



# Brojevni sustavi, zapis cijelih i realnih brojeva u memoriji računala

Poglavlje je posvećeno osnovama koje su ključne za razumijevanje rada računala i upravljanje brojevima te memorijom. Objasnit će se kako se računala koriste različitim brojevnim sustavima te kako se brojevi pretvaraju iz jednog sustava u drugi. Također, bit će objašnjeno kako se mjere i pretvaraju jedinice za količinu memorije, što je ključno za razumijevanje pojmova poput kilobajta, megabajta i gigabajta. Na kraju, detaljno će se prikazati metode zapisivanja brojeva u memoriji računala, uključujući zapis cijelih brojeva s pomoću dvojnog komplementa te zapis realnih brojeva prema IEEE 754 standardu jednostruke preciznosti. Ovo poglavlje postavlja temelj za daljnje razumijevanje ključnih koncepata programiranja.

## 1.1. Brojevni sustavi

**Brojevni sustav** je skup pravila prema kojima se zapisuju brojevi, a svaki brojevni sustav sadržava vlastiti skup **znamenaka**. **Baza brojevnog sustava** predstavlja ukupan broj znamenaka u pojedinom brojevnom sustavu. Najmanja suvisla baza brojevnog sustava je 2. Baza brojevnog sustava najčešće se navodi u zagradi u indeksu iza broja. Ako je broj zapisan u dekadskom brojevnom sustavu, bazu nije potrebno navoditi te se automatski smatra da se radi o zapisu broja s bazom 10.

U tablici 1.1. nalazi se pregled nekih osnovnih brojevnih sustava te znamenaka koje sadržavaju. Za heksadekadski sustav karakteristično je da se za zapis znamenaka upotrebljavaju i slova. Tako slovo A ima vrijednost deset, B jedanaest, C dvanaest, D trinaest, E četrnaest i F petnaest.

Tablica 1.1. Pregled nekih brojevnih sustava

naziv brojevnog sustava	baza	znamenke	primjer broja
binarni	2	0 i 1	10,101 <sub>(2)</sub>
oktalni	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7	45,21 <sub>(8)</sub>
dekadski	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	18,7 <sub>(10)</sub>
heksadekadski	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E i F	F3B,A2 <sub>(16)</sub>

### Primjer 1.1.

Koja je najveća znamenka u brojevnom sustavu s bazom 5?

#### Rješenje

Najveća znamenka je uvijek za 1 manja od baze brojevnog sustava. To je u ovom slučaju znamenka 4, a znamenke sadržane u sustavu s bazom 5 su: 0, 1, 2, 3 i 4.

### Primjer 1.2.

U kojem je brojevnom sustavu zapisan broj 10221? Odaberite točan odgovor.

- a) U sustavu s bazom 3.
- b) U sustavu s bazom 8.
- c) U sustavu s bazom 10.
- d) U sustavu s bazom 16.
- e) Svi su navedeni odgovori točni.

#### Rješenje

Svi navedeni brojevni sustavi od a) do d) sadržavaju znamenke 0, 1 i 2 tako da je točan odgovor pod e).

## 1.2. Pretvorbe između brojevni sustava

Između brojevni sustava postoji veza pa je tako moguće brojeve zapisane u jednoj bazi prebaciti u ekvivalentni zapis u nekoj drugoj bazi.

### 1.2.1. Pretvorba u dekadski brojevni sustav

Broj zapisan u brojevnom sustavu s bazom  $b$ , koji nije dekadski, pretvara se u dekadski brojevni sustav tako da se prvo broj rastavi po težinama. Pritom se svaka znamenka broja pomnoži s njezinom težinom, pri čemu težinu čini baza sustava i eksponent koji odgovara poziciji znamenke u zapisu broja. Zbrajanjem svih tako dobivenih članova dobiva se ekvivalentni dekadski zapis.

Tako na primjer za broj oblika  $xy,z$  zapisan u bazi  $b$  vrijedi sljedeći raspis po težinama:

$$xy,z_{(b)} = x \cdot b^1 + y \cdot b^0 + z \cdot b^{-1}$$

pri čemu su  $x$ ,  $y$  i  $z$  manji od  $b$ .

