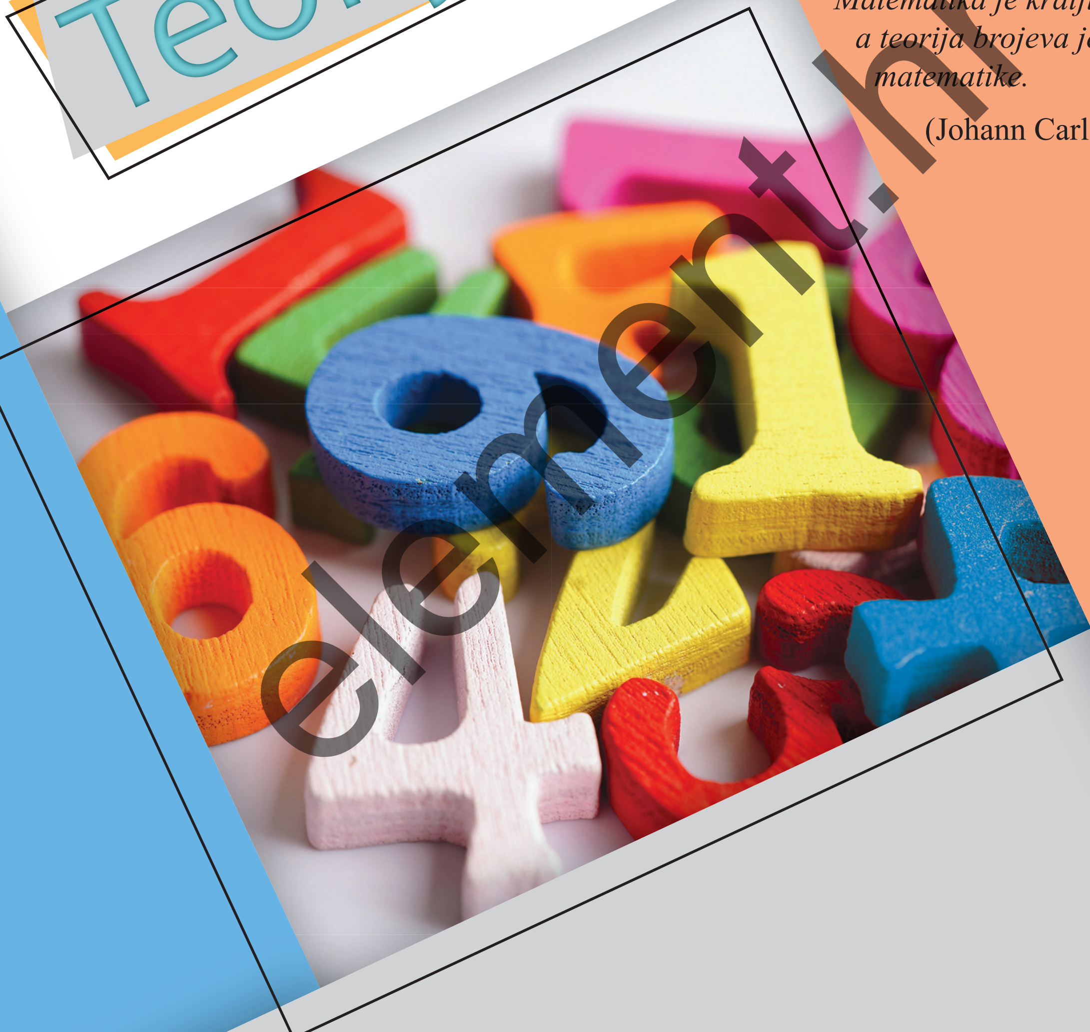
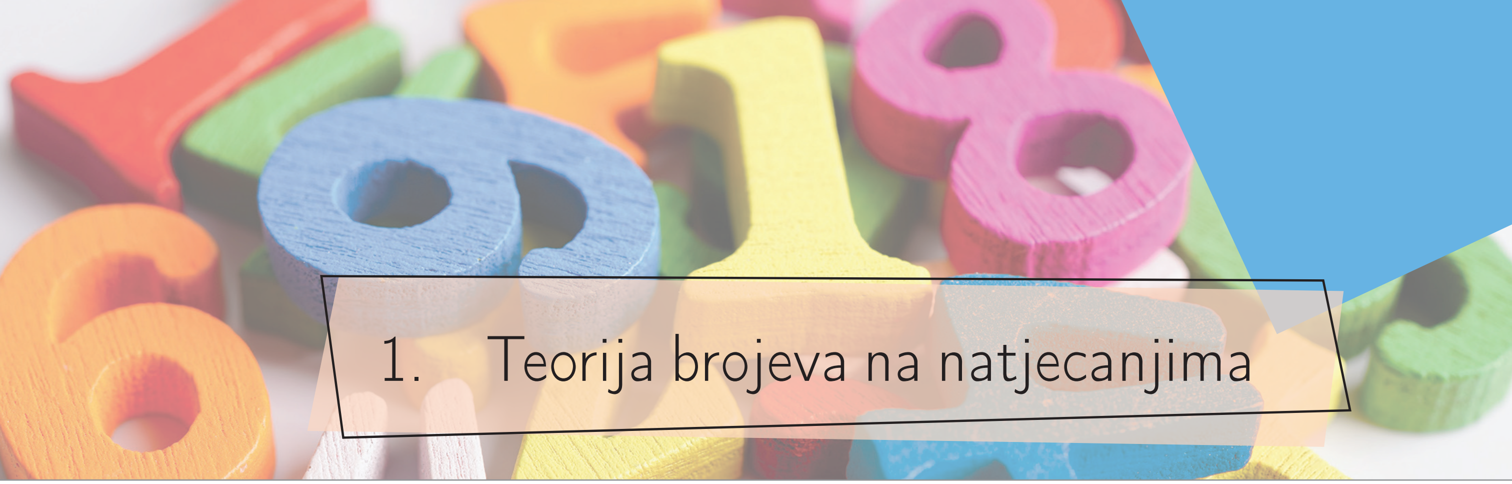
Teorija brojeva



