3

MATRICE

Linearne operatore zbog njihove relativne jednostavnosti izučavamo izdvojene od ostalih operatora.

Jedno od važnih svojstava linearnog operatora, koje trivijalno slijedi iz definicije linearnosti je:

Neka su X, Y vektorski prostori nad istim poljem skalara Φ, $(x) = x_1, x_2, \ldots, x_n$ baza prostora X; $z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \in X$.

Ako je $a : X \to Y$ linearan operator, onda je

$$\begin{aligned} a(z) &= a(C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n) \\ &= C_1a(x_1) + C_2a(x_2) + \ldots + C_na(x_n). \end{aligned}$$

Dakle, *vrijednost* $a(z)$ *linearnog operatora* a *na proizvoljno zadanom vektoru* $z \in X$ *bit će poznata ako su poznate vrijednosti operatora* a *na vektorima baze.* Tu činjenicu želimo iskoristiti da na jednostavan način konkretni linearni operator potpuno predstavimo novom tvorevinom – *matricom*.

Neka je $(y) = y_1, y_2, \ldots, y_n$ baza prostora Y. Operator a prima vrijednosti iz skupa Y. Zato su $a(x_1), a(x_2), \ldots, a(x_n)$ elementi prostora Y, pa se mogu izraziti kao linearne kombinacije njegove baze.

Postoje, dakle, skalari $a_{ij} \in \Phi$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ takvi da je

$$\begin{aligned} a(x_1) &= a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \\ a(x_2) &= a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \\ &\vdots \\ a(x_n) &= a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m. \end{aligned}$$

Brojeve a_{ij} $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ zapišimo u shemu tako da koeficijente u razvoju vektora $a(x_j)$ po bazi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pišemo u j-ti stupac $(j = 1, 2, \ldots, n)$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ovu shemu označit ćemo A i zvati je *matrica linearnog operatora* a u paru baza (x), (y). Za matricu A kažemo da ima m *redaka* i n *stupaca* ili da je tipa $(m; n)$. Kad nam to bude zgodno, za matricu A upotrijebit ćemo i oznaku $(a_{ij})_{(m,n)}$.

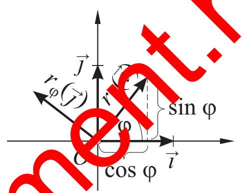
Neka su zadani vektorski prostori X i Y i njihove baze $(x) = x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $(y) = y_1, y_2, \ldots, y_m$. Na navedeni način možemo svakom linearnom operatoru: $X \to Y$ pridružiti matricu tipa $(m; n)$ i obrnuto, za svaku matricu A tipa $(m; n)$ možemo naći linearni operator $a : X \to Y$, kome je ona pridružena u zadanom paru baza. Matricu, dakle, možemo smatrati zapisom linearnog operatora: $X \to Y$ u zadanom paru baza na prostorima X i Y.

Ako je $X = Y$ i $(x) = (y)$, onda ćemo govoriti o bazi, umjesto o paru baza.

Primjer 3.1.

Treba napisati matricu operatora r_φ rotacije za kut φ (vidi primjer 2.3) u kanonskoj bazi prostora.

▶ Kanonska baza u D_2 je $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$.



Slika 19.

r_φ preslikava $\vec{\imath}$ u vektor $r_\varphi(\vec{\imath})$, čije komponente vidimo na slici 19

$$r_\varphi(\vec{\imath}) = \cos\varphi \cdot \vec{\imath} + \sin\varphi \cdot \vec{\jmath}.$$

Slično:

$$r_\varphi(\vec{\jmath}) = -\sin\varphi \cdot \vec{\imath} + \cos\varphi \cdot \vec{\jmath}.$$

Dakle, matrica rotacije, tj. matrica operatora r_φ, u bazi $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ je

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \quad ◀$$

Primjer 3.2.

Neka je e_1, e_2 kanonska baza prostora $\mathbf{R}^2$ i $a : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ linearni operator takav da je

$$a(e_1) = (-1, 2, 0), \quad a(e_2) = (3, 0, -2).$$

a) Treba naći $a(x)$ ako je $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$.

b) Treba napisati matricu A pridruženu linearnom operatoru a u paru kanonskih baza prostora $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$.

