Kombinatorno-logički zadatci

1. Kombinatorno-logički zadatci na natjecanjima

Kombinatorno-logički zadatci pojavljuju se na svim matematičkim natjecanjima. Iako im se učenici vesele i rado ih rješavaju, često njihova riješenost nije najbolja. Nekoliko je razloga za to:

- površnim čitanjem zadatka previđamo neku važnu zadanu činjenicu
- budući da njihovo rješavanje zahtjeva minimalno poznavanje školskog gradiva, ponekad stječemo krivi dojam da su lagani i lako rješivi
- nismo upoznati s metodama koje se koriste prilikom rješavanja takvih zadataka
- do nekih zaključaka dolazimo “zdravim razumom” pa smatramo da ih nije potrebno objašnjavati ili ne znamo kako bismo ih objasnili
- nesistematičnost
- brzopleto zaključivanje.

Stoga ćemo u ovoj zbirci zadataka nastojati detaljno objasniti razne metode i pristupe rješavanja kombinatorno-logičkih zadataka te ukazati na česte previde i pogreške koji se pritom događaju.

1.1. Slučajevi

Mnogi kombinatorni problemi u sebi sadrže više različitih slučajeva koji zadovoljavaju uvjet zadatka pa ih je dobro uočiti i podijeliti dani problem na više manjih problema koje rješavamo odvojeno.

Pogledajmo nekoliko primjera.

1. 5. razred

Koliko dvoznamenkastih brojeva ima zbroj znamenka jednak 3 ili 5?

A 9 **B** 8 **C** 7 **D** 6

Rješenje. Označimo tražene dvoznamenkaste brojeve s $\overline{ab}$.

Želimo sistematično ispisati sve brojeve kojima je zbroj znamenka 3 ili 5, pa ćemo odvojeno pogledati dva slučaja.

1. slučaj	2. slučaj
zbroj znamenaka je 3	zbroj znamenaka je 5
$a+b=3$ $1+2=3$ $2+1=3$ $3+0=3$	$a+b=5$ $1+4=5$ $2+3=5$ $3+2=5$ $4+1=5$ $5+0=5$
3 broja	5 brojeva
ukupno je $3+5=8$ brojeva	

Točan odgovor je B.

2. 5. razred

Koliko brojeva manjih od 100 ima zbroj znamenaka jednak 5?

A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7

Rješenje. Iako iz teksta zadatka nije odmah vidljivo (kao u prethodnom zadatku) da trebamo promatrati neke slučajeve, uočavamo da traženi brojevi mogu biti jednoznamenkasti ili dvoznamenkasti. Stoga promatramo odvojeno ta dva slučaja.

1. slučaj	2. slučaj
broj je jednoznamenkast	broj je dvoznamenkast označimo ga s $\overline{ab}$
to je broj 5	$a + b = 5$ $1 + 4 = 5$ $2 + 3 = 5$ $3 + 2 = 5$ $4 + 1 = 5$ $5 + 0 = 5$
1 broj	5 brojeva
ukupno je $1 + 5 = 6$ brojeva	

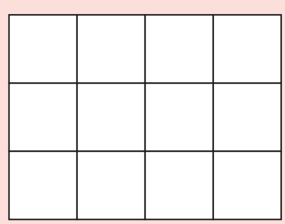
Točan odgovor je C.

3. 5. razred

Koliko kvadrata je na slici?

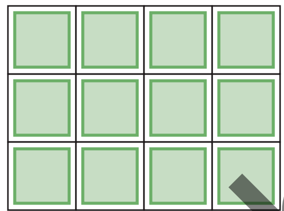
A 12 **B** 14

C 18 **D** 20



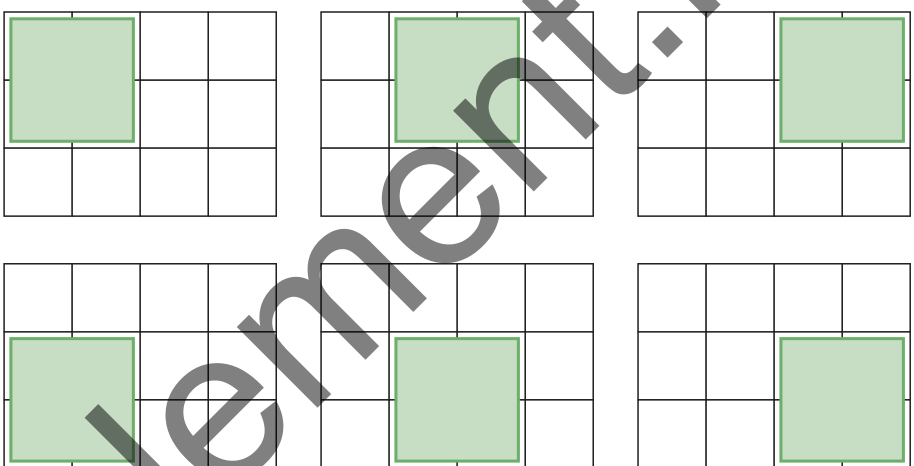
Rješenje. Dani pravokutnik sadrži $4 \cdot 3 = 12$ malenih kvadratića. Osim tih najmanjih, postoje i veći kvadrati koji sadrže više manjih kvadrata. Stoga ćemo, da bismo sistematično prebrojali sve četverokute na slici, promatrati slučajeve u ovisnosti o tome koliko veći kvadrati sadrže najmanjih kvadratića.