Matematika je kraljica znanosti, a teorija brojeva je kraljica matematike.

(Johann Carl Friedrich Gauss)



1. Teorija brojeva na natjecanjima

Teorija brojeva grana je matematike koja istražuje svojstva prirodnih i cijelih brojeva.

Ona je jedna od najstarijih i središnjih grana matematike. Nekad se naziva *kraljicom matematike* zbog svog važnog položaja u matematičkoj znanosti. Temeljni pojam teorije brojeva je *djeljivost*.

Zadatci iz teorije brojeva sastavni su dio svakog natjecanja i najčešće su prvi susret učenika s dokazima, općim brojevima, poopćavanjima, obratima tvrdnji, osnovama matematičke logike itd.

Budući da se redovna nastava matematike u školama ne bavi tim temama, ovdje ćemo na jednostavnim primjerima pokušati pojasniti osnovne pojmove i nedoumice te dati vrijedne savjete.

Citat

"Brojevi vladaju svemirom."

Pitagorejci

1.1. Broj nula

Brojeve 1, 2, 3... nazivamo prirodnim brojevima. Skup svih prirodnih brojeva označavamo s $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3\ldots\}$$

Broj 0 nije prirodan, nego je cijeli broj. Skup cijelih brojeva u školama se uči u šestom razredu.

Budući da broj 0 ima veliku važnost, uvodi se skup koji sadrži sve prirodne brojeve i broj 0.

$$\mathbb{N}_{\mathbf{0}} = \{\mathbf{0},\ 1,\ 2,\ 3\ldots\}$$

Nula je i jedna od 10 znamenaka kojima se koristimo za prikaz brojeva.

Važno je znati da je nula paran broj. Razlog tome je taj što kada broj 0 dijelimo s brojem 2, nećemo imati ostatak.

Primjerice, ako 0 jabuka dijelimo na dvoje djece, svatko će dobiti 0 jabuka i pritom neće biti ostatka.

$$0 : 2 = 0$$

Nula je paran broj.

Promotrimo što se dogodi kada nulu dijelimo s nekim drugim prirodnim brojem.

$$0 : 3 = 0 \qquad 0 : 15 = 0 \qquad 0 : 100 = 0$$

Primijetimo da nikad nećemo dobiti ostatak pa zaključujemo da je 0 djeljiva sa svim prirodnim brojevima.

Nula je djeljiva sa svakim prirodnim brojem.

Koliko djelitelja ima broj 0?