#### Primjer 1.3.

Zadane brojeve zapišite u dekadskom brojevnom sustavu:

a)  $101,111_{(2)}$

b)  $A4,8_{(16)}$

c)  $47,4_{(8)}$

d)  $102,2_{(3)}$

#### Rješenje

a)  $101,111_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 5,875_{(10)}$

b)  $A4,8_{(16)} = 10 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 + 8 \cdot 16^{-1} = 164,5_{(10)}$

c)  $47,4_{(8)} = 4 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^{-1} = 39,5_{(10)}$

d)  $102,2_{(3)} = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^{-1} = 11,6_{(10)}$

### 1.2.2. Pretvorba iz dekadskog brojevnog sustava algoritmom sukcesivnog dijeljenja

Broj zapisan u dekadskom sustavu pretvara se u drugi brojevni sustav dijeljenjem s bazom sustava u koji se radi pretvorba te se bilježe ostatci dijeljenja koji predstavljaju znamenke u sustavu u koji se radi pretvorba. Postupak se ponavlja sve dok kvocijent ne postane nula. Zatim se očitavaju ostatci redoslijedom od posljednjeg prema prvom kako bi se formiralo konačno rješenje.

## 1. Brojevni sustavi, zapis cijelih i realnih brojeva u memoriji računala

### Primjer 1.4.

Dekadski broj  $35_{(10)}$  zapišite u binarnom, oktalnom i heksadekadskom brojevnom sustavu.

### Rješenje

pretvorba u binarni b. s.	pretvorba u oktalni b. s.	pretvorba u heksadekadski b. s.
$35 : 2 = 17$ i ost. 1 ↑ $17 : 2 = 8$ i ost. 1 ↑ $8 : 2 = 4$ i ost. 0 $4 : 2 = 2$ i ost. 0 $2 : 2 = 1$ i ost. 0 $1 : 2 = 0$ i ost. 1	$35 : 8 = 4$ i ost. 3 ↑ $4 : 8 = 0$ i ost. 4	$35 : 16 = 2$ i ost. 3 ↑ $2 : 16 = 0$ i ost. 2
$35_{(10)} = 100011_{(2)}$	$35_{(10)} = 43_{(8)}$	$35_{(10)} = 23_{(16)}$

### 1.2.3. Algoritam sukcesivnog množenja

**Algoritam sukcesivnog množenja** može se primijeniti kod pretvorbe decimalnog dijela dekadskog broja u odgovarajući binarni zapis. Decimalni dio dekadskog broja pretvara se u binarni brojevni sustav ponavljanim množenjem decimalnog dijela s 2, bilježeći cijeli dio rezultata kao binarnu znamenku te ponavljanjem postupka za preostali decimalni dio dok se ne postigne vrijednost 1,0 ili željena preciznost.

Beskonačno periodičan broj u nekom brojevnom sustavu prepoznaje se tako da postupak pretvorbe decimalnog dijela u željeni sustav počne ponavljati iste ostatke (znamenke) ili znamenke u ciklusima. To znači da će se isti uzorak ponavljati iznova, bez mogućnosti da se postigne točan kraj (1,0).

### 1.2.4. Veza između binarnog, oktalnog i heksadekadskog brojevno sustava

Posebno je praktično uočiti direktnu vezu između binarnog, oktalnog i heksadekadskog brojevno sustava. Jedna oktalna znamenka predstavlja se trima binarnim, dok se jedna heksadekadski predstavlja četirima odgovarajućim binarnim znamenkama kako je prikazano tablicom 1.2.

**Tablica 1.2.** Veza između binarnih, oktalnih i heksadekadskih znamenaka

binarna kombinacija	oktalni ekvivalent	binarna kombinacija	heksadekadski ekvivalent
000	0	0000	0
001	1	0001	1
010	2	0010	2
011	3	0011	3
100	4	0100	4
101	5	0101	5
110	6	0110	6
111	7	0111	7
		1000	8
		1001	9
		1010	A (10)
		1011	B (11)
		1100	C (12)
		1101	D (13)
		1110	E (14)
		1111	F (15)

## Direktna pretvorba iz binarnog u oktalni i heksadekadski sustav

Binarne znamenke cijelog dijela grupiraju se u skupine od po tri (za oktalni sustav) ili četiri (za heksadekadski sustav), s desna na lijevo, a svaka se grupa zamjenjuje odgovarajućom oktalnom ili heksadekadskom znamenkom. Ako broj binarnih znamenaka nije djeljiv s tri ili četiri, dodaju se nule s lijeve strane.

Decimalni dio binarnog broja pretvara se tako da se grupiraju binarne znamenke u skupine od po tri (za oktalni sustav) ili četiri (za heksadekadski sustav), ali s lijeva na desno. Svaka se grupa zatim zamjenjuje odgovarajućom oktalnom ili heksadekadskom znamenkom. Ako broj binarnih znamenaka nije djeljiv s tri ili četiri, dodaju se nule s desne strane.

