5

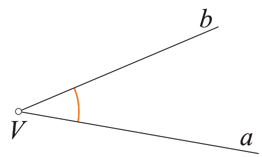
SUKLADNOST I SLIČNOST

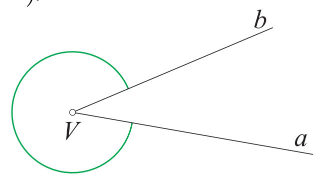
Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

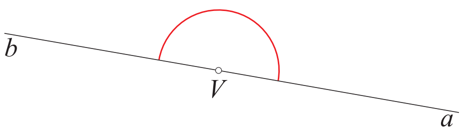
- opisati karakteristične točke trokuta
- primijeniti poučke o sukladnosti i sličnosti trokuta te Talesov poučak u rješavanju problema
- primijeniti Heronovu formulu pri računanju površine trokuta
- riješiti problem rabeći Euklidov poučak o pravokutnom trokutu
- povezati omjere duljina stranica i mjere kutova u pravokutnom trokutu
- računati vrijednosti trigonometrijskih omjera, duljine stranica te mjere šiljastih kutova u pravokutnom trokutu.

5.1. Kut

Prisjetimo se definicije kuta. Neka su a i b dva polupravca s početnom točkom V. Dio ravnine omeđen dvama polupravcima nazivamo **kut** i označavamo sa $\sphericalangle aVb$. *





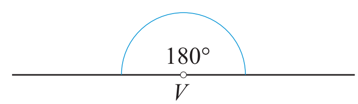


Budući da se u ravnini pojavljuju dva kuta omeđena tim polupravcima, kut koji razmatramo obilježavamo lukom.

Ako su polupravci a i b u takvom položaju da je njihova unija cijeli pravac, tada govorimo o **ispruženom kutu**.

Za mjerenje kutova upotrebljavamo dvije vrste mjernih jedinica: stupnjeve i radijane. Ovdje ćemo detaljnije opisati mjerenje u stupnjevima. Za veličinu, tj. mjeru kuta $\sphericalangle aVb$ koristimo se oznakom $|\sphericalangle aVb|$.

Ispruženi kut ima 180 stupnjeva, što kraće označavamo sa 180°.
Kut od 1° je stoosamdeseti dio ispruženog kuta.



Stupnjevi nisu dekadske jedinice. Manje jedinice od stupnja su kutna minuta i kutna sekunda. Za jednu minutu koristimo se oznakom $1'$, a za jednu sekundu $1''$. Jedan stupanj ima 60 minuta, a jedna minuta ima 60 sekundi, tj.

$$1^\circ = 60', \quad 1' = 60''.$$

PRIMJER 1.

Izračunajmo:

a) $35^\circ 45' 53'' + 41^\circ 20' 12''$ **b)** $41^\circ 20' 12'' - 35^\circ 45' 53''$.

a) Zbrajanje počinjemo od sekundi. $53'' + 12'' = 65''$ što je jedna minuta i pet sekundi, tj. $65'' = 1'5''$. $5''$ zapisujemo, a pamtimo $1'$ koju dalje zbrajamo s minutama: $45' + 20' + 1' = 66' = 1^\circ 6'$. $6'$ zapisujemo, a 1° pamtimo dalje. Konačno, zbrajamo stupnjeve: $35^\circ + 41^\circ + 1^\circ = 77^\circ$. Zbroj je $77^\circ 6' 5''$.

b) Oduzimanje počinjemo također od sekundi. Ali, u ovom je primjeru stanje takvo da treba od $12''$ oduzeti $53''$. Zato jednu minutu (od $20'$) pretvaramo u sekunde pa sada imamo $72'' - 53'' = 19''$. Prelazimo na oduzimanje minuta. I tu je situacija slična: od $19'$ treba

* Iako je kut dio ravnine, tj. skup točaka, a njegova veličina je broj, često ćemo za oba pojma koristiti istu oznaku, tj. neko grčko slovo α, β, γ, δ... Tako ćemo nekad reći da crtamo kut α (dakle, α je dio ravnine), a ponekad ćemo pisati $\alpha = 30^\circ$ (dakle, α je veličina kuta). Uvijek će iz konteksta zadatka biti jasno radi li se o skupu točaka ili o broju.

oduzeti $45'$. Sad 1° (od 41°) pretvaramo u $60'$, te imamo $79' - 45' = 34'$. I konačno $40^\circ - 35^\circ = 5^\circ$. Rezultat je: $41^\circ 20' 12'' - 35^\circ 45' 53'' = 41^\circ 19' 72'' - 35^\circ 45' 53'' = 40^\circ 79' 72'' - 35^\circ 45' 53'' = 5^\circ 34' 19''$.

PRIMJER 2.

Koliko stupnjeva ima kut $\alpha = 31^\circ 21' 45''$?

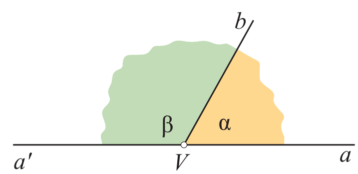
Budući da je $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ i $1'' = \left(\frac{1}{3\,600}\right)^\circ$, vrijedi $31^\circ 21' 45'' = 31^\circ + \frac{21}{60} + \frac{45}{3\,600} = 31.3625^\circ$.

Više o ovome
ele-udzbenik.hr

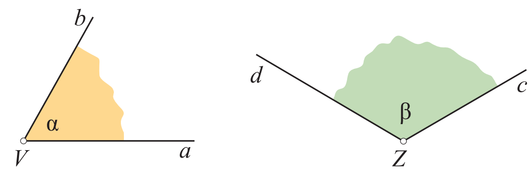
Pri računu možemo upotrijebiti i džepna računala koja imaju funkcijsku tipku DMS ili ° ' " kojom se upisani broj prikazuje u obliku stupnjevi-minute-sekunde, a korištenjem tipke SHIFT i DMS ili ° ' " broj koji je dan u obliku stupnjevi-minute-sekunde prikazuje se u decimalnom zapisu.

Ovisno o proizvođaču računala, ove funkcije imaju možda i neke druge nazive, zato preporučujemo da izradom ovih uvodnih zadataka upoznate svoje računalo.

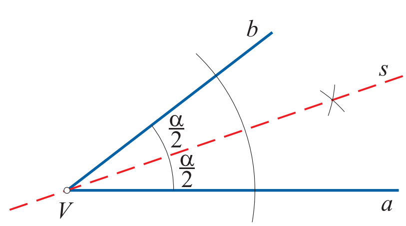
Ako su $\sphericalangle aVb$ i $\sphericalangle bVa'$ dva kuta s istim vrhom, a unija polupravaca a i a' je cijeli pravac, tada te kutove nazivamo **sukuti** ili **susjedni kutovi**. Unija tih dvaju sukuta je ispruženi kut, a zbroj njihovih veličina je 180°, tj. $\alpha + \beta = 180^\circ$.



Ako su $\sphericalangle aVb$ i $\sphericalangle cZd$ dva kuta čije veličine zbrojene daju 180°, takve kutove nazivamo **suplementarnim** kutovima.



$\alpha + \beta = 180^\circ$



Simetrala s_α kuta $\sphericalangle aVb$ dijeli kut na dva sukladna dijela.

Pravac koji dijeli kut na dva dijela jednakih veličina nazivamo **simetralom kuta**. Na slici je prikazana konstrukcija simetrale s kuta α s pomoću šestara i ravnala.

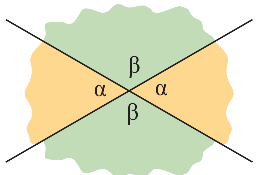
Dobiveni dijelovi kuta su jednakih veličina. Kažemo da su to **sukladni** kutovi. Oznaka za sukladnost je $\cong$.

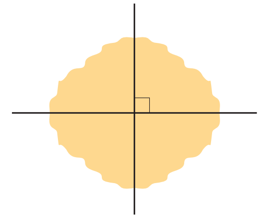
Općenito, kad jedan kut možemo rotirati, translatirati, reflektirati tako da se podudara s drugim kutom, tada te kutove zovemo **sukladnima**.

Pogledaj film...
https://ele-udzbenik.hr

Prikažimo dvije situacije u kojima se javljaju sukladni kutovi.

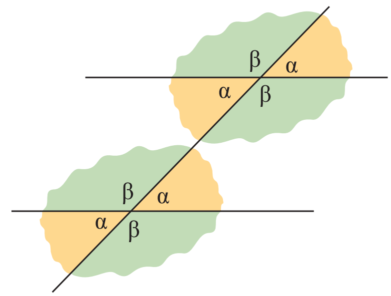
Dva ukrštena pravca u ravnini određuju četiri kuta. Ta četiri kuta su u parovima sukladni. Sukladna su ona dva kuta čiji krakovi čine pravce. Ta dva kuta nazivaju se **vršni** kutovi.