1.2. Znanjem do bržeg rješenja

Ne žuriti s računanjem, već razmisliti i primijeniti stečeno znanje i tako brže doći do rješenja. Pogledajmo idući zadatak.

1.	5. razred	Jesensko kolo 2021./2022.	30 bodova	**34** %

Koji je od navedenih izraza najveći?

A $312 \cdot 239 \cdot 194$	**B** $201 \cdot 312 \cdot 202$
C $282 \cdot 165 \cdot 312$	**D** $165 \cdot 311 \cdot 282$

Rješenje. Zadatak možemo riješiti računski tako da izračunamo sva četiri dana umnoška i onda vidimo koji je najveći.

Međutim, želimo odgovoriti na pitanje u zadatku a da ne izračunavamo dane umnoške.

Poredajmo faktore u svakom umnošku po veličini i označimo dane umnoške s a, b, c i d.

$$\begin{aligned} a &= 194 \cdot 239 \cdot 312 \\ b &= 201 \cdot 202 \cdot 312 \\ c &= 165 \cdot 282 \cdot 312 \\ d &= 165 \cdot 282 \cdot 311 \end{aligned}$$

Uspoređujući faktore, vidimo da brojevi c i d imaju dva jednaka faktora (165 i 282), pa je jasno da je broj c veći od d jer mu je treći preostali faktor 312 veći od trećeg preostalog faktora broja d koji je 311.

$$\begin{array}{ccc} c & & d \\ \mathbf{165} \cdot \mathbf{282} \cdot \mathbf{312} & & \mathbf{165} \cdot \mathbf{282} \cdot \mathbf{311} \end{array}$$

$$\mathbf{312 > 311}$$

$$c > d$$

S obzirom na to da u zadatku tražimo najveći umnožak, broj d više ne moramo gledati.

Brojevi a, b i c imaju jedan faktor 312 jednak, pa o njihovom poretku odlučuju preostala dva faktora. Zapišimo preostale umnoške i označimo ih s a_1, b_1 i c_1.

$$\begin{array}{lll} a = \mathbf{194 \cdot 239} \cdot \mathbf{312} & a = \mathbf{312} \cdot \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_1} = \mathbf{194 \cdot 239} \\ b = \mathbf{201 \cdot 202} \cdot \mathbf{312} & b = \mathbf{312} \cdot \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_1} = \mathbf{201 \cdot 202} \\ c = \mathbf{165 \cdot 282} \cdot \mathbf{312} & c = \mathbf{312} \cdot \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{c_1} = \mathbf{165 \cdot 282} \end{array}$$

Budući da u preostalim umnošcima ne vidimo nikakvu vezu između faktora, izračunat ćemo ih.

$$\begin{array}{r} 194 \cdot 238 \\ \hline 388 \\ 582 \\ +\ 1552 \\ \hline 46172 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 201 \cdot 202 \\ \hline 402 \\ 000 \\ +\ \ 402 \\ \hline 40602 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 165 \cdot 282 \\ \hline 330 \\ 1320 \\ +\ \ 330 \\ \hline 46530 \end{array}$$

Dobili smo da je $c_1 > a_1 > b_1$, pa je od tri dana umnoška najveći posljednji.

Vrijedi: $c > a > b$.

Primijetimo da ne znamo gdje se broj d nalazi u tom nizu, ali to nam za odgovor u zadatku i nije važno.

Točan odgovor je C.

1.3. Što se podrazumijeva, a što trebamo provjeriti i dokazati

Čest je slučaj da je učenik uvjeren kako je na natjecanju točno riješio zadatak, ali se pokaže da to nije tako. Najčešći razlog tomu je taj što ponuđena učenička rješenja nisu kompletna i nedostaju im pojašnjenja.

Pogledajmo dva primjera.

Primjer 1.

Koliko postoji neparnih dvoznamenkastih brojeva koji su neposredni sljedbenici višekratnika broja 5 i zbroj znamenaka im je paran?

nije potpuno rješenje	potpuno rješenje
posljednja znamenka toga broja treba biti 1	• posljednja znamenka višekratnika broja 5 je 0 ili 5 • sljedbenik višekratnika broja 5 ima posljednju znamenku 1 ili 6 • budući da taj broj treba biti neparan, njegova posljednja znamenka je 1
to su brojevi: 11, 31, 51, 71 i 91	• s obzirom na to da je znamenka jedinice neparna, a zbroj znamenaka paran, zaključujemo da znamenka desetice treba biti neparna • dvoznamenkasti brojevi koji na mjestu jedinice imaju 1 i zbroj znamenaka im je paran su 11, 31, 51, 71 i 91

Primjer 2.