### Primjer 1.5.

Dekadski broj  $72,3125_{(10)}$  zapišite u binarnom, oktalnom i heksadekadskom brojevnom sustavu.

### Rješenje

Broj je moguće prvo pretvoriti iz dekadskog u binarni zapis. Cjelobrojni dio pretvara se u binarni brojevni sustav **algoritmom sukcesivnog dijeljenja**, a decimalni **algoritmom sukcesivnog množenja**.

# 1. Brojevni sustavi, zapis cijelih i realnih brojeva u memoriji računala

72 : 2 = 36 i ost. 0  
36 : 2 = 18 i ost. 0  
18 : 2 = 9 i ost. 0  
9 : 2 = 4 i ost. 1  
4 : 2 = 2 i ost. 0  
2 : 2 = 1 i ost. 0  
1 : 2 = 0 i ost. 1

$0.3125 \cdot 2 = 0.625 \rightarrow 0$   
 $0.625 \cdot 2 = 1.25 \rightarrow 1$   
 $0.25 \cdot 2 = 0.5 \rightarrow 0$   
 $0.5 \cdot 2 = 1.0 \rightarrow 1$

$$72,3125_{(10)} = 1001000,0101_{(2)}$$

Za lakšu pretvorbu u oktalni i heksadekadski brojevni sustav, primjenjuje se svojstvo direktne pretvorbe.

**Direktna pretvorba** u oktalni brojevni sustav (jedna oktalna znamenka odgovara tri- ma binarnim):

$$\underline{001\ 001\ 000,010\ 100}_{(2)} = \underline{110,24}_{(8)}$$

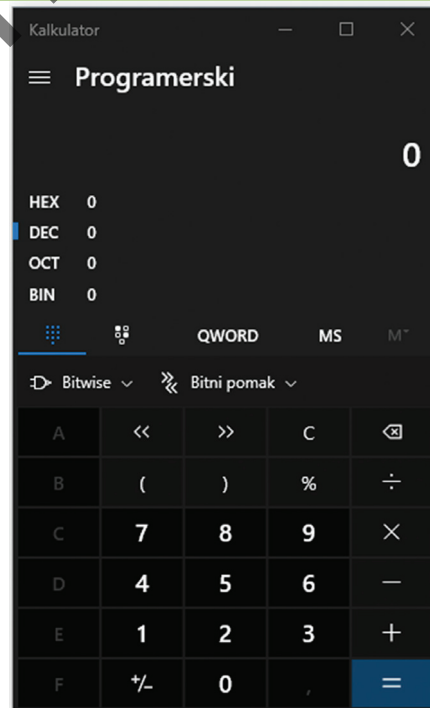
**Direktna pretvorba** u heksadekadski brojevni sustav (jedna heksadekadka zna- menka odgovara četirima binarnim):

$$\underline{0100\ 1000,0101}_{(2)} = \underline{48,5}_{(16)}$$

S pomoću poveznice <https://www.rapidtables.com/convert/number/index.html> moguće je dodatno uvježbati pretvorbe između brojevni sustava.



Također, rezultate je moguće provjeriti i s pomoću kalkulatora (slika 1.1).



Slika 1.1. Programerski mod kalkulatora

## 1.3. Memorija računala i mjerne jedinice za količinu podataka

**Memorija računala** predstavljena je kao niz **registara** jednake duljine, pri čemu se duljina registra u memoriji računala naziva riječ. Današnja računala koja primjerice rade sa 64-bitovnim podatcima imaju duljinu registra – riječi 64 bita.

**Registar** se sastoji od **bistabila**. Bistabil može pohraniti dva logička stanja: **stanje 0** i **stanje 1**. Grafički se bistabil prikazuje kao kvadratić u koji se upisuje stanje. Slikom 1.2. prikazana su dva bistabila, jedan u logičkom stanju 1, a drugi u stanju 0.



Slika 1.2. Logička stanja bistabila

Tako, na primjer, 8-bitovni registar radi lakšeg se zapisa grafički prikazuje kao na slici 1.3.



Slika 1.3. 8-bitovni registar

**Bit** (engl. *binary digit*) predstavlja osnovnu mjernu jedinicu za količinu memorije. 8 bitova predstavlja 1 **bajt** (engl. *byte*) te vrijedi **1 B = 8 bit**. Pri pohrani podataka u pravilu se koriste binarni prefiksi, dok se pri prijenosu podataka primjenjuju decimalni prefiksi. Neki od prefiksa prikazani su tablicom 1.3.