- kvadrati koji sadrže 1



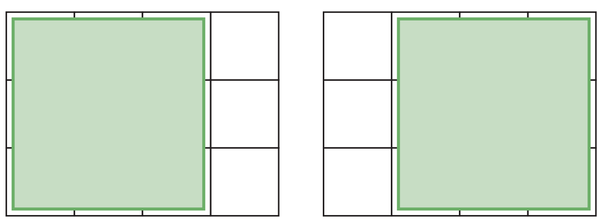
12

- kvadrati koji sadrže $2 \cdot 2 = 4$ kvadratića



6

- kvadrati koji sadrže $3 \cdot 3 = 9$ kvadratića



2

Kada zbrojimo broj svih kvadrata koje smo uočili u prethodna tri slučaja dobit ćemo ukupan broj kvadrata na slici.

$$12 + 6 + 2 = 20$$

Točan odgovor je D.

4. 5. razred

Iva, Nina i Ana stoje u redu pred pekarom. Ako Ana nije u sredini i Iva nije na početku, tko je na kraju reda?

A Iva **B** Nina **C** Ana **D** nije moguće odrediti

Rješenje. Želimo odrediti poredak djevojaka pred pekarom.

Budući da Ana nije u sredini, ona može biti na kraju ili na početku reda. Pogledajmo odvojeno ta dva slučaja.

1. slučaj	2. slučaj
Ana je na kraju reda. ______ ______ Ana *Iva nije na početku.* Ako Iva nije na početku, ona se sigurno nalazi u sredini reda. ______ Iva Ana Zaključujemo da se Nina nalazi na početku reda. Nina Iva Ana	*Ana je na početku reda.* Ana ______ ______ *Iva nije na početku.* Informacija da Iva nije na početku nam ne donosi ništa novoga jer već znamo da je na početku Ana. Stoga ne možemo zaključiti gdje se nalazi Iva. Moguće je da je u sredini ili na kraju reda.

Iako smo u prvom slučaju dobili da je Ana na kraju reda, u drugom slučaju vidimo da nije moguće odrediti tko se nalazi na kraju reda.

Točan odgovor je D.

5.	5. razred	Jesensko kolo 2024./2025.	20 bodova	**12** %

Mama je Mirjani dala novčanicu od 50 € da kupi pernicu i bojice. Nakon kupnje prodavačica je Mirjani vratila dvije novčanice i dvije kovanice u eurima, sve različitih vrijednosti. Mirjana je odlučila kupiti i sestri još jednu jednaku pernicu i jednake bojice. Na kraju kupnje ostala joj je jedna novčanica i jedna kovanica u eurima koje je vratila mami. Koliko je novca Mirjana vratila mami?

A 6 € **B** 16 € **C** 11 € **D** nije moguće odrediti

Rješenje. Prisjetimo se da novčanice u eurima u iznosu manjem od 50 € mogu biti od 5, 10 ili 20 €. Kovanice u eurima su od 1 i 2 €.

Nakon kupnje prodavačica je Mirjani vratila dvije novčanice i dvije kovanice u eurima, sve različitih vrijednosti. Dakle, jasno je da su kovanice bile od 1 € i 2 € (ukupno 3 €), ali ne možemo znati koje dvije novčanice je prodavačica dala Mirjani. Imamo tri mogućnosti pa ćemo za svaku od njih izračunati iznos potrošenog novca.

	1. slučaj	2. slučaj	3. slučaj
prodavačica vratila novčanice	20 € + 10 € = 30 €	20 € + 5 € = 25 €	10 € + 5 € = 15 €
ukupno vraćen novac	30 € + 3 € = 33 €	25 € + 3 € = 28 €	15 € + 3 € = 18 €
potrošen novac	50 € − 33 € = 17 €	50 € − 28 € = 22 €	50 € − 18 € = 32 €

Mirjana je odlučila kupiti i sestri još jednu istu pernicu i iste bojice iz čega zaključujemo da je iznos preostalog novca treba biti veći ili jednak iznosu potrošenog novca.