Odredite posljednju znamenku 101. broja u nizu 3, 9, 27, 81...

nije potpuno rješenje	potpuno rješenje
3, 9, 27, 81, 243, 729...	• svaki idući član niza nastaje množenjem prethodnog člana s 3 • **3**, **9**, 2**7**, 8**1**, 24**3**, 72**9**... • znamenke na mjestu jedinice 3, 9, 7, 1 ponavljaju se
101 : 4 = 25 1	• ponavljaju se 4 znamenke • budući da tražimo znamenku jedinice 101. člana, podijelimo 101 s 4 • 101 : 4 = 25 1
posljednja znamenka je 3	• do 101. člana 25 puta će se ponoviti niz posljednjih znamenki 3, 9, 7, 1, a budući da smo dobili ostatak 1, odgovor na pitanje je prvi član tog niza (u 26. ponavljanju), tj. znamenka 3.

Na ovim primjerima željeli smo istaknuti činjenicu da se ništa ne podrazumijeva i da svaki zaključak treba argumentirati i pokazati kako smo do njega došli. Ako smo neke korake pri zaključivanju napravili samo u glavi, a nismo ih zapisali na papir, to često dovodi do toga da nemamo potpuno rješenje zadatka. Kao potpuna rješenja napisali smo ona koja su najkraća, a u njima je obrazložena svaka tvrdnja. Primjere je moguće riješiti i na neki drugi način, a da rješenje i dalje bude potpuno. Što imamo veće znanje matematike, imamo i više ideja kako neki zadatak možemo riješiti.

Ako ne obrazložimo svaki zaključak, onda naše rješenje nije potpuno.

1.4. Koliko rješenja trebamo naći

Iako tekst zadatka da naslutiti da postoji samo jedno rješenje, to ne mora biti tako. Pogledajmo primjer.

Primjer 3.

Nađite dvoznamenkasti broj koji se jednako čita slijeva i zdesna i djeljiv je s 4.

Nakon pročitanog teksta zadatka odmah se sjetimo broja 44 koji očito zadovoljava oba dana svojstva. Iako tekst zadatka glasi "nađite broj" i mi smo našli broj 44, to ne znači da zadatak nema još rješenja. Uvijek se podrazumijeva da trebamo pronaći sva rješenja ili dokazati da uopće nema rješenja.

Svojstva u zadatku zadovoljava i broj 88, a trebali bismo pokazati i to da osim ta dva zadatak nema drugih rješenja.

To bismo mogli napraviti ovako.

Ako je broj djeljiv s 4, on je paran.

Dvoznamenkasti parni brojevi koji se jednako čitaju slijeva i zdesna su: 22, 44, 66 i 88.

$$22 = 5 \cdot 4 + 2 \qquad 44 = 11 \cdot 4 \qquad 66 = 16 \cdot 4 + 2 \qquad 88 = 22 \cdot 4$$

Brojevi 22 i 66 nisu djeljivi s 4.

Dvoznamenkasti brojevi koji se jednako čitaju slijeva i zdesna i djeljivi su s 4 su 44 i 88.

Iako nam je pitanje u zadatku zadano u jednini ("nađite broj" ili "koji broj" ili sl.) to ne znači da postoji samo jedno rješenje. Podrazumijeva se da nađemo sva moguća rješenja ili dokažemo da ih uopće nema.

1.5. Pogađanje rješenja

Prilikom rješavanja pojedinih matematičkih zadataka moguće je naslutiti ili pogoditi rješenje zadatka. Da bi zadatak bio matematički korektno riješen, treba napraviti sljedeće:

- rješenje koje smo naslutili trebamo provjeriti i pokazati da je zaista rješenje
- iako smo pogađanjem našli jedno (ili više) rješenja zadatka, to ne znači da su to sva rješenja i da osim njih ne postoje druga
- ako osim pogođenih rješenja zaista ne postoje druga, to trebamo dokazati.

Pogledajmo jedan jednostavan primjer.