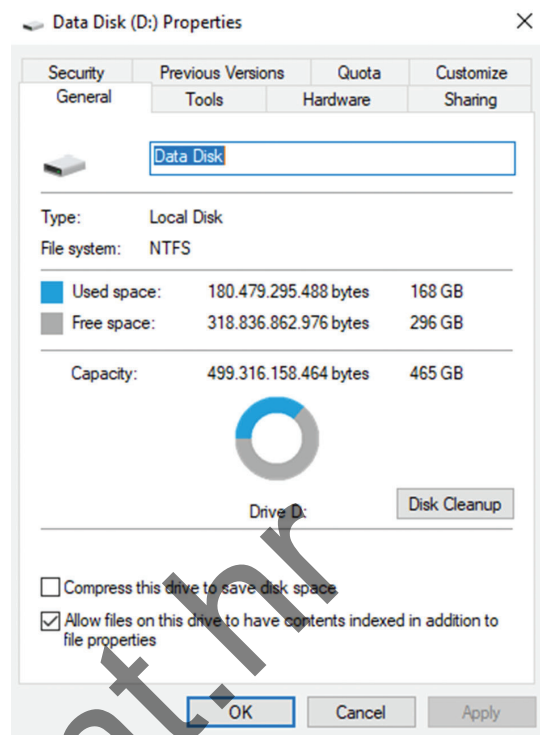
Tablica 1.3. Decimalni i binarni prefiksi

decimalni prefiksi			binarni prefiksi		
oznaka	naziv	numerička vrijednost	oznaka	naziv	numerička vrijednost
k	kilo	$10^3$	Ki	kibi	$2^{10}$
M	mega	$10^6$	Mi	mebi	$2^{20}$
G	giga	$10^9$	Gi	gibi	$2^{30}$
T	tera	$10^{12}$	Ti	tebi	$2^{40}$
P	peta	$10^{15}$	Pi	pebi	$2^{50}$

Mjerne jedinice poput kilobajta (kB), megabajta (MB), gigabajta (GB) i dr. tradicionalno su bile definirane u binarnom sustavu te su označavale 1024 bajta,  $1024 \cdot 1024$  bajta i  $1024 \cdot 1024 \cdot 1024$  bajta, tim redom. To je posebno desetljećima bilo dominantno u industriji. **Međunarodna elektrotehnička komisija** (pokrata IEC, od engl. *International Electrotechnical Commission*) potom je uvela **novi sustav prefiksa** kako bi se razlikovali decimalni i binarni prefiksi. To je uvedeno iz razloga što su u međunarodnom sustavu mjernih jedinica (SI) kilo, mega i giga oduvijek predstavljali 1000,  $1000 \cdot 1000$  i  $1000 \cdot 1000 \cdot 1000$  tim redom, a to je bilo u suprotnosti s binarnim interpretacijama u računarstvu.

Iako je sustav standardiziran neke informatičke industrije i dalje upotrebljavaju binarne definicije s prefiksima kilo, mega i giga. Tako na primjer neki proizvođači diskova upotrebljavaju decimalne prefikse te kupimo li primjerice tvrdi disk od 500 GB, provjerom u operativnom sustavu prikazat će se kapacitet od 465 GB (slika 1.4).

Kada se čitaju tehničke specifikacije, uvijek treba provjeriti radi li se o decimalnim ili binarnim prefiksima. U ovom udžbeniku upotrebljavaju se prefiksi propisani IEC standardom.



Slika 1.4. Kapacitet tvrdog diska

## Primjer 1.6.

Odredite kolika je razlika u broju bitova između 1 KiB i 1 kB.

### Rješenje

- 1 kB =  $10^3$  B = 1000 B
- 1 KiB =  $2^{10}$  B = 1024 B

Razlika je 24 bajta, što odgovara 192 bita, jer 1 B odgovara 8 bitova.

## 1.4. Zapis cijelih brojeva u memoriji računala metodom dvojnog komplementa

U ovom udžbeniku bit će opisano kako u memoriji računala prikazati:

- cijele brojeve metodom dvojnog komplementa
- realne brojeve standardom IEEE-754
- znakove (opisano u poglavlju 4.2.1.).

**Metodom dvojnog komplementa** u  $n$ -bitovni registar pohranjuju se cijeli brojevi iz raspona od  $-2^{n-1}$  do  $2^{n-1} - 1$ . Ako krajnji lijevi bit u registru ima vrijednost 1, u registru je pohranjen negativni broj, a ako je vrijednost 0, onda je u registru pohranjen pozitivan broj.