▶ a) $x = (\xi_1, \xi_2) = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$

$$\begin{aligned} a(x) &= a(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2) = \xi_1 a(e_1) + \xi_2 a(e_2) \\ &= \xi_1(-1, 2, 0) + \xi_2(3, 0, -2) \\ &= (-\xi_1 + 3\xi_2, 2\xi_1, -2\xi_2) \end{aligned}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad ◀$$

Primjer 3.3.

Neka je X n-dimenzionalan vektorski prostor. U proizvoljnoj bazi $(x) = x_1, x_2, \ldots, x_n$ prostora X treba naći:

a) matricu operatora identiteta $i : X \to X$ definiranog formulom

$$i(x) = x, \quad \forall x \in X$$

b) matricu nul-operatora $o : X \to X$ definiranog formulom

$$o(x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

▶ U primjeru 2.6 dokazali smo da su operatori i, o linearni. Možemo im zato u bazi (x) (u paru baza (x), (x)) pridružiti matricu.

a) Operator i djeluje na vektore baza ovako:

$$\begin{aligned} i(x_1) &= x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_n \\ i(x_2) &= x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_n \\ &\vdots \\ i(x_n) &= x_n = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 1 \cdot x_n \end{aligned}$$

pa je njegova matrica

$$I = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ stupaca}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 1\\0\\0\\ \vdots \\0 \end{bmatrix}}\right\} n \text{ redaka} \qquad ◀$$

Operatori i, o bili su tako posebne vrste da izgled njihovih matrica nije ovisio o izboru baze prostora X. Općenito nije tako. U različitim parovima baza vektorskih prostora X i Y istom linearnom operatoru: $X \to Y$ bit će pridružene različite matrice.

Nećemo ispitivati vezu između matrica koje istom linearnom operatoru pridružujemo u raznim parovima baza, nego ćemo tijekom razmatranja smatrati da je par baza prostora X i Y zadan.

Vektorski prostor $\mathcal{M}_{(m;n)}$

Neka su i dalje tijekom čitavog ovog poglavlja X, Y vektorski prostori nad istim poljem Φ, $(x) = x_1, x_2, \dots, x_n$ baza u X, $(y) = y_1, y_2, \dots, y_m$ baza u Y.

Označimo s $\mathcal{M}_{(m;n)}$ skup svih matrica tipa $(m; n)$. Svaka matrica $A \in \mathcal{M}_{(m;n)}$ predstavlja matricu nekog linearnog operatora $a : X \to Y$. U zadanom paru baza ponekad ćemo govoriti o matrici linearnog operatora, izostavljajući spominjanje para baza, kad će iz preostalog teksta biti vidljivo o kojim se bazama radi.

Cilj nam je definirati jednakost dviju matrica i računske operacije s matricama. Operacije ćemo uvesti na način da nam mogu biti korisne, tj. tako da odgovaraju operacijama koje vršimo s funkcijama – linearnim operatorima. Operaciju koja odgovara zbrajanju linearnih operatora zvat ćemo zbrajanje matrica i opravdati takav naziv svojstvima te operacije. Množenju linearnog operatora skalarom odgovarat će množenje matrice skalarom. Skup svih matrica istog tipa vektorski je prostor s obzirom na te dvije operacije. To ističemo zato jer ta činjenica znatno olakšava račun s matricama. Tako dugo, dok se radi o zbrajanju matrica i množenju skalarom, možemo primjenjivati svojstva (A), (M) na koja smo kod računanja već navikli. Tek kod matričnog množenja, operacije koja odgovara kompoziciji linearnih operatora, morat ćemo biti oprezniji kod računanja jer za njega neće vrijediti zakon komutacije.

Prirodno je dvije matrice smatrati različitima ako su one matrice različitih linearnih operatora u istom paru baza. Polazeći od toga, definirat ćemo jednakost dviju matrica.

Dva linearna operatora $a : X \to Y$ i $b : X \to Y$, kao funkcije s istom domenom i kodomenom, jednaki su ako i samo ako je

$$a(x) = b(x), \quad \forall x \in X.$$

Tada se vrijednosti od a i b podudaraju i na svim elementima baze (x) prostora X. Zbog jednostavnosti uzimamo $(x) = x_1, x_2, x_3$; $(y) = y_1, y_2$. Tada je

$$a(x_j) = b(x_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Neka je u zadanom paru baza

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{(2;3)}$$

matrica linearnog operatora a te

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = (b_{ij})_{(2;3)}$$

matrica linearnog operatora b.

