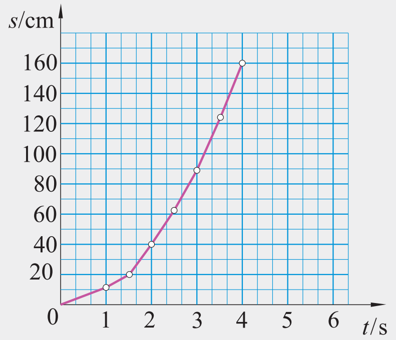
Primjer 4.

Tijelo pustimo kliziti niz kosinu. Želimo naći odnos prijeđenog puta s i vremena t. Mjerenja su prikazana tablicom:

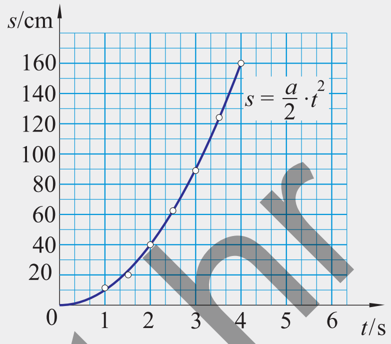
s/cm	t/s
10.2	1.0
22.2	1.5
40.6	2.0
62.5	2.5
88.8	3
123.7	3.5
160.0	4.0

Unesimo podatke mjerenja u grafički prikaz. Na apscisnu os nanosimo vrijeme – nezavisno promjenljivu veličinu, a na ordinatnu os put – zavisno promjenljivu veličinu. Veličina dijelova skale na jednoj i drugoj osi ne mora biti jednaka, ali brojčane vrijednosti moraju biti tako odabrane da se svi podatci mogu prikazati. Osi moraju biti obilježene simbolom pripadne veličine i mjernom jedinicom koja se piše iza kose crte. Primjerice, put iskazan u centimetrima $s/$ cm. Podatke na grafu prikazujemo točkama koje tada okružimo primjerice kružićima. Kod crtanja ne spajamo točke ravnom crtom već nastojimo pogoditi matematičku ovisnost, te krivulju (ili pravac) povlačimo tako da je podjednaki broj točaka (kružića) iznad i ispod krivulje. Zbog toga neće sve točke ležati na krivulji!

neispravno nacrtan graf



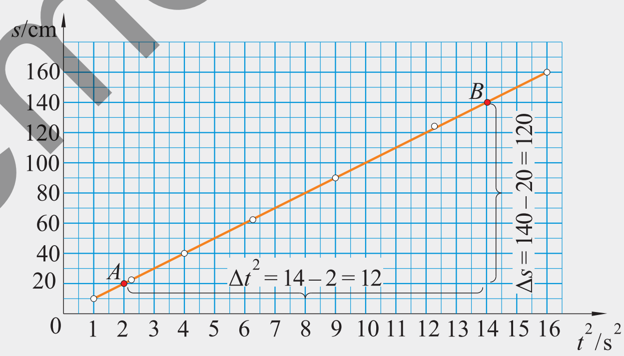
ispravno nacrtan graf



Ispitujući eksperimentalnu krivulju teško je sa sigurnošću uočiti identitet te krivulje (parabola, hiperbola itd.) osim kada je grafički prikaz pravac. Najlakše je prepoznati pravac, odnosno linearnu ovisnost. Zbog toga, u analizi grafičkog prikaza treba eksperimentalne podatke unositi u takav graf da se dobije pravac.

Unesimo naše podatke u grafički prikaz koji na osima ima odabran put s i kvadrat vremena t^2.

s/cm	t/s	t^2/s^2
10.2	1.0	1.00
22.2	1.5	2.25
40.6	2.0	4.00
62.5	2.5	6.25
88.8	3	9.00
123.7	3.5	12.25
160.0	4.0	16.00



Dobili smo pravac pa sa sigurnošću možemo reći da je put proporcionalan kvadratu vremena:

$$s \propto t^2.$$

To je dakle jednoliko ubrzano gibanje za koje vrijedi:

$$s = \frac{a}{2}t^2$$

gdje je a akceleracija.

Iz nagiba grafa možemo odrediti akceleraciju kojom se tijelo gibalo. Kako to učiniti?

Jednadžba pravca je $y = kx$, gdje je k nagib pravca prema apscisnoj osi. Umjesto oznake a za nagib pravca stavili smo k jer slovom a označavamo akceleraciju. Usporedimo li izraze:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$y = k \cdot x$$

vidimo da je nagib pravca $k = \frac{1}{2} a \implies a = 2k$.

Da nađemo nagib našeg pravca, odaberimo na grafu dvije udaljene točke A i B koje možemo lako očitati i na apscisnoj osi i na ordinatnoj osi. Primjerice: točka $A(2, 20)$ i $B(14, 140)$.

Iz navedenog proizlazi:

$$k = \frac{\Delta s}{\Delta t^2} = \frac{120 \text{ cm}}{12 \text{ s}^2} = 10 \text{ cm/s}^2$$

pa je $a = 2k = 2 \cdot 10 \text{ cm/s}^2 = 20 \text{ cm/s}^2$. Tako smo došli do podatka za akceleraciju tijela tj. veličinu koju nismo mogli izravno mjeriti.

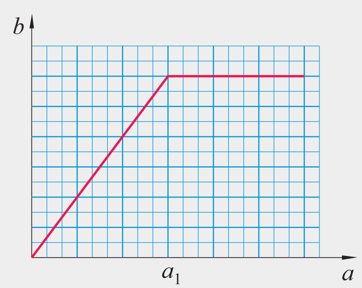
Primjer 5.