Primjer 4.

Za koje znamenke a i b takve da je $a < b$ vrijedi da im je zbroj jednak 6?

Zapišimo danu jednakost $a + b = 6$.

Pažljivim promatranjem dane jednakosti možemo lako uočiti da ju brojevi $a = 0$ i $b = 6$ zadovoljavaju.

Provjerimo.

$$a + b = 6$$
$$0 + 6 = 6$$

Dakle, našli smo jedno rješenje, ali time nismo riješili zadatak.

Također, brojevi $a = 1$ i $b = 5$ zadovoljavaju uvjete zadatka.

$$1 + 5 = 6$$

Sada već imamo dva rješenja, ali da bi zadatak bio riješen do kraja, moramo otkriti sva rješenja ili dokazati da osim nađenih ne postoje druga.

Brojevi $a = 2$ i $b = 4$ su još jedno, treće, rješenje zadatka.

$$2 + 4 = 6$$

Sada nam je već jasno da zadatak, osim nađena tri, neće imati više rješenja, ali to moramo obrazložiti.

To bismo mogli napraviti ovako.

Prikažimo sve mogućnosti kako broj 6 možemo zapisati kao zbroj dviju znamenaka.

$$6 = 0 + 6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1 = 6 + 0$$

Od sedam načina samo prva tri zadovoljavaju svojstvo da je prvi pribrojnik manji od drugog.

Time smo dokazali da osim nađenih triju rješenja ne postoje druga.

Kada smo pogađanjem našli jedno (ili više) rješenja zadatka, to ne znači da su to sva rješenja i da osim njih ne postoje druga. Ako osim pogođenih rješenja zaista ne postoje druga, to trebamo dokazati.

1.6. Za koje brojeve vrijedi

Posebnu pažnju trebamo obratiti na to za koje brojeve treba vrijediti dana jednakost, nejednakost ili tvrdnja.

Primjer 5.

Koji je najmanji prirodni broj x rješenje nejednadžbe $a + x > 9$ za prirodni broj $a = 5$?
Uvrstimo $a = 5$ u danu nejednakost.

$$\begin{aligned} 5 + x &> 9 \\ x &> 9 - 5 \\ x &> 4 \end{aligned}$$

Budući da je x prirodan broj, zaključujemo da je $x \in \{5,\ 6,\ 7\dots\}$.
Najmanji prirodni broj x koji je rješenje nejednadžbe je 5.

2.	5. razred	Zimsko kolo 2022./2023.	30 bodova	**−8** %

Koji je najmanji prirodni broj x rješenje nejednadžbe $a + x > 9$ za svaki prirodni broj a takav da je $0 < a \leq 4$?

A 6 **B** 5 **C** 4 **D** 9

Rješenje. Pogledajmo najprije što vrijedi za a.
a je prirodni broj i $0 < a \leq 4$ pa slijedi da a može biti 1, 2, 3 ili 4.
Uvrstimo sve moguće vrijednosti broja a u zadanu nejednadžbu i odredimo prirodni broj x.

$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$
$1 + x > 9$	$2 + x > 9$	$3 + x > 9$	$4 + x > 9$
$x > 9 - 1$	$x > 9 - 2$	$x > 9 - 3$	$x > 9 - 4$
$x > 8$	$x > 7$	$x > 6$	$x > 5$
$x \in \{9,\ 10,\ 11\ldots\}$	$x \in \{8,\ 9,\ 10\ldots\}$	$x \in \{7,\ 8,\ 9\ldots\}$	$x \in \{6,\ 7,\ 8\ldots\}$

Tražimo najmanji **x za koji će sve nejednadžbe vrijediti**. Brojevi 9, 10, 11... rješenja su svih četiriju nejednadžbi. Najmanji među njima je broj 9.

Točan odgovor je D.

3.	5. razred	Proljetno kolo 2022./2023.	30 bodova	**3** %

Koji je najveći prirodni broj x rješenje nejednadžbe $a + x < 8$ za svaki prirodni broj a takav da je $1 \leq a < 5$?

A 6 **B** 4 **C** 3 **D** 7

Rješenje. Pogledajmo najprije što vrijedi za a.
a je prirodni broj i $1 \leq a < 5$ pa slijedi da a može biti 1, 2, 3 ili 4.