

# 4

---

## PITAGORIN POUČAK

element.hr

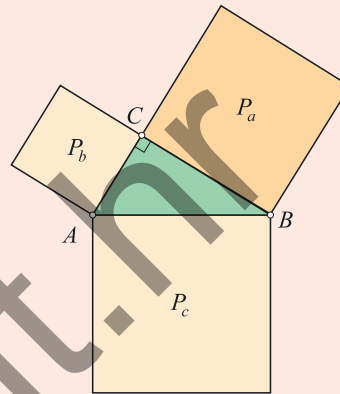


## 4.1. Pitagorin poučak

## Pitagorin poučak

Površina kvadrata konstruiranog nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata konstruiranih nad katetama istog trokuta.

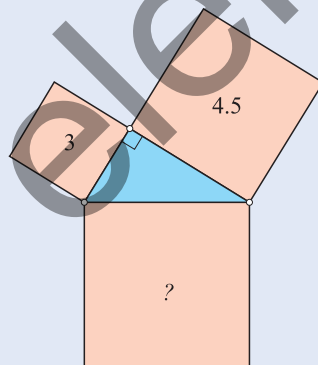
$$P_a + P_b = P_c.$$



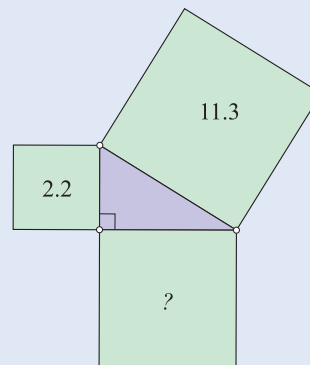
## Primjer 1.

Ako su u dva od tri kvadrata upisane njihove površine, kolika je površina trećeg?

a)



b)



a)  $P_c = P_a + P_b = 3 + 4.5 = 7.5$

b)  $P_b = P_c - P_a = 11.3 - 2.2 = 9.1.$

## Primjer 2.

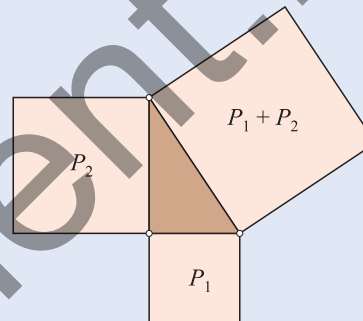
Zadana su dva kvadrata površina  $P_1$  i  $P_2$ .



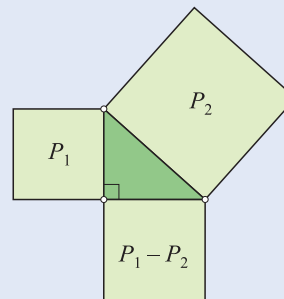
Konstruiraj kvadrat čija je površina jednaka

- zbroju površina dvaju zadanih kvadrata
- razlici površina dvaju zadanih kvadrata.

a) Kvadrat čija je površina  $P$  jednaka zbroju površina  $P_1$  i  $P_2$  jest kvadrat konstruiran nad hipotenuzom pravokutnog trokuta čije su katete stranice  $a_1$  i  $a_2$  zadanih kvadrata.



b) Kvadrat čija je površina jednaka razlici površina dvaju zadanih kvadrata jest kvadrat konstruiran nad katetom pravokutnog trokuta čija je druga kateta  $a_1$  stranica manjeg, a hipotenuza  $c_2$  stranica većeg od dvaju zadanih kvadrata.



Pitagorin poučak možemo iskazati i na sljedeći način:

Ako su  $a$  i  $b$  duljine kateta, a  $c$  duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, tada vrijedi jednakost

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

### Primjer 3.

Omjer duljina kateta pravokutnog trokuta jednak je 3 : 4. Ako je duljina hipotenuze jednaka 35 cm, koliki je opseg ovog trokuta?

Iz  $a : b = 3 : 4$  slijedi  $b = \frac{4}{3}a$ . No, trokut je pravokutan i za njega vrijedi Pitagorin poučak. Zato imamo:

$$a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{25}{9}a^2 = c^2.$$

Tako dobijemo  $c = \frac{5}{3}a$ . Budući da je  $c = 35$  cm, odmah dobijemo  $a = 21$  cm, a potom iz  $b = \frac{4}{3}a = 28$  cm. Opseg trokuta jednak je 84 cm.





**Primjer 4.**

Duljine kateta pravokutnog trokuta jednake su  $k$  cm i  $(k+2)$  cm, a duljina hipotenuze  $(2k-2)$  cm, gdje je  $k$  pozitivan broj. Kolika je površina tog trokuta?

Trokut je pravokutan pa za njegove stranice vrijedi

$$k^2 + (k+2)^2 = (2k-2)^2.$$

Dobili smo jednadžbu s nepoznicom  $k$  koja nakon sređivanja prima oblik  $2k^2 = 12k$ . Kako je  $k \neq 0$ , rješenje jednadžbe je  $k = 6$ . Jedna kateta duga je 6 cm, druga 8 cm, pa je površina trokuta jednaka

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ cm}^2.$$

**Primjer 5.**

Jedna kateta pravokutnog trokuta dulja je od druge za 10 cm, a kraća je od hipotenuze za 10 cm. Kolike su stranice ovog trokuta?