To znači da j-ti stupac matrice A sadrži koeficijente razvoja vektora $a(x_j)$ po bazi (y)

$$a(x_j) = a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2, \quad j = 1, 2, 3$$

i da je

$$b(x_j) = b_{1j}y_1 + b_{2j}y_2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Operatori a i b su jednaki, pa imaju iste vrijednosti na svakom od vektora $x_j \in X$ baze (x). Dakle je za $j = 1, 2, 3$

$$\begin{gathered} a(x_j) = b(x_j) \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 = b_{1j}y_1 + b_{2j}y_2 \\ (a_{1j} - b_{1j})y_1 + (a_{2j} - b_{2j})y_2 = 0, \end{gathered}$$

a to zbog linearne nezavisnosti vektora baze (y) povlači

$$\begin{aligned} & a_{1j} - b_{1j} = 0 \\ & a_{2j} - b_{2j} = 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

ili kraće pisano

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Iz toga slijedi da ovakvu definiciju jednakosti matrica možemo smatrati prirodnom:

Jednakost matrica

Neka su $A = (a_{ij})_{(m;n)}$ i $B = (a_{ij})_{(m;n)}$ dvije matrice *istog tipa* $(m;n)$.
Kažemo da su matrice A i B *jednake*, tj. $A = B$ ako vrijedi

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

U ovoj definiciji više se ne spominju linearni operatori. Matrice počinjemo promatrati kao samostalne objekte.

Na skupu matrica $\mathcal{M}_{(m;n)}$ definirat ćemo i neke računske operacije tako da odgovaraju operacijama na linearnim operatorima.

Poznato je kako zbrajamo funkcije s istom domenom i kodomenom: ako su $a : X \to Y$ i $b : X \to Y$ linearni operatori, onda njihovim zbrojem $c = a + b$ smatramo takav operator $c : X \to Y$ da je

$$c(x) = a(x) + b(x), \quad \forall x \in X.$$

Operator c je također linearan (dokazano u teoremu 2.1). Dakle, njemu je također u paru baza moguće pridružiti matricu.

Neka su

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij})_{(2;3)} && \text{matrica operatora } a \\ B &= (b_{ij})_{(2;3)} && \text{matrica operatora } b \\ C &= (c_{ij})_{(2;3)} && \text{matrica operatora } c \end{aligned}$$

sve u istom paru baza (x), (y).

Iz jednakosti operatora $c = a + b$ slijedi njihova jednakost na svakom elementu baze (x).

Za $j = 1, 2, 3$

$$c(x_j) = a(x_j) + b(x_j),$$

tj.

$$c_{1j}y_1 + c_{2j}y_2 = a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + b_{1j}y_1 + b_{2j}y_2,$$

a odavde je zbog linearne nezavisnosti vektora baze (y)

$$\begin{aligned} c_{1j} &= a_{1j} + b_{1j} \\ c_{2j} &= a_{2j} + b_{2j}, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

ili kraće

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Zbroj matrica

Neka su $A = (a_{ij})_{(m;n)}$ i $B = (b_{ij})_{(m;n)}$ matrice iz skupa $\mathcal{M}_{(m;n)}$. Reći ćemo da je matrica $C = (c_{ij})_{(m;n)} \in \mathcal{M}_{(m;n)}$ *zbroj matrica* A i B te pisati

$$C = A + B$$

ako vrijedi

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Zbroj je definiran samo za matrice istog tipa.

Pomnožimo li linearan operator $a : X \to Y$ skalarom $\lambda \in \Phi$, dobit ćemo operator $c = \lambda a : X \to Y$ koji je ponovno linearan, po teoremu 2.1, pa mu se može u zadanom paru baza pridružiti matrica.

Pri tome je operator λc definiran ovako

$$c(x) = \lambda a(x), \quad \forall x \in X.$$

Označimo s $A = (a_{ij})_{(2;3)}$ matricu linearnog operatora a, s $C = (c_{ij})_{(2;3)}$ matricu linearnog operatora c u istom paru baza (x), (y).