Provjerimo sva tri slučaja

			1. slučaj	2. slučaj	3. slučaj
preostali novac	>	potrošenog novca	33 € > 17 €	28 € > 22 €	18 € < 32 €

Primijetimo da bi u 3. slučaju Mirjana imala premalo novca za novu kupnju pa odbacujemo mogućnost da joj je prodavačica vratila novčanice od 10 i 5 €.

Na kraju kupnje Mirjani je ostala jedna novčanica i jedna kovanica eura koje je vratila mami. Pogledajmo iznos koji bi preostao Mirjani nakon druge kupnje u prva dva slučaja.

	1. slučaj	2. slučaj
prva kupnja	17 €	22 €
druga kupnja	17 €	22 €
preostao novac	50 € − 34 € = 16 €	50 € − 44 € = 6 €

Iznos od 16 € ne možemo rasporediti na jednu novčanicu i jednu kovanicu, ali iznos od 6 možemo (novčanica od 5 i kovanica od 1 €). Dakle, samo je 2. slučaj moguć pa znamo da je Mirjana mami vratila 6 €.

Točan odgovor je A.

Razdvajanje danog problema na više slučajeva koji zajedno pokrivaju sve mogućnosti značajno pojednostavljuje rješavanje početnog problema. Pritom je neki puta odmah iz teksta zadatka vidljivo da trebamo promatrati više slučajeva, ali često to i nije slučaj već do toga zaključka dolazimo sami. Nakon što smo pogledali i riješili sve slučajeve, ne smijemo zaboraviti na kraju zaključiti što je rješenje zadatka.

1.2. Suprotno

Kada nam se u zadatku čini da nije jednostavno ili je predugo prebrojati elemente koji zadovoljavaju dano svojstvo, tada je potrebno razmotriti i mogućnost da, umjesto da brojimo koliko elemenata ima dano svojstvo, u stvari prebrojimo koliko ih nema dano svojstvo. Ako od ukupnog broja elemenata oduzmemo broj onih koji nemaju dano svojstvo, doći ćemo do broja onih koji ga imaju.

6. 5. razred

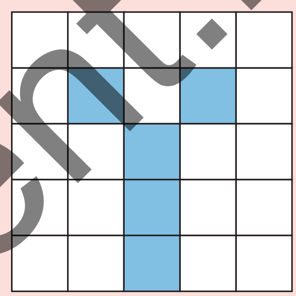
Koliko polja dane ploče nije obojano?

A 20

B 21

C 19

D 22



Rješenje. Na pitanje možemo odgovoriti tako da prebrojimo bijela polja dane ploče, ali puno je jednostavnije prebrojati obojana polja te njihov broj oduzeti od broja svih polja.

broj obojanih polja	broj svih polja	broj neobojanih polja
5	$5 \cdot 5 = 25$	$25 - 5 = 20$

Točan odgovor je A.

Da bismo se uvjerili u to da je često jednostavnije brojati elemente koji ne zadovoljavaju svojstvo, idući zadatak riješit ćemo na dva načina: u 1. načinu prebrojit ćemo elemente koji zadovoljavaju dano svojstvo, a u 2. načinu one koji ga ne zadovoljavaju.

7.	5. razred	Jesensko kolo 2023./2024.	30 bodova	**31** %

Koliko dvoznamenkastih brojeva u svom zapisu nema znamenku 7?

A 73 **B** 80 **C** 72 **D** 70

Rješenje.

1. način. Ispišimo sve dvoznamenkaste brojeve koji zadovoljavaju dano svojstvo, tj. u svom zapisu nemaju znamenku 7.

10	11	12	13	14	15	16		18	19
20	21	22	23	24	25	26		28	29
30	31	32	33	34	35	36		38	39
40	41	42	43	44	45	46		48	49
50	51	52	53	54	55	56		58	59
60	61	62	63	64	65	66		68	69
80	81	82	83	84	85	86		88	89
90	91	92	93	94	95	96		98	99

Budući da smo u svakom retku napisali 9 brojeva, a redaka je 8, ukupan broj dvoznamenkastih brojeva koji u svom zapisu nemaju znamenku 7 je $9 \cdot 8 = 72$.

2. način. Ispišimo one dvoznamenkaste brojeve koji ne zadovoljavaju dano svojstvo, tj. imaju znamenku 7 u svom zapisu.

17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97 – znamenka 7 na mjestu jedinice

70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, ~~77~~, 78, 79 – znamenka 7 na mjestu desetice

Dvoznamenkastih brojeva koji u svom zapisu imaju znamenku 7 je $9 + 9 = 18$.

Budući da je svih dvoznamenkastih brojeva 90, onih koji nemaju znamenku 7 u svom zapisu je $90 - 18 = 72$.

Točan odgovor je C.

Vennovi dijagrami su zatvorene linije koje najčešće crtamo kao ovale ili pravokutnike. Pomažu nam vizualno prikazati međusobni odnos elemenata i na taj način doći do željenog zaključka.