Ako je  $a$  duljina veće katete, duljina je kraće  $a - 10$ , a duljina hipotenuze  $a + 10$ .

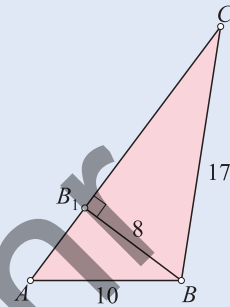
Prema Pitagorinom poučku je  $a^2 + (a - 10)^2 = (a + 10)^2$ . Nakon kvadriranja i sređivanja doći ćemo do jednadžbe  $a^2 - 40a = 0$ , odnosno  $a(a - 40) = 0$ . Ne može biti  $a = 0$  jer tada i ne bi bilo trokuta pa je zato  $a = 40$  cm. Potom izračunamo  $b = 30$  cm i  $c = 50$  cm.



## Primjer 6.

U trokutu  $ABC$  je  $|AB| = 10$  cm,  $|BC| = 17$  cm i duljina visine iz vrha  $B$  iznosi 8 cm. Kolika je duljina stranice  $\overline{AC}$  trokuta?

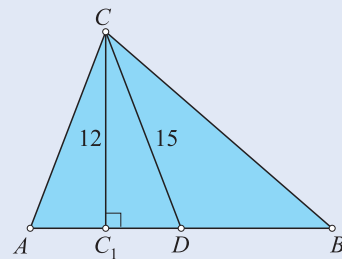
Iz pravokutnog trokuta  $ABB_1$  imamo  $|AB_1| = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$  cm, a iz pravokutnog trokuta  $B_1BC$  je  $|B_1C| = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$  cm. Zato je  $|AC| = |AB_1| + |B_1C| = 6 + 15 = 21$  cm.



## Primjer 7.

Duljina stranice  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  iznosi 28 cm, duljina  $|CC_1|$  visine iz vrha  $C$  jednaka je 12 cm, a duljina težišnice iz istog vrha jednaka je  $|CD| = 15$  cm. Izračunaj duljine stranica  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$  trokuta.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut  $CC_1D$  izračunat ćemo  $|C_1D| = 9$  cm. U pravokutnom trokutu  $AC_1C$  znamo duljine kateta:  $|CC_1| = 12$  cm,  $|AC_1| = |AD| - |C_1D| = 5$  cm. (Primijeti da je  $D$  polovište stranice  $\overline{AB}$ .) Sada je



$$|AC| = \sqrt{|AC_1|^2 + |CC_1|^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm.}$$

Analognim postupkom iz trokuta  $C_1BC$  u kojem je

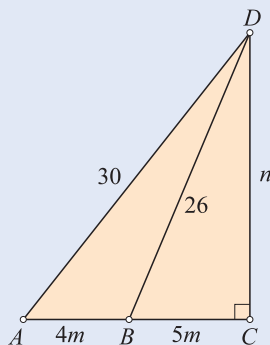
$$|C_1B| = |C_1D| + |DB| = 9 + 14 = 23 \text{ cm,}$$

dobit ćemo

$$|BC| = \sqrt{|CC_1|^2 + |C_1B|^2} = \sqrt{12^2 + 23^2} = \sqrt{144 + 529} = \sqrt{673} \approx 26 \text{ cm.}$$

## Primjer 8.

Odredi brojeve  $m$  i  $n$  prema danoj slici.



Na slici uočavamo dva pravokutna trokuta,  $ACD$  i  $BCD$ . Primijemo na svaki od njih Pitagorin poučak:

$$81m^2 = 900 - n^2$$

$$25m^2 = 676 - n^2.$$

Oduzmemo li ove dvije jednadžbe, dobit ćemo  $56m^2 = 224$ , a odatle  $m = 2$ . Lako zatim nalazimo  $n = 24$ .



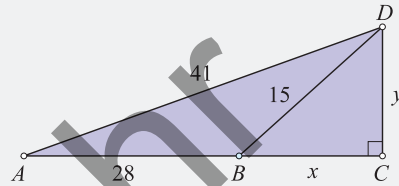
### Zadatci za vježbu 4.1.