Iz $c = \lambda a$ slijedi

$$c(x_j) = \lambda a(x_j), \quad j = 1, 2, 3$$

$$c_{1j}y_1 + c_{2j}y_2 = \lambda(a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2), \quad j = 1, 2, 3,$$

a tada zbog linearne nezavisnosti vektora y_1, y_2, y_3

$$c_{1j} = \lambda a_{1j}$$

$$c_{2j} = \lambda a_{2j}, \quad j = 1, 2, 3$$

ili kraće

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Umnožak skalara i matrice

Neka su $A = (a_{ij})_{(m;n)} \in \mathcal{M}_{(m;n)}$ i $\lambda \in \Phi$ skalar. Reći ćemo da je matrica $C = (c_{ij})_{(m;n)}$ *umnožak broja* λ *i matrice* A i pisati

$$C = \lambda \cdot A$$

ako vrijedi

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Primjer 3.4.

Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nađite matricu $X \in \mathcal{M}_{(2;2)}$ takvu da je $2A + 3X = B$.

▶ Označimo

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}.$$

$$2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Po definiciji množenja matrice skalarom imamo:

$$\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} \\ 3x_{21} & 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

a po definiciji zbrajanja matrica:

$$\begin{bmatrix} -4+3x_{11} & 8+3x_{12} \\ 6+3x_{21} & 2+3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Iz definicije jednakosti matrica slijedi:

$$\begin{aligned} -4 + 3x_{11} &= -1 \\ 8 + 3x_{12} &= -4 \\ 6 + 3x_{21} &= 0 \\ 2 + 3x_{22} &= 2, \end{aligned}$$

a odavde

$$x_{11} = 1, \; x_{12} = -4, \; x_{21} = -2, \; x_{22} = 0.$$

Dakle je

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}. \quad ◀$$

Sada imamo definirano zbrajanje matrica: $\mathcal{M}_{(m;n)} \times \mathcal{M}_{(m;n)} \to \mathcal{M}_{(m;n)}$ i množenje matrice skalarom: $\mathcal{M}_{(m;n)} \times \Phi \to \mathcal{M}_{(m;n)}$. Čitatelju prepuštamo da dokaže kako za te dvije operacije vrijede aksiomi vektorskog prostora (A) i (M), pa je $\mathcal{M}_{(m;n)}$ s obzirom na njih vektorski prostor nad poljem Φ.

Kad je to poznato, onda s matricama možemo računati onako kako smo navikli računati s vektorima i posebno s realnim brojevima. Dakle, primjer 3.4 mogli smo riješiti i na sljedeći, češće upotrebljavani način:

$$\begin{aligned}
3X &= B - 2A \\
X &= \frac{1}{3}B - \frac{2}{3}A \\
X &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \\ -2 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Između svih aksioma vektorskog prostora, mi ćemo dokazati samo A_5) koji tvrdi:

$$\exists 0 \in \mathcal{M}_{(m;n)} : \ 0 + A = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{(m;n)}.$$

Matrica, čije postojanje treba dokazati, označena je ovdje s 0. Zvat ćemo je *nul-matrica* jer se pri zbrajanju matrica ponaša kao broj nula pri zbrajanju realnih brojeva.

Zapravo, dokazat ćemo tu tvrdnju za $m = 2$, $n = 3$, a čitatelj je lako može poopćiti. Označimo $0 = (o_{ij})_{(2;3)}$, pa odredimo matrične elemente nul-matrice tako da za proizvoljnu matricu $A = (a_{ij})_{(2;3)}$ vrijedi

$$\begin{bmatrix} o_{11} & o_{12} & o_{13} \\ o_{21} & o_{22} & o_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Prema definiciji zbrajanja matrica je tada

$$\begin{bmatrix} o_{11} + a_{11} & o_{12} + a_{12} & o_{13} + a_{13} \\ o_{21} + a_{21} & o_{22} + a_{22} & o_{23} + a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},$$

pa prema definiciji jednakosti matrica onda slijedi

$$o_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Time smo dokazali da nul-matrica prostora $\mathcal{M}_{(2;3)}$ postoji i doznali smo joj oblik:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$