**Pozitivni cijeli brojevi** zapisuju se u memoriji računala tako da se prvo odredi ekviva-



lentni binarni zapis broja se te taj binarni broj zapiše u registar. Potom se dopiše onoliko nula koliko je potrebno za ispuniti cijeli registar.

U slučaju **negativnih cijelih brojeva** prvo je potrebno odrediti dvojni komplement. Njega se određuje tako da se prvo željeni broj zapiše binarno te se prema potrebi doda onoliko vodećih nula koliko je potrebno kako bi se popunio cijeli registar. Potom se odredi **jedinični komplement** (jedinice se zamijene nulama, a nule jedinicama) te se potom dobivenu vrijednost (jedinični komplement) zbroji s 1 i tako se dobije **dvojni komplement**.

### 1.4.1. Binarna aritmetika

Računala izvode vrlo složene operacije, a za shvaćanje načela prema kojem računalo zbraja dva cijela broja, tj. sadržaj dvaju registara, prvo je potrebno uvesti pojam binarnog zbrajanja.

**Zbrajanje u binarnom brojevnom sustavu** provodi se prema sljedećim pravilima:

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 0$ i 1 dalje

#### Primjer 1.7.

Za prikaz brojeva u računalu upotrebljava se 8-bitovni registar i metoda dvojnoga komplementa. Koji će biti prikaz brojeva  $10_{(10)}$  i  $-10_{(10)}$ ?

#### Rješenje

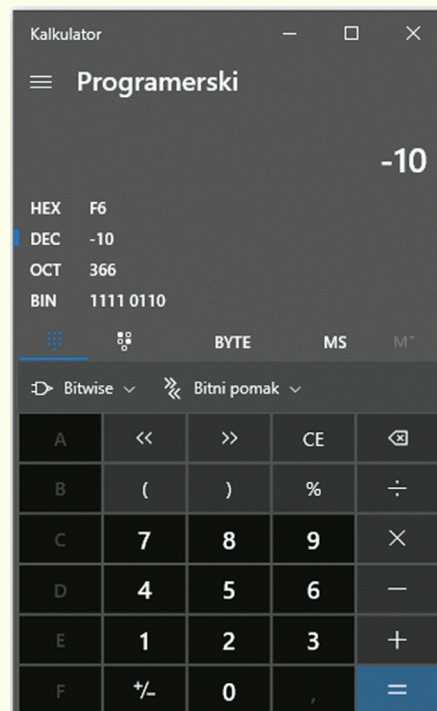
$$10_{(10)} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$-10_{(10)}$$

$$\begin{array}{r} 00001010 \\ 11110101 \\ + \quad 1 \\ \hline 11110110 \end{array}$$

$$11110110 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Provjera rješenja s pomoću kalkulatora nalazi se na slici 1.5.



Slika 1.5. Prikaz rješenja s pomoću kalkulatora

### Primjer 1.8.

Odredite zbroj sadržaja registara iz primjera 1.7.

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 + & & & & & & & \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
 \end{array}$$

### Rješenje

Zbrajanjem brojeva 10 i -10 dobiva se vrijednost 0. To je i prikazano sljedećim postupkom te su u registru koji predstavlja zbroj sadržaja registara u kojima su vrijednosti 10 i -10 sve nule. Također zadnja jedinica, koja je nastala prijenosom, više ne stane u 8-bitovni registar.

	1	1	1	1	1	1	1	1	prijenos
$10_{(10)}$		0	0	0	0	1	0	1	0
$-10_{(10)}$		1	1	1	1	0	1	1	0
0		0	0	0	0	0	0	0	0

## 1.5. Zapis realnih brojeva u memoriji računala prema IEEE 754 standardu

Realni brojevi u memoriji računala pohranjuju se prema **IEEE 754 standardu** u formatu jednostruke ili dvostruke preciznosti, uz ograničenu točnost zbog konačnog broja bitova.

### 1.5.1. Jednostruka preciznost

Prema navedenom standardu brojevi zapisani u **jednostrukoj preciznosti** zapisuju se u 32-bitovnim registrima. Prvi bit predstavlja **predznak** (1 predstavlja da je broj negativan, a 0 pozitivan), potom je osam bitova rezervirano za **karakteristiku** te dvadeset i tri bita za **mantisu** (slika 1.6).



Slika 1.6. 32-bitovni registar IEEE 754 standard