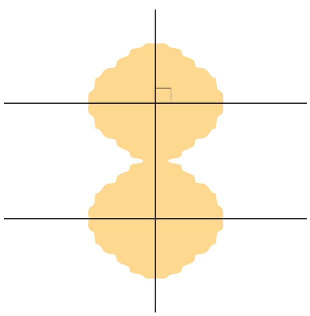




U slučaju da su sva četiri kuta međusobno sukladna, kažemo da su pravci **okomiti**, a svi kutovi koji se pojavljuju na slici su **pravi** kutovi.

Ako u ravnini imamo dva paralelna pravca i treći pravac koji ih siječe, tada ti pravci određuju osam kutova. Taj treći pravac koji ih siječe naziva se **presječnica** ili **transverzala** para paralelnih pravaca. Ako presječnica nije okomita na paralelne pravce, onda su, od tih osam kutova, četiri šiljasta, a četiri tupa. Svi šiljasti kutovi su međusobno sukladni i svi tupi kutovi su međusobno sukladni. To se svojstvo naziva **poučak o presječnici**.



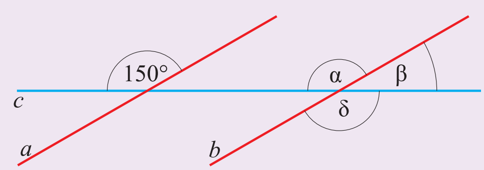


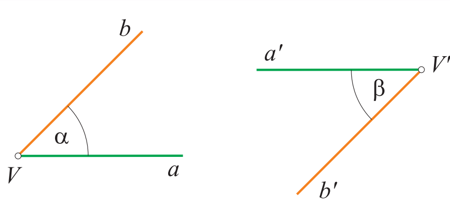
Ako je presječnica okomita na paralelne pravce, svi kutovi su pravi i međusobno su sukladni.

PRIMJER 3.

Na slici su dana dva paralelna pravca a i b te njihova presječnica c. Izračunajmo α, β i δ.

Od osam kutova na slici tupi kutovi imaju veličine $150°$. Dakle, prema poučku o presječnici $\alpha = \delta = 150°$. α i β su sukuti pa je $\alpha + \beta = 180°$, $\beta = 180° - \alpha = 180° - 150° = 30°$.

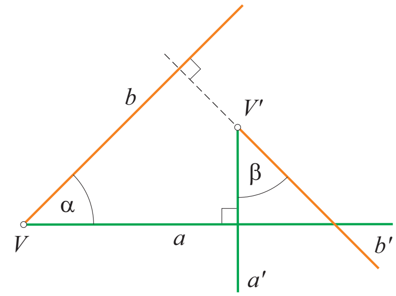




$\alpha = \beta$ *jer je* $a \parallel a'$, $b \parallel b'$

Prethodna se situacija može poopćiti. Kad god imamo **kutove s paralelnim krakovima** koji su ili oba šiljasta ili oba tupa, ti su kutovi sukladni.

Također, ako kutovi $\sphericalangle aVb$ i $\sphericalangle a'Vb'$ imaju okomite krakove, tj. $a \perp a'$, $b \perp b'$ i oba su kuta iste vrste – ili oba šiljasta ili oba tupa, tada su ti kutovi sukladni.

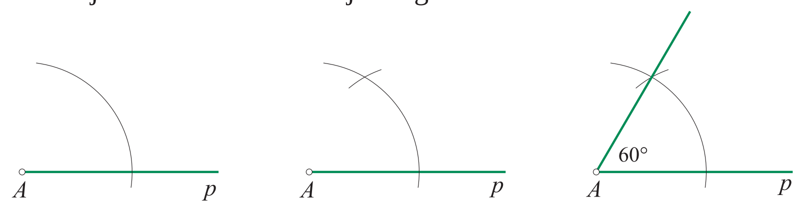


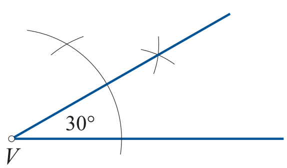
$\alpha = \beta$ *jer je* $a \perp a'$, $b \perp b'$

Neke je kutove moguće konstruirati s pomoću trokuta i šestara dok se drugi crtaju s pomoću kutomjera. Tako možemo konstruirati 60°, 90°, njihove višekratnike, polovične kutove itd.

Prisjetimo se kako se konstruiraju kutovi od 60°, 30° i 90°.

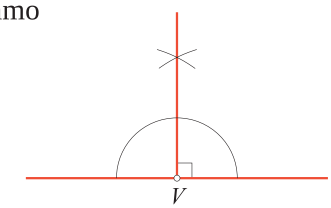
Nacrtajmo polupravac p s vrhom A. U šestar uzmimo proizvoljni polumjer r i oko A opišimo kružnicu polumjera r. Oko točke gdje kružnica siječe p opet opišemo kružnicu polumjera r. Presjek tih kružnica je točka koja s točkom A određuje drugi krak kuta od 60°.





Kut od 30° konstruiramo tako da nacrtamo simetralu kuta od 60°.

Istu ideju koristimo pri konstrukciji kuta od 90°. On je, kako vidimo, polovina ispruženog kuta.



Pogledaj film...
ele-udzbenik.hr

ZADATCI 5.1.

1. Koliko stupnjeva ima kut:

a) $35^\circ 30'$ **b)** $27^\circ 30'$ **c)** $15^\circ 12' 30''$ **d)** $41^\circ 10' 20''$?

2. Pretvori stupnjeve u oblik “stupnjevi minute sekunde”:

a) 45.2° **b)** 31.5° **c)** 21.31° **d)** 65.435°.

3. Izračunaj $\alpha + \beta$ i $\alpha - \beta$ ako je zadano:

a) $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 27^\circ$ **b)** $\alpha = 63^\circ 25'$, $\beta = 47^\circ 18'$ **c)** $\alpha = 42^\circ 54'$, $\beta = 18^\circ 23'$

d) $\alpha = 75^\circ 29'$, $\beta = 65^\circ 41'$ **e)** $\alpha = 49^\circ 2' 10''$, $\beta = 11^\circ 11' 7''$ **f)** $\alpha = 81^\circ 13' 5''$, $\beta = 43^\circ 20' 18''$.

4. Ako je zadan kut γ, odredi veličinu njemu suplementarnog kuta:

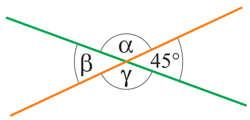
a) $\gamma = 28^\circ$ **b)** $\gamma = 45^\circ 30'$ **c)** $\gamma = 130^\circ 52'$ **d)** $\gamma = 54^\circ 18' 21''$.

5. Zadan je kut β. Izračunaj njegovu polovinu. Rezultat izrazi u stupnjevima, minutama i sekundama.

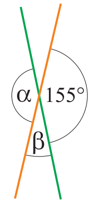
a) $\beta = 45^\circ$ **b)** $\beta = 32^\circ 43'$ **c)** $\beta = 43^\circ 27'$ **d)** $\beta = 18^\circ 35' 28''$.

6. Odredi nepoznate kutove nacrtane na slikama.

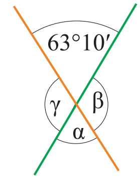
a)



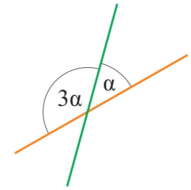
b)



c)

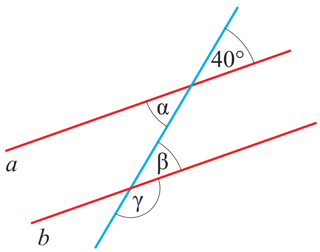


d)

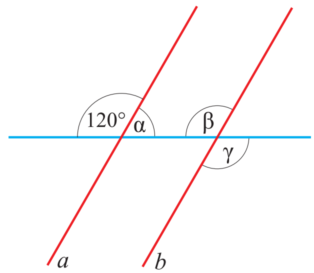


7. Odredi kutove α, β i γ na slikama, ako su pravci a i b paralelni:

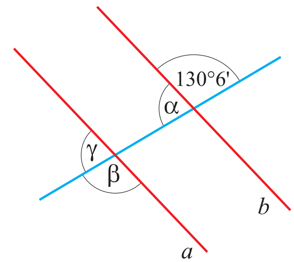
a)



b)



c)



8. Konstruiraj kut od:

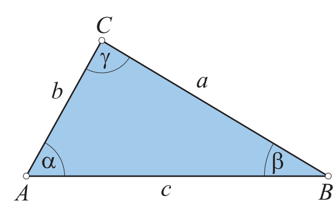
a) 60° **b)** 30° **c)** 15° **d)** 7.5°. **e)** 90°

f) 45° **g)** $22^\circ 30'$. **h)** 120° **i)** 150° **j)** 75°.

5.2. Trokut

Svojstva trokuta

Neka su A, B i C tri različite točke koje ne leže na istom pravcu. **Trokut** ABC je dio ravnine omeđen trima dužinama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.



Točke A, B i C zovemo **vrhovi** trokuta, dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ **stranice** trokuta, a kutove $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle ACB$ unutarnji **kutovi** trokuta. Za kutove i za njihove veličine koristimo i oznake α, β, γ redom.

Općenito, za vrhove se koriste velika slova latinice, a za kutove mala slova grčkog alfabeta. Duljine stranica obično označavamo malim slovima latinice, tj. $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

Potraži dokaz... ele-udzbenik.hr

1. Osnovno svojstvo trokuta jest: zbroj duljina dviju stranica veći od duljine treće stranice, tj.

$$a+b>c, \quad a+c>b, \quad b+c>a.$$

To svojstvo zovemo **nejednakost trokuta**.

2. Istaknimo još jedno svojstvo trokuta: **zbroj veličina svih kutova** u trokutu je $180°$, tj. $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

U primjeni su i sljedeća svojstva.

3. Nasuprot većem kutu u trokutu nalazi se veća stranica.
4. Nasuprot većoj stranici u trokutu nalazi se veći kut.
5. Nasuprot jednakim kutovima* u trokutu jednake su stranice.
6. Nasuprot jednakim stranicama u trokutu jednaki su kutovi.

PRIMJER 1.

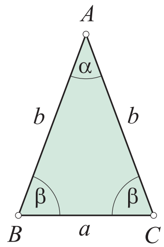
Izračunajmo kut γ trokuta ABC ako je $\alpha=35°48'15''$, $\beta=48°20'55''$.

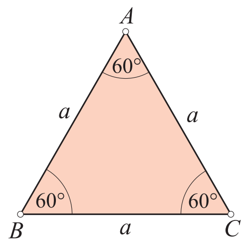
Prvo zbrojimo α i β. $\alpha+\beta=35°48'15''+48°20'55''=83°68'70''=84°9'10''$.
Sad je $\gamma=180°-(\alpha+\beta)=179°59'60''-84°9'10''=95°50'50''$.
Želimo li γ prikazati samo u stupnjevima, tada imamo: $\gamma=95+\dfrac{50}{60}+\dfrac{50}{3600}=95.847\dot{2}°$.

Vrste trokuta

Trokute razlikujemo s obzirom na stranice ili s obzirom na kutove. S obzirom na duljine stranica razlikujemo raznostranične, jednakokračne i jednakostranične trokute.

Jednakokračan trokut ima bar dvije stranice jednake duljine. Te stranice zovemo **krakovima** trokuta, a treću stranicu nazivamo **osnovica** trokuta. Kutovi nasuprot krakovima jednakih su veličina, tj. sukladni su.





Jednakostranični trokut ima sve tri stranice jednake duljine i sva tri kuta jednaka $60°$.

S obzirom na kutove, trokute dijelimo na šiljastokutne, pravokutne i tupokutne.

* Često se upotrebljava fraza "kutovi su jednaki". To zapravo znači da su ti kutovi sukladni, a njihove veličine jednaki su brojevi.

6

PODATCI

Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- prikazati podatke tablično, stupčastim dijagramom, histogramom, linijskim dijagramom itd.
- odrediti srednje vrijednosti: mod, medijan, donji i gornji kvartil te standardnu devijaciju
- računati aritmetičku sredinu statističkih podataka prikazanih na različite načine

6.1. Vrste podataka. Tablice frekvencija

Okruženi smo mnogim podatcima, različitih vrsta i prikaza. Tako u dnevnim novinama i raznim publikacijama nalazimo podatke o broju nezaposlenih u državi, o prosječnim plaćama u pojedinim dijelovima gospodarstva, o broju noćenja turista tijekom sezone, o temperaturi, tlaku i relativnoj vlazi. U razrednoj knjizi imamo podatke o tome kojim se izvannastavnim aktivnostima bave učenici, o broju izostanaka te podatke o uspjehu. U zdravstvenim kartonima, osim osnovnih podataka o pacijentu, nailazimo na podatke o tipu krvne grupe, o postojećim alergijama, o masi i visini pacijenta, preboljenim bolestima itd.

Mnoge podatke i sami prikupljamo kako bismo dobili bolji uvid u neku pojavu. Radi lakšeg razumijevanja, boljeg uočavanja pravilnosti i trendova podatke razvrstavamo i prikazujemo na razne načine.

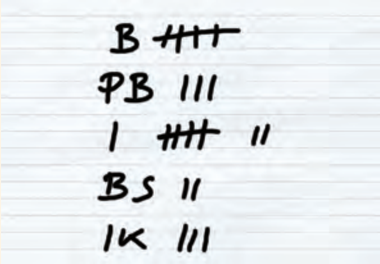
PRIMJER 1.

U pekarnici se prodaje nekoliko vrsta kruha: bijeli (B), polubijeli (PB), integralni (I), kruh s bučinim sjemenkama (BS), integralni u kalupu (IK). Tijekom jednog sata trgovac je bilježio vrste kruha koje je prodao. Evo što je zapisao:

B	B	I	I	IK	PB	PB	B	I	IK
BS	I	B	B	BS	IK	PB	I	I	I

Ovo su tzv. **primarni** podatci, koji nisu sređeni ni po kakvoj osnovi. Prva faza sređivanja podataka jest tablično prikazivanje.

vrsta kruha	broj prodanih komada kruha
bijeli	5
polubijeli	3
integralni	7
s bučinim sjemenkama	2
integralni u kalupu	3



Svojstvo koje nas je zanimalo je vrsta kruha. To svojstvo još nazivamo **obilježje** ili **varijabla**. Kruh može biti bijeli, polubijeli, integralni, s bučinim sjemenkama, integralni u kalupu, tj. ovo obilježje poprima jednu od tih pet **vrijednosti** (kategorija). Te vrijednosti zapisujemo u prvom stupcu. U ovom primjeru podatci su uzeti od svih kupaca kruha tijekom jednog sata i taj se skup naziva **populacija**. Brojevi u drugom stupcu nazivaju se **frekvencije**, a kažu nam koliko se puta u skupu podataka pojavljuje neka vrijednost. Dobivena se tablica zove **tablica frekvencija**.

PRIMJER 2.

Na ispitu znanja iz matematike učenici 1.b razreda postigli su sljedeće rezultate: ocjenu odličan dobilo je 3 učenika, ocjenu vrlo dobar 9 učenika, ocjenu dobar 9 učenika, ocjenu dovoljan 5 učenika, a ocjenu nedovoljan 4 učenika. Prikažimo te podatke tablično i odredimo frekvenciju pojedine ocjene. Što je obilježje, a što vrijednost obilježja?

ocjena	broj učenika
odličan	3
vrlo dobar	9
dobar	9
dovoljan	5
nedovoljan	4

Obilježje je “ocjena iz ispita iz matematike”, a vrijednosti obilježja su: odličan, vrlo dobar, dobar, dovoljan i nedovoljan. Frekvencije su upisane u drugi stupac tablice.

U primjerima 1 i 2 razmatrali smo **kategorijska** obilježja i to **nominalno** u primjeru 1 i **rangirano** u primjeru 2. U sljedećem primjeru prikazat ćemo jedan numerički niz nastao mjerenjem neke fizikalne veličine, pri čemu vrijednosti mogu biti proizvoljni realni brojevi, unutar nekog intervala koji ima fizikalnog smisla. Takva obilježja zovu se **numerička obilježja**.

PRIMJER 3.

Među učenicima 1.b razreda provedena je anketa. Jedno od pitanja bilo je ovo: “Za koliko si vremena danas stigao od kuće do škole?” Učenici su dali sljedeća vremena (iskazana u minutama):

66	54	61	44	36	22	40	15	10	70	56	54	
50	47	51	33	39	24	80	60	61	47	36	42	25

Prikažimo ove podatke tablično. Budući da je frekvencija svake vrijednosti mala, podatke ćemo grupirati. Te se grupe nazivaju **razredi**. Obično se stvara 6 do 20 razreda jednake širine. Napravimo grupiranje u 7 razreda jednake širine.

Popis razreda nalazi se u prvom stupcu, a frekvencija, tj. broj učenika čije se vrijeme putovanja nalazi u pojedinom razredu napisani su u drugom stupcu.

Najmanje vrijeme putovanja je 10, a najveće 80, dakle imamo

$$80 - 10 + 1 = 71 \quad \text{mogućih vrijednosti od 10 do 80.}$$

Taj broj podijelimo s brojem razreda i dobiveni broj zaokružimo na više. U ovom slučaju imamo račun $71 : 7 \approx 10.14$, i broj 10.14 zaokružimo na 11.

Dakle, **širina razreda** je 11. To znači da se u prvom razredu nalaze vrijednosti: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 i 20, tj. oni x za koje je $10 \leqslant x \leqslant 20$. U drugom razredu nalaze se vrijednosti 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 i 31. I tako dalje za svaki razred.

U ovakvom slučaju, kad je riječ o numeričkim podatcima, korisno je znati i tzv. precizne granice razreda. Naime, razredi se moraju nastavljati jedan na drugoga. Zato se kao precizne granice prvoga razreda stavljaju 9.5 kao donja granica i 20.5 kao gornja granica razreda. Precizne granice drugoga razreda su 20.5 i 31.5 itd. Ovo uvođenje preciznih granica razreda ima i svoje fizikalno objašnjenje. Naime, kod mjerenja smo svaki rezultat koji je bio veći od 20.5 registrirali kao 21, a svaki rezultat koji je bio manji od 20.5 registrirali smo kao 20. Sada tablica izgleda ovako:

trajanje putovanja do škole (u minutama)	precizne granice razreda	frekvencija
10 – 20	9.5 – 20.5	2
21 – 31	20.5 – 31.5	3
32 – 42	31.5 – 42.5	6
43 – 53	42.5 – 53.5	5
54 – 64	53.5 – 64.5	6
65 – 75	64.5 – 75.5	2
76 – 86	75.5 – 86.5	1

Kao što vidimo, kad podatke grupiramo, gubimo dio informacija. Gledajući prvi redak i tablicu frekvencija (ako primarne podatke nemamo), možemo samo zaključiti da se u intervalu $\langle 9.5, 20.5 \rangle$ nalaze dva podatka, ali ne znamo koji su to podatci.

Drugi način prikazivanja podataka koji čuva primarne podatke, a ipak nam nudi zoran prikaz distribucije tih podataka je tzv. **stablo-list dijagram**. Još se upotrebljavaju i nazivi *stem-leaf* dijagram ili SL-dijagram. Prikažimo stablo-list dijagram za podatke o vremenima. U prvi redak zapisujemo sve brojeve kojima je prva znamenka 1, a zadnju znamenku zapisujemo nakon vertikalne crte. U drugi redak zapisujemo sve brojeve kojima je prva znamenka 2, a zadnju znamenku zapisujemo nakon vertikalne crte.

Postupak ponavljamo dok ne iscrpimo sve mogućnosti. Uz dijagram zapisujemo i legendu u kojoj je opisano značenje zapisa.

1	05
2	425
3	3669
4	02477
5	01446
6	0116
7	0
8	0

Legenda: $1|0 = 10$ min.

Pri stvaranju tablice mogli smo granice razreda postaviti i drukčije. Na primjer umjesto da počnemo s najmanjim elementom iz skupa podataka možemo početi s još manjim 9, 8, 7, 6, 5 ili 4. Pokušajte napraviti tablicu frekvencija za neke od tih mogućnosti.

ZADATCI 6.1.

1. Zaposlenici tvrtke "TIKA" anketirani su o tome koji im je dan u tjednu najdraži. Dobiveni su sljedeći podatci:

uto	sri	čet	pon	pon	sri	pet	pet	čet	sub
ned	ned	pon	pet	pet	sri	pet	pet	čet	sub

Podatke prikaži u tablici frekvencija. Što je obilježje, a što su vrijednosti tog obilježja? Koji dan im je najdraži? Koliko je zaposlenika anketirano?

2. Učenici 1.c razreda su na testu iz matematike ostvarili ove ocjene:

5	4	4	2	5	3	3	2	1	1	5	1
3	3	2	2	2	3	4	4	1	4	2	3

Napravi tablicu frekvencija. Što je obilježje, što su vrijednosti tog obilježja?

3. Provedite anketu u svom razredu

a) o tome koje kućne ljubimce imaju učenici

b) o sportovima kojima se bave učenici

c) o broju braće i sestara koje imaju

d) o najdražem jelu

e) o najdražem napitku

f) o vrsti mobilne mreže kojom se učenici koriste.

Podatke prikaži u tablicama frekvencije.

4. Učenicima 1.a razreda izmjerena je visina i dobiveni su ovi podatci (iskazani u centimetrima):

182	153	164	173	184	175	180	155	201	177	180	183
186	188	182	178	169	168	173	159	152	162	163	185

Napiši stablo-list dijagram. Podatke grupiraj u 6 razreda jednake širine i napravi tablicu frekvencija. Koji je razred najbrojniji, a koji ima najmanje podataka? Koliko učenika ima visinu manju od 170 cm? Koliko je učenika visoko barem 188 cm?

5. Specijalist ljudskih resursa anketirao je zaposlenike tvrtke "MAT" o udaljenosti njihovih domova do tvrtke. Dobio je sljedeće podatke o traženim udaljenostima iskazane u kilometrima:

2	3	4	10	1	3	5	8	9	3	4	8	12	15	20
4	4	9	8	7	7	7	6	5	12	15	10	8	3	2

Grupiraj podatke u 5 razreda i napravi tablicu frekvencija.

6. Plaća zaposlenika tvrtke S&Z u travnju dana je sljedećim nizom podataka:

930.00	981.00	930.00	981.00	1245.50	1020.50	981.00	1423.00
905.00	1343.60	1721.00	1090.20	2200.00	1523.00	1954.50	1075.50
1260.50	995.00	1857.30	1180.10	2189.20	1645.20	2000.00	1547.00
2230.00	2010.20	1955.50	1573.40	2145.60	1751.80	1154.00	1920.50

Grupiraj podatke u 7 razreda jednake širine tako da prvi razred počinje s 905.00 i napravi tablicu frekvencija.

6.2. Grafičko prikazivanje podataka

Osim tablicom podatke prikazujemo i grafički. Dijagrami nam omogućuju da lakše analiziramo i uočimo bitna svojstva prikupljenih podataka.

PRIMJER 1.

Učenici 1.a razreda anketirani su o najomiljenijoj vrsti voća. Njihovi odgovori i frekvencije svakog od voća dani su u ovoj tablici:

najomiljenija vrsta voća	broj učenika kojima je to voće najomiljenije (frekvencija)
jabuke	6
kruške	2
naranče	4
banane	9
šljive	4

Odgovorimo na neka pitanja:

a) Koliko je učenika bilo obuhvaćeno anketom?

b) Koje se voće najčešće javlja kao najomiljenije voće?

c) Što je obilježje i koje su mu vrijednosti?

d) O kojoj je vrsti obilježja riječ?

e) Koliki dio razreda najviše voli banane?

f) Koliki dio razreda najviše voli jabuke ili kruške?

g) Prikažimo ove podatke grafički.

Zbrojimo li sve frekvencije, dobit ćemo broj učenika obuhvaćenih anketom, tj. $n = 6 + 2 + 4 + 9 + 4 = 25$. Učenici su se najčešće odlučili za banane što je vidljivo iz činjenice da to voće ima najveću frekvenciju. Obilježje je "najomiljenije voće", a vrijednosti tog obilježja su: jabuke, kruške, naranče, banane, šljive. Riječ je o kategorijskom nominalnom obilježju.

Za banane se odlučilo 9 učenika što čini $\frac{9}{25}$ ukupnog broja učenika u razredu. Iskažemo li rezultat u postotku, dobivamo da 36 % razreda najviše voli banane. Broj $\frac{9}{25}$ zovemo relativna frekvencija vrijednosti "banane".

Dopunimo početnu tablicu sa stupcem relativnih frekvencija i sa stupcem relativnih frekvencija izraženih u postotcima.

najomiljenija vrsta voća	broj učenika kojima je to voće najomiljenije (frekvencija)	relativna frekvencija	relativna frekvencija u %
jabuke	6	0.24	24 %
kruške	2	0.08	8 %
naranče	4	0.16	16 %
banane	9	0.36	36 %
šljive	4	0.16	16 %

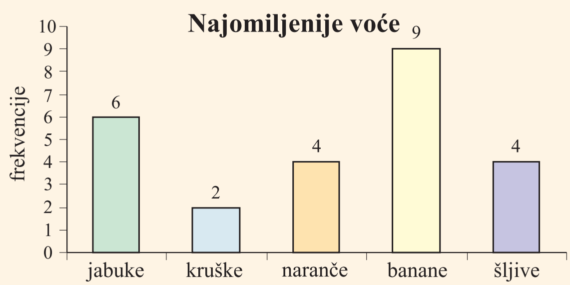
Sad možemo odgovoriti i na pretposljednje pitanje. Za jabuke i kruške odlučilo se $24\ \% + 8\ \% = 32\ \%$ razreda.

Relativna frekvencija

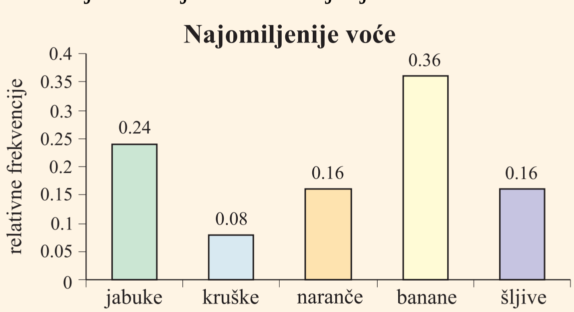
Relativna frekvencija jest broj koji kazuje koliki je udio promatranog podatka u odnosu na cjelinu.

Relativnu frekvenciju računamo tako da frekvenciju podijelimo s ukupnim brojem podataka. Zbroj svih relativnih frekvencija mora biti jednak 1.

Prikazat ćemo podatke ovog primjera grafički, s pomoću **stupčastog dijagrama**. Prvo nacrtajmo stupčasti dijagram frekvencija. Svaku vrijednost obilježja i njezinu frekvenciju prikazujemo u obliku stupca. Širine svih stupaca međusobno su jednake, a visine su proporcionalne frekvencijama.



Slično izgleda stupčasti dijagram relativnih frekvencija. Kod njega su visine stupaca proporcionalne relativnim frekvencijama vrijednosti obilježja.



7

VEKTORI

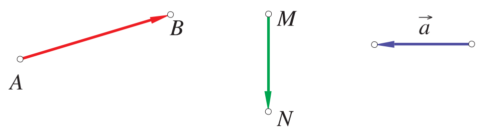
Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- prepoznati, opisati i koristiti elemente vektora
- računati s vektorima (zbrajati ih, oduzimati i množiti s brojem)
- prikazati vektore u ravnini i u koordinatnom sustavu te odrediti duljinu vektora

7.1. Vektori

Osnovni pojmovi o vektorima

Svake dvije različite točke A i B u ravnini određuju jednu dužinu koju označavamo sa $\overline{AB}$ ili $\overline{BA}$. No, ako propišemo koja će točka biti početna, a koja završna točka dužine, dobili smo tzv. **usmjerenu dužinu** ili **vektor**. Na slici to pokazujemo tako da nacrtamo strelicu kod završne točke.



Uobičajene oznake za vektor su mala tiskana slova sa strelicom iznad: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ ... *ili* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$ ... *gdje su* A *i* M *početne, a* B *i* N *završne točke vektora.*

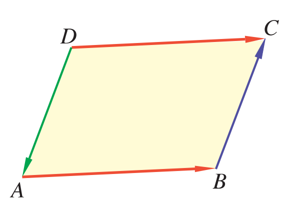
Vektor

Dužina kojoj je određeno koja je njena rubna točka početna, a koja završna, naziva se **usmjerena dužina** ili **vektor**.

Uz svaki vektor vezujemo tri karakteristične informacije: duljinu vektora, smjer i orijentaciju vektora.

Duljina vektora $\overrightarrow{AB}$ je duljina dužine $\overline{AB}$. Oznaka koju koristimo za duljinu vektora $\overrightarrow{AB}$ je $|\overrightarrow{AB}|$. Vektor duljine 1 nazivamo **jedinični vektor** ili **ort**.

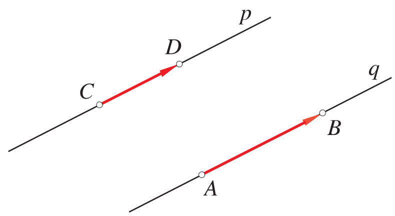
Za vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ kažemo da su **istog smjera** ili da su **kolinearni** ako su pravci AB i CD paralelni.

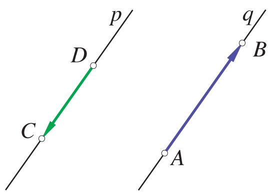


U paralelogramu $ABCD$ *istaknuti su vektori* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ *i* $\overrightarrow{BC}$. *Kako je* $AB \| DC$, *slijedi da su vektori* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{DC}$ *istog smjera. Analogno, iz* $BC \| AD$, *slijedi da su* $\overrightarrow{BC}$ *i* $\overrightarrow{DA}$ *istog smjera.*

Pravac AB na kojem leži vektor $\overrightarrow{AB}$ nazivamo **pravcem nositeljem vektora** $\overrightarrow{AB}$.

Promotrimo sada dva vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ istog smjera na svojim pravcima nositeljima p i q. Položaj točaka C i D može biti takav da vektor $\overrightarrow{CD}$ ima isto **usmjerenje** ili **orijentaciju** kao i vektor $\overrightarrow{AB}$ (slika lijevo).





Postoji mogućnost da su usmjerene dužine $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{AB}$ suprotno usmjerene ili orijentirane (slika desno).

Ako vektori nisu istog smjera, ne možemo ni govoriti o njihovim orijentacijama.

PRIMJER 1.

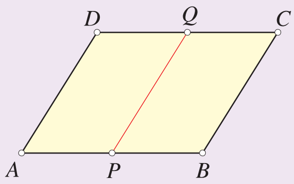
Dan je paralelogram $ABCD$ i polovišta P i Q stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Koristeći tih 6 točaka, napišimo sve vektore koji:

a) imaju jednaku duljinu kao vektor $\overrightarrow{DA}$

b) imaju isti smjer kao vektor $\overrightarrow{BC}$

c) imaju isti smjer kao vektor $\overrightarrow{AB}$

d) imaju istu orijentaciju kao vektor $\overrightarrow{PQ}$.



a) Vektori koji imaju jednaku duljinu kao vektor $\overrightarrow{DA}$ su: $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CB}$.

b) Isti smjer kao vektor $\overrightarrow{BC}$ imaju vektori $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QP}$.

c) Isti smjer kao $\overrightarrow{AB}$ imaju vektori $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{QC}$ i $\overrightarrow{CQ}$.

d) Vektori jednake orijentacije kao i vektor $\overrightarrow{PQ}$ su $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$.

Uočimo da smo u ovom primjeru istaknuli neke vektore koji imaju istu duljinu, isti smjer i istu orijentaciju. To su vektori $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$. Za takve vektore kažemo da su **jednaki**.

Jednakost vektora

Dva su vektora **jednaka** ako su istog smjera, iste orijentacije i jednakih duljina.

Istaknimo još neke vektore iz prethodnog primjera za koje vrijedi jednakost. Tako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{CB}$.

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju jednaku duljinu i isti smjer, ali su suprotne orijentacije. Takve vektore nazivamo **suprotnim vektorima**. Ako je $\vec{a}$ vektor, njemu suprotan vektor označavamo sa $-\vec{a}$.

ZADATCI 7.1.

1. Neka je $ABCD$ kvadrat. P, Q, R, S su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$, a T neka je sjecište dijagonala. Napiši sve vektore kojima su rubne točke istaknute točke tog kvadrata, koji s vektorom $\overrightarrow{SQ}$ imaju:

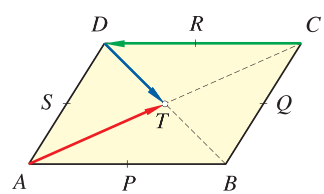
a) isti smjer **b)** istu orijentaciju **c)** jednaku duljinu.

2. Promotri opet kvadrat iz prethodnog zadatka. Napiši vektore koji su jednaki vektoru:

a) $\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{QP}$ **c)** $\overrightarrow{DS}$.

3. Neka je $ABCD$ paralelogram, P, Q, R, S su polovišta stranica, a T je sjecište dijagonala. Napiši sve vektore koji su jednaki vektoru:

a) $\overrightarrow{DT}$ **b)** $\overrightarrow{AT}$ **c)** $\overrightarrow{CD}$.

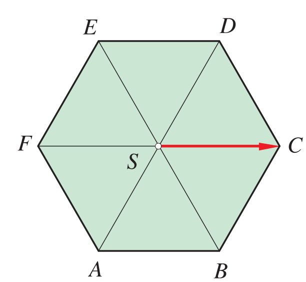


4. Promotri opet paralelogram iz prethodnog zadatka. Napiši sve vektore koji su suprotni vektoru:

a) $\overrightarrow{PB}$ **b)** $\overrightarrow{SR}$ **c)** $\overrightarrow{CQ}$.

5. U pravilnom šesterokutu $ABCDEF$ točka S je središte šesterokuta. Napiši one vektore koji s vektorom $\overrightarrow{SC}$:

a) imaju isti smjer
b) imaju istu orijentaciju
c) imaju jednaku duljinu i isti smjer
d) jednaki su vektoru $\overrightarrow{SD}$
e) suprotni su vektoru $\overrightarrow{SE}$.

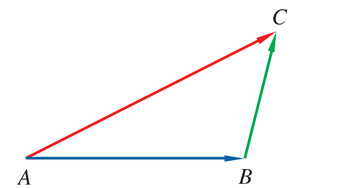


7.2. Zbrajanje vektora

Dva su uobičajena načina definiranja zbroja dvaju vektora, ovisno o tome jesu li vektori nadovezani ili imaju istu početnu točku.

Zbrajanje vektora prema pravilu trokuta

Neka su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ dva nesuprotna nadovezana vektora, tj. kraj jednog je početak drugog. Tada je zbroj vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ jednak vektoru $\overrightarrow{AC}$. Kako vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$ određuju jedan trokut ABC, zbrajanje po ovom pravilu zove se zbrajanje po pravilu trokuta.

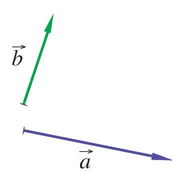


Zbroj dvaju nadovezanih vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ je vektor $\overrightarrow{AC}$.

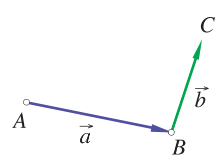
Pravilo trokuta

Zbroj vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ je vektor $\overrightarrow{AC}$.

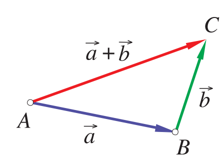
Kako zbrojiti dva vektora koji nisu nadovezani? Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bilo koja dva vektora koji nisu suprotni. Ako $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu nadovezani, translatirajmo ih u takav položaj da postanu nadovezani. Neka je A bilo koja točka ravnine, a B neka je jedinstvena točka za koju vrijedi $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Zatim odredimo točku C takvu da je $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Sad su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ nadovezani i zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\overrightarrow{AC}$.



$\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu nadovezani.



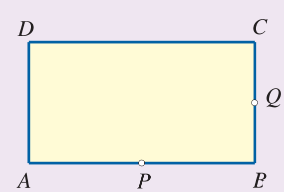
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ i $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ su nadovezani.



Zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\overrightarrow{AC}$.

PRIMJER 1.

U pravokutniku $ABCD$, P i Q su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Izračunajmo $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QC}$.



Prema pravilu trokuta, imamo

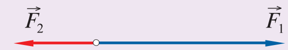
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ},$$

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PQ}, \quad \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PQ}.$$

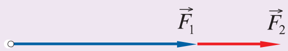
PRIMJER 2.

Na tijelo djeluju sile $\overrightarrow{F_1}$ i $\overrightarrow{F_2}$ u istom, odnosno suprotnom smjeru. Odredimo grafički njihovu rezultantu.

a) 

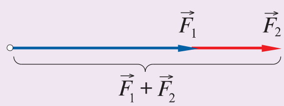
b) 

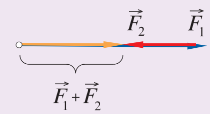
Ovo su dvije kolinearne sile. Nacrtamo li vektore $\overrightarrow{F_1}$ i $\overrightarrow{F_2}$ tako da budu nadovezani, dobivamo sljedeću sliku.

a) 

b) 

Prema pravilu trokuta, njihova rezultanta je vektor koji počinje u početku vektora $\overrightarrow{F_1}$, a završava u završnoj točki vektora $\overrightarrow{F_2}$, tj. grafički imamo

a) 

b) 

Pri definiciji zbrajanja po pravilu trokuta napominjali smo da vektori nisu suprotni. Što bi se dogodilo da koristeći pravilo trokuta zbrojimo dva suprotna vektora?

Neka je dan vektor $\overrightarrow{AB}$. Tada je $\overrightarrow{BA}$ njemu suprotan vektor.

Prema pravilu trokuta dobili bismo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA},$$

tj. rezultat ovog zbrajanja je objekt $\overrightarrow{AA}$ koji nije obuhvaćen našom definicijom vektora, jer smo zahtijevali da početna i završna točka vektora budu različite.

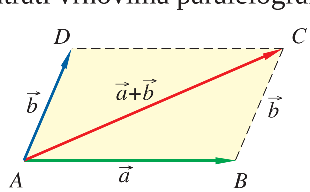
Dogovorno, rezultat zbrajanja dvaju suprotnih vektora, tj. objekt $\overrightarrow{AA}$ naziva se **nul-vektor** i označava sa $\vec{0}$. Nul-vektor grafički predočavamo točkom A. Duljina nul-vektora je 0, on je kolinearan sa svim vektorima, a orijentacija mu se ne definira.

Za svaki vektor $\vec{a}$ vrijedi

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Zbrajanje vektora po pravilu paralelograma

Neka su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ dva nekolinearna vektora koji imaju istu početnu točku A. Točke A, B i D možemo smatrati vrhovima paralelograma $ABCD$.



Ako vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju isti početak, njihov zbroj je ona dijagonala paralelograma koja ima isti početak.

U tom paralelogramu vrijedi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ i vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ su nadovezani te je njihov zbroj (prema pravilu trokuta) jednak vektoru $\overrightarrow{AC}$. Dakle, zbrajanjem vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ dobili smo vektor $\overrightarrow{AC}$, pri čemu je $\overline{AC}$ dijagonala paralelograma.

Pravilo paralelograma

Neka su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ dva nekolinearna vektora s istim početkom A. Tada je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, gdje je C četvrti vrh paralelograma $ABCD$, zadanog vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

Kojim ćemo se od ovih dvaju pravila koristiti, ovisi o problemu koji rješavamo.

Na kraju, istaknimo da je zbrajanje vektora (isto kao i zbrajanje brojeva) komutativno i asocijativno, tj. za svaka tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vrijedi

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{komutativnost,}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \qquad \text{asocijativnost.}$$

ZADATCI 7.2.

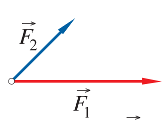
1. Dan je trokut ABC. Nacrtaj vektore $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$.

2. Dan je paralelogram $ABCD$. Grafički odredi zbroj vektora:

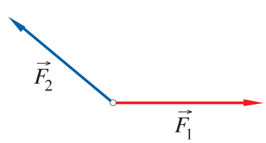
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ **c)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ **d)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ **e)** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

3. Na tijelo djeluju sile F_1 i F_2 s istim hvatištem. Odredi grafički rezultantu tih sila ako je:

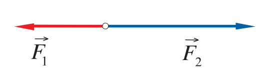
a)



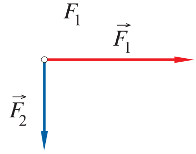
b)



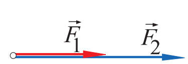
c)



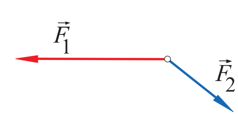
d)



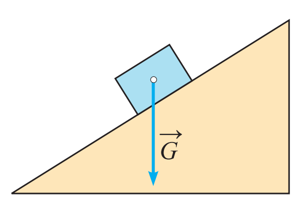
e)



f)



4. Tijelo je na kosini. Razloži silu težu $\vec{G}$ na dvije sile: silu $\vec{F}_1$ koja je paralelna s kosinom i silu $\vec{F}_2$ koja je okomita na kosinu.



RJEŠENJA

7. **b)**.

8. **c)** i **d)**.

9. **a)** $\langle -5, 2\rangle$ **b)** $\left\langle \frac{3}{2}, 4\right\rangle$ **c)** $\left[\frac{2}{3}, \infty\right\rangle$ **d)** $[4, \infty\rangle$ **e)** $\langle 6, \infty\rangle$ **f)** $\left[\frac{3}{4}, 5\right]$.

10. **a)** $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, \infty\rangle$ **b)** $\langle -\infty, -2] \cup [-1, \infty\rangle$ **c)** $\langle 1, 3\rangle$ **d)** $[1, 3]$ **e)** $\langle -\infty, -4] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right\rangle$
f) $\langle -\infty, 3] \cup [4, \infty\rangle$.

11. **a)** $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$ **b)** $\langle -\infty, -1\rangle \cup [1, \infty\rangle$ **c)** $\langle -2, 2]$ **d)** $\langle -2, 2\rangle$ **e)** $\langle 3, 4\rangle$
f) $\langle -\infty, -2] \cup \langle 5, \infty\rangle$ **g)** $\langle -\infty, -3] \cup \langle 7, \infty\rangle$ **h)** $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{1}{5}\right\rangle$.

12. **a)** $\langle -\infty, -1\rangle$ **b)** $\langle -\infty, -2\rangle$ **c)** $\langle -\infty, 3\rangle \cup [8, \infty\rangle$ **d)** $\langle -\infty, -4\rangle \cup \left[-\frac{7}{5}, \infty\right\rangle$ **e)** $\left[\frac{4}{3}, 3\right\rangle$
f) $\left\langle -\frac{5}{2}, -1\right\rangle$ **g)** $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$ **h)** $\langle -\infty, -3\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, \infty\right\rangle$ **i)** $\left\langle -\frac{5}{2}, \frac{3}{10}\right\rangle$.

13. **a)** $\langle 1, \infty\rangle$ **b)** $\{0\} \cup [1, \infty\rangle$ **c)** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ **d)** $\mathbb{R}$ **e)** nema rješenja **f)** 1 **g)** $\langle 3, \infty\rangle$
h) $\langle -\infty, 2\rangle \setminus \{-4\}$.

14. Broj x uvećan za svoju sedminu je $x + \frac{x}{7} = \frac{8x}{7}$. Dakle, $\frac{8x}{7} > 180$ i $\frac{8x}{7} < 200$. Rješenje prve nejednadžbe je $x > \frac{315}{2}$, a druge $x < 175$. Konačno rješenje su brojevi iz intervala $\left\langle \frac{315}{2}, 175\right\rangle$.

15. Ako je x broj članova zbora, a t broj tenora, uvjeti zadatka su $0.3x < t < 0.4x$, tj. $3x < 10t < 4x$. Tražimo prirodne brojeve x i t za koje to vrijedi i najmanji x je 3. Zbor ima najmanje 3 člana.

16. **a)** $(-5, -2) \cup (-2, \infty)$ **b)** $[5, \infty) \cup \{-2\}$ **c)** $(-\infty, -5) \cup \{-2\}$.

17. Mjesečni račun je $1.8 + 0.67x$ gdje je x broj kubičnih metara plina. Imamo $120 \leqslant 1.8 + 0.67x$ i $200 \geq 1.8 + 0.67x$. Rješenje prve nejednadžbe je $x \geq 176.41$, a druge $x \leqslant 295.82$. Troši između 176.41 i 295.82 m^3 plina.

18. $1.25x > 12$, $x > 9.6$; $0.9x < 10$, $x < 11.11$. Ulovljeno je više od 9.6 t, a manje od 11.11 t.

Rješenja 3.6.

1. **a)** $2|5| - |-7| = 2 \cdot 5 - 7 = 10 - 7 = 3$ **b)** 0 **c)** 0.

2. **a)** 1 **b)** 1 **c)** $1 - |1 - \sqrt{2}| = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. **a)** 8 **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ **d)** $|1 - 2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2} - 1$.

4. **a)** $x + |x| = \begin{cases} 2x, & \text{za } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{za } x < 0 \end{cases}$ **b)** $|x| - x = \begin{cases} 0, & \text{za } x \geqslant 0 \\ -2x, & \text{za } x < 0 \end{cases}$ **c)** $x \cdot |x| = \begin{cases} x^2, & \text{za } x \geqslant 0 \\ -x^2, & \text{za } x < 0 \end{cases}$

d) $2|x| - x = \begin{cases} x, & \text{za } x \geqslant 0 \\ -3x, & \text{za } x < 0 \end{cases}$ **e)** $-|x| - x = \begin{cases} -2x, & \text{za } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{za } x < 0 \end{cases}$ **f)** $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{za } x \geqslant 1 \\ -x + 1, & \text{za } x < 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{za } x \geqslant -4 \\ -x - 4, & \text{za } x < -4 \end{cases}$ **h)** $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{za } x \geqslant \frac{1}{2} \\ -2x + 1, & \text{za } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$ **i)** $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{za } x \geqslant 2 \\ -2x + 5, & \text{za } x < 2 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} -2x - 5, & \text{za } x \geqslant -3 \\ 2x + 7, & \text{za } x < -3 \end{cases}$ **k)** $f(x) = \begin{cases} 18 - x, & \text{za } x \leqslant 3 \\ -12 + 9x, & \text{za } x > 0. \end{cases}$ **l)** $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geqslant 0 \\ -3x + 1, & x < 0 \end{cases}$

5. **a)** 10 **b)** 1 **c)** 2.2 **d)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **e)** $\sqrt{2}$ **f)** $\frac{3}{2}\sqrt{5} - 1$.

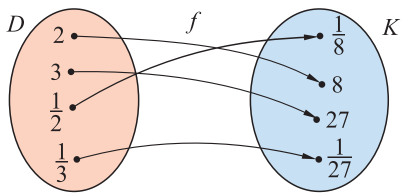
6. **a)** $2, -2$ **b)** 3, 1 **c)** $\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ **d)** 4, 6 **e)** $0, 2\sqrt{2}$ **f)** 2.

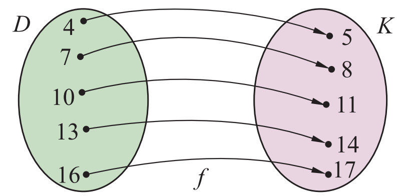
7. **a)** $\langle -1, 5\rangle$ **b)** $\langle -3, -1\rangle$ **c)** $[3, 7]$ **d)** $[0, 2]$ **e)** $\langle 2.5, 3.5\rangle$ **f)** $[\sqrt{2} - 3, \sqrt{2} + 3]$ **g)** $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 5, \infty\rangle$ **h)** $x \in \langle -\infty, -3] \cup [-1, \infty\rangle$ **i)** $x \in \langle -\infty, 3] \cup [5, \infty\rangle$ **j)** $x \in \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$

4. Linearna funkcija

Rješenja 4.1.

1. **a)** $D=\left\{2,3,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$, $K=\left\{8,27,\frac{1}{8},\frac{1}{27}\right\}$ **b)** $D=\{4,7,10,13,16\}$, $K=\{5,8,11,14,17\}$





2. **a)** , **c)** .

3. **a)** $f(x)=\frac{1}{2}x$ **b)** $f(x)=5x+2$ **c)** $f(a)=a^2$.

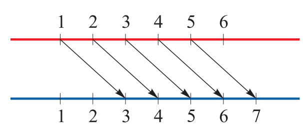
4. **a)** $h(x)=x^2$ **b)** $h(y)=\frac{1}{y}$.

5. **a)** $f(x)=3x$ **b)** $f(x)=10$ **c)** $f(x)=2x$ **d)** $f(x)=x^2$.

6. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** 0 **c)** $-\frac{3}{5}$ **d)** $-\frac{1}{3}$.

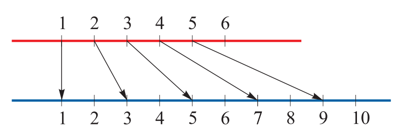
7. **a)**

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	4	5	6	7



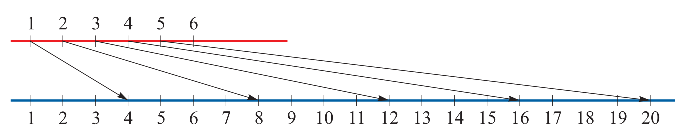
b)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	5	7	9



c)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	8	12	16	20



8.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	6	16	25	36

9. **a)** -2 **b)** 4 **c)** -3 **d)** $-\frac{3}{4}$.

10.

x	8	-10	$\frac{3}{2}$	-4.5	$-2,\ \frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$0,\ \frac{1}{2}$	$-8,\ \frac{9}{2}$
$g(x)$	15	10	2	4.5	2	-4	0	8

11. **c)** .

Rješenja 4.2.

1. **a)** Da **b)** ne **c)** da **d)** da **e)** ne **f)** da.

2. **a)**

x	2	-3	$\frac{1}{2}$	0
$f(x)$	12	-13	$\frac{9}{2}$	2

b)

x	0	1	2	4
$f(x)$	-1	-0.5	0	1

3. **a)** $f(x) = 3x$ **b)** $f(x) = -x$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2}x$ **d)** $f(x) = x - 3$.

5. **a)** $7 = a \cdot 1 + 5$, $a = 2$ **b)** $a = 1$ **c)** $a = \frac{1}{2}$ **d)** $a = -8$.

6. **a)** $8 = 2 \cdot 3 + b$, $b = 8 - 6$, $b = 2$ **b)** $b = 4$ **c)** $b = 11$ **d)** $b = \frac{1}{2}$.

7. **a)** $y = 0.029x + 6$ **b)** potrošeno je 320 impulsa.

8. **a)** $5 \cdot 1.3 + 0.08 = 6.58$ € **b)** $f(x) = 1.3x + 0.08$.

9. **a)** $f(x) = 1.2x + 7.8$ **b)** $f(12) = 22.20$ €.

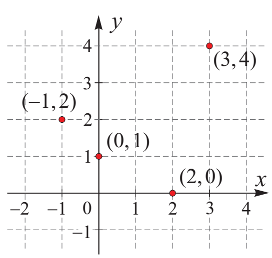
10. **a)** $9 \cdot 3 + 20 = 47$ € **b)** $f(x) = 3x + 20$.

11. **a)** $25 \cdot 0.35 + 22 = 30.75$ € **b)** $f(x) = 0.35x + 22$.

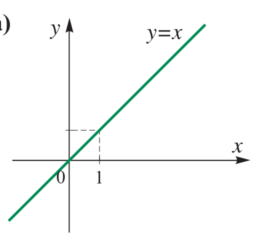
12. Ako je ovisnost linearna, koristit ćemo uobičajene oznake a i b za njezine koeficijente.
a) s linearno ovisi o t, koeficijenti su: $a = v$, $b = 0$. **b)** Nije linearna funkcija. **c)** U istoj vrsti tekućine, p je linearna funkcija s varijablom h. $a = \rho g$, $b = 0$. **d)** Nije linearna. **e)** $a = \alpha V_0$, $b = V_0$ **f)** $a = \alpha R_0$, $b = R_0$.

Rješenja 4.3.

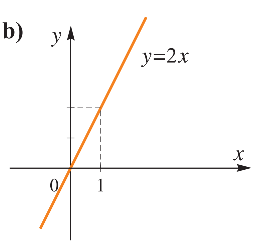
1.



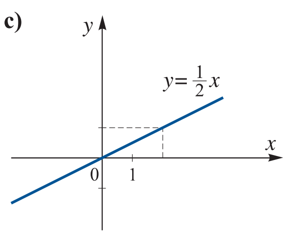
2. **a)**



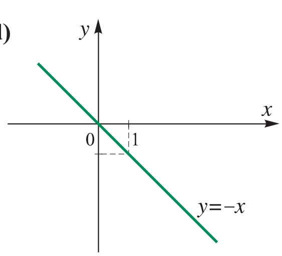
b)



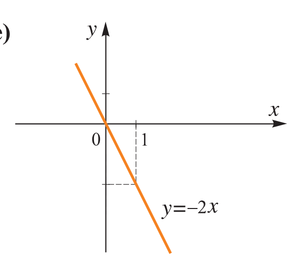
c)



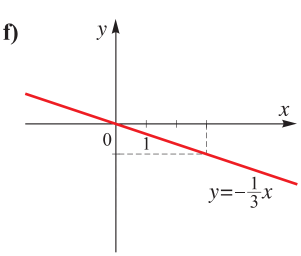
d)



e)



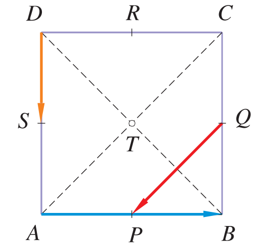
f)



7. Vektori

Rješenja 7.1.

1. **a)** $\overrightarrow{QS}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{TQ}$, $\overrightarrow{TS}$, $\overrightarrow{QT}$, $\overrightarrow{DR}$, $\overrightarrow{RC}$, $\overrightarrow{RD}$, $\overrightarrow{CR}$. **b)** $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{TQ}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DR}$, $\overrightarrow{RC}$, $\overrightarrow{DC}$. **c)** $\overrightarrow{QS}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{RP}$.



2. **a)** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{SQ}$ **b)** $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{TA} = \overrightarrow{RS}$

c) $\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QB}$.

3. **a)** $\overrightarrow{DT} = \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{SP}$ **b)** $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$

c) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{QS}$.

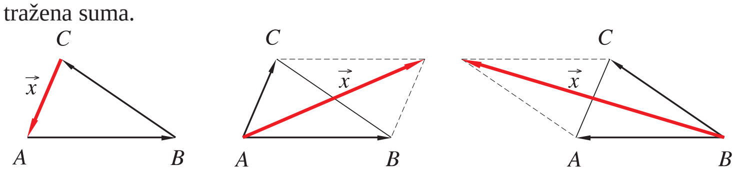
4. **a)** $-\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{TS} = \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{RD}$

b) $-\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{TA} = \overrightarrow{QP}$ **c)** $-\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{TR} = \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SD}$.

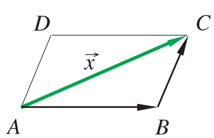
5. **a)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{SF}$, $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{CF}$ **b)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{ED}$ **c)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{SF}$, $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{DE}$ **d)** $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$ **e)** $-\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{ES} = \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC}$.

Rješenja 7.2.

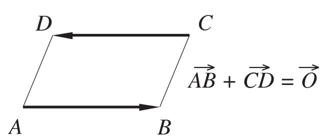
1. S $\vec{x}$ je označena tražena suma.



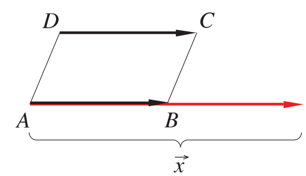
2. **a)**



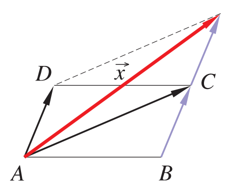
b)



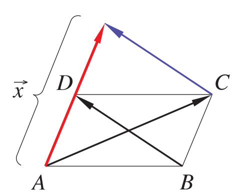
c)



d)

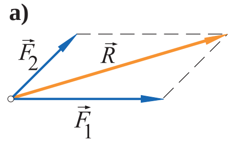


e)

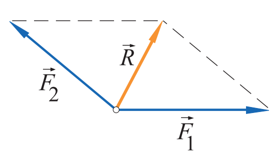


3. S $\vec{R}$ je označena rezultanta.

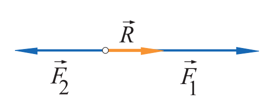
a)



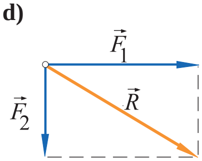
b)



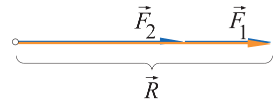
c)



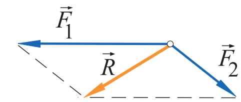
d)



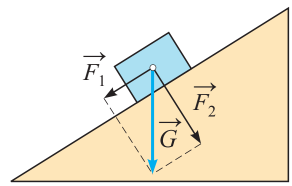
e)



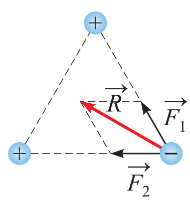
f)

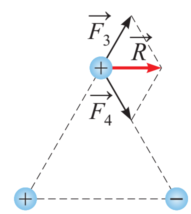


4.

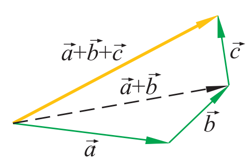


5. **a)** F_1 i F_2 imaju jednake veličine. **b)** Sile F_3 i F_4 su jednakih iznosa.



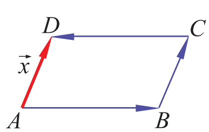


6. Zbroj je vektor kojem je početak početak prvog vektora, a završetak je završna točka posljednjeg vektora $\vec{c}$.

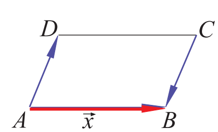


7. Zbroj je označen s $\vec{x}$.

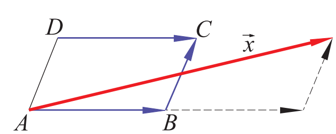
a)



b)



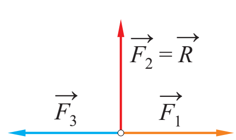
c)



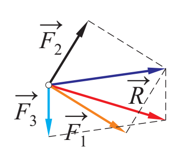
$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$ pa je $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + (-\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB}$.

8. U svakoj točki vrtnje vrijedi $\vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_{cf}$. Ova sila ima najveću vrijednost u najnižoj točki i iznosi $F_{max} = mg + \frac{mv^2}{r} = 5.562$ N, a najmanju vrijednost ima u najvišoj točki i tamo vrijedi $F_{min} = 1.638$ N i ima smjer prema gore.

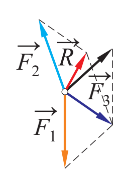
9. **a)**



b)

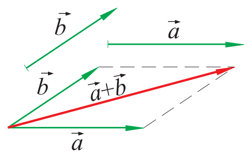


c)

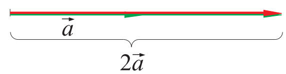


Rješenja 7.3.

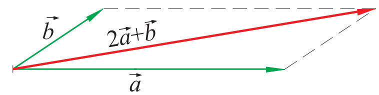
1. **a)**



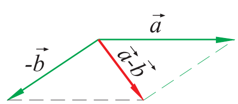
b)



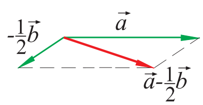
c)



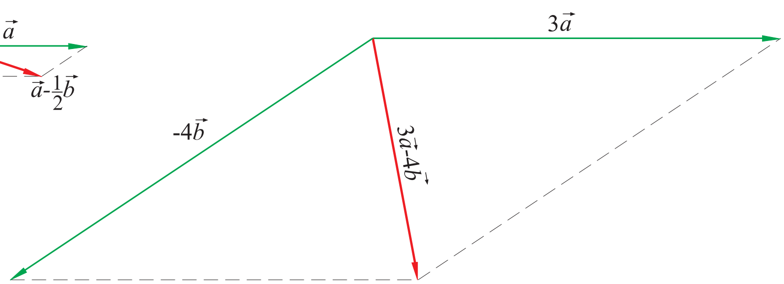
d)