Na dijagramu je prikazana ovisnost veličine b o veličini a. Što nam govori taj dijagram ako je:

a) a = vrijeme, b = put

b) a = vrijeme, b = brzina

c) a = sila, b = produljenje opruge?



Iz dijagrama vidimo da porastom veličine a raste i veličina b od $a = 0$ do $a = a_1$.

Za $a > a_1$, veličina b se ne mijenja promjenom veličine a.

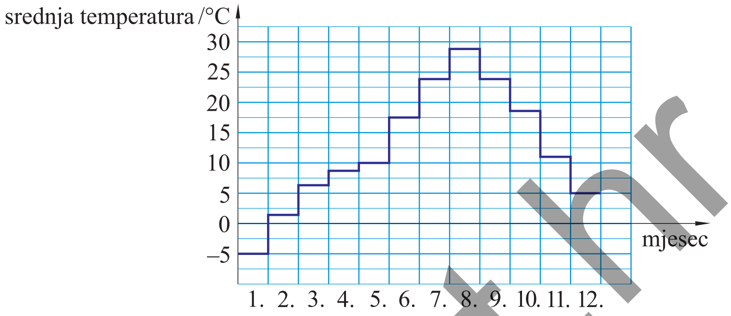
a) Tijelo se giba do trenutka t_1, a zatim stoji.

b) Brzina raste do trenutka t_1, a nakon toga se brzina ne mijenja, tijelo se giba stalnom brzinom.

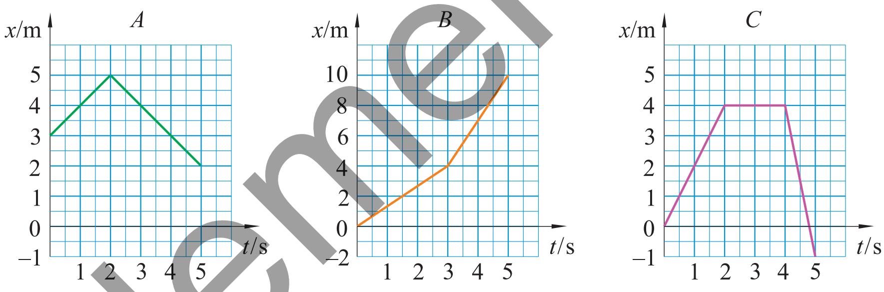
c) Djelovanjem sile opruga se produljuje sve do sile F_1. Za sile veće od F_1 tijelo nema više elastična svojstva (npr. opruga je pukla).

3.3. Zadatci

1. Iz grafičkog prikaza odredi prosječnu temperaturu zraka u rujnu, te kada je promjena temperature bila najmanja.



2. Crtež prikazuje grafove ovisnosti položaja o vremenu za tri tijela A, B i C koja se gibaju duž osi x. Pretpostavite da su u trenutku t = 0 tijela nepomična.



Odgovorite na sljedeća pitanja i objasnite vaše odgovore:

a) Gdje se nalazi tijelo A nakon 3 s?

b) Koje tijelo najranije dođe u položaj x = 2 m?

c) Koje tijelo najkasnije dođe u položaj x = 4 m?

d) Koliki je pomak tijela C tijekom 5 s?

e) Koliki put prijeđe tijelo C tijekom 5 s?

f) Koje tijelo ima najveću brzinu tijekom vremenskog intervala od 5 s.

g) Koje tijelo mijenja orijentaciju tijekom gibanja?

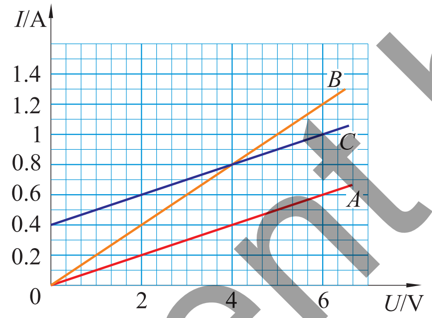
h) Vraća li se koje tijelo u ishodište i kada se to događa?

i) Koje tijelo je najviše udaljeno od ishodišta u trenutku t = 2 s?

3. Cijena vožnje taksijem sastoji se od početne cijene koja se plaća bez obzira na duljinu vožnje i cijene koja ovisi o prijeđenim kilometrima. Vožnju od 7.5 km treba platiti 75 kn a vožnju od 5 km 55 kn. Nacrtajte dijagram ovisnosti cijene o broju kilometara i odredite startnu cijenu vožnje.

4. Nakon 90 prijeđenih kilometara pokazivač stanja goriva u automobilu pokazivao je 33 L. Nakon 330 km stanje goriva bilo je 18 L. Kolika je prosječna potrošnja goriva ovog automobila? Ako pun spremnik sadrži 48 L goriva, funkcijom opišite potrošnju goriva u odnosu na prijeđene kilometre i prikažite je grafički.

5. Iz dijagrama odredite ovisnost struje o naponu. Napišite jednadžbu $I = f(U)$ za A, B i C slučaj.



6. Za opis pravocrtnih gibanja služi elektromagnetsko tipkalo s pomičnom trakom. To je uređaj koji opisuje točan položaj tijela pri pravocrtnom gibanju u vremenskim intervalima od 0.02 s. Traku smo vukli rukom i dobili histogram gibanja. Poslagali smo dijelove vrpci na kojima je jednak broj udaraca idući slijeva nadesno poštujući vremenski slijed. Nacrtajte $s-t$ i $v-t$ dijagram gibanja ruke.