1. Ako je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta jednaka 8 cm, koliki je zbroj površina triju kvadrata konstruiranih nad stranicama toga trokuta?
2. Površina jednakostraničnog trokuta konstruiranog nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina jednakostraničnih trokuta konstruiranih nad katetama tog trokuta. Dokaži!
3. Površina polukruga konstruiranog nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina polukrugova konstruiranih nad katetama tog trokuta. Dokaži!
4. Hipotenuza pravokutnog trokuta dulja je od kraće katete za 9 cm. Duljina druge katete je 15 cm. Kolika je duljina kraće katete ovog trokuta?
5. Jedna kateta pravokutnog trokuta duga je 7 cm, hipotenuza je dulja od druge katete za 5 cm. Koliki je opseg trokuta?
6. Jedna kateta pravokutnog trokuta kraća je od hipotenuze za 8 cm. Duljina druge katete je 20 cm. Izračunaj opseg trokuta?
7. Jedna kateta pravokutnog trokuta duga je 36 cm. Razlika duljina hipotenuze i druge katete je 8 cm. Odredi površinu trokuta.
8. Duljina težišnice iz vrha pravokutnog trokuta jednaka je 5 cm, a duljina jedne katete iznosi 6 cm. Odredi duljinu druge katete.
9. Duljine kateta pravokutnog trokuta u omjeru su 3 : 4. Opseg trokuta jednak je 48 cm. Kolike su duljine stranica trokuta?
10. Duljine kateta pravokutnog trokuta u omjeru su 4 : 3. Ako dulju katetu produljimo za 4 cm, a kraću skratimo za 8 cm, hipotenuza se neće promijeniti. Odredi duljine stranica trokuta.
11. Razlika duljina kateta pravokutnog trokuta iznosi 5 cm. Produjimo li dulju katetu za 4 cm, a manju skratimo za 8 cm, novi pravokutni trokut imat će hipotenuzu jednake duljine kao i prvi. Izračunaj duljine stranica pravokutnog trokuta.
12. Duljine jedne katete i hipotenuze pravokutnog trokuta jednake su 12 cm i 20 cm. Površina sličnog trokuta iznosi  $54 \text{ cm}^2$ . Kolike su duljine stranica tog drugog trokuta?



13. Duljine kateta pravokutnog trokuta jednake su 7 cm i 24 cm. Površina sličnog trokuta iznosi  $21 \text{ cm}^2$ . Kolike su duljine stranica drugog trokuta?
14. Opseg pravokutnog trokuta jednak je 6 cm, površina mu je  $1.5 \text{ cm}^2$ . Kolika je duljina hipotenuze ovog trokuta?
15. Trokut  $ABC$  je pravokutan. Zbroj duljina dviju kateta jednak je 9 cm, a duljina hipotenuze 7 cm. Kolika je površina trokuta?
16. Opseg pravokutnog trokuta jednak je 10 cm, duljina jedne katete je 4 cm. Kolike su duljine druge katete i hipotenuze?
17. Zbroj duljina stranica pravokutnog trokuta jednak je 22 cm, a zbroj kvadrata tih duljina  $200 \text{ cm}^2$ . Kolika je površina ovog trokuta?
18. Razlika duljina dviju kateta pravokutnog trokuta jednaka je 3 cm, omjer duljina veće katete i hipotenuze je  $4 : 5$ . Kolike su duljine stranica ovog trokuta?
19. Zbroj duljina kateta pravokutnog trokuta jednak je 21 cm. Površina trokuta iznosi  $54 \text{ cm}^2$ . Kolika je duljina hipotenuze?

20. Opseg pravokutnog trokuta jednak je 56 cm, površina trokuta iznosi  $84 \text{ cm}^2$ . Kolika je duljina hipotenuze ovog trokuta?
21. Kolike su duljine  $x$  i  $y$  dužina  $\overline{BC}$  i  $\overline{CD}$ ?



22. Duljina visine na hipotenuzu pravokutnog trokuta iznosi 14.4 cm. Duljina težišnice povučene iz vrha  $C$  pravokuta je 15 cm. Kolike su duljine stranica trokuta?

Tablica Pitagorinih trojki

$a$	$b$	$c$
3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29
9	40	41
12	35	37
11	60	61
28	45	53
33	56	65
13	84	85

## 4.2. Obrat Pitagorina poučka

### Obrat Pitagorina poučka

Ako za duljine stranica  $a$ ,  $b$  i  $c$  vrijedi jednakost  $a^2 + b^2 = c^2$ , taj je trokut pravokutan, a stranica duljine  $c$  njegova je hipotenuza.

#### Primjer 1.

Trokut sa stranicama duljina  $\sqrt{2} - 1$  dm,  $\sqrt{6}$  dm i  $\sqrt{2} + 1$  dm je pravokutan. Provjeri!

Kvadrati danih brojeva jednaki su  $3 - 2\sqrt{2}$ ,  $6$  i  $3 + 2\sqrt{2}$ . Najdulja stranica jednaka je zbroju dvaju preostalih,  $3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = 6$ . Zaključujemo da je trokut pravokutan, a stranica duljine  $\sqrt{6}$  dm njegova je hipotenuza.

#### Primjer 2.

Duljine stranica trokuta  $ABC$  jednake su  $7\frac{1}{2}$  cm,  $10$  cm i  $12\frac{1}{2}$  cm. Kolika je duljina polumjera trokutu opisane kružnice?

Zadani je trokut sličan trokutu sa stranicama duljina  $3$ ,  $4$  i  $5$ , koeficijent sličnosti je  $k = \frac{2}{5}$ . (Obrazloži!)

No, ovaj trokut je pravokutan, jer je  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . Kako mu je prvi trokut sličan, i on je pravokutan. Prema obratu Talesova poučka najdulja stranica pravokutnog trokuta promjer je kružnice opisane trokutu. Stoga je duljina polumjera opisane kružnice zadanom trokutu jednaka  $r = \frac{25}{4}$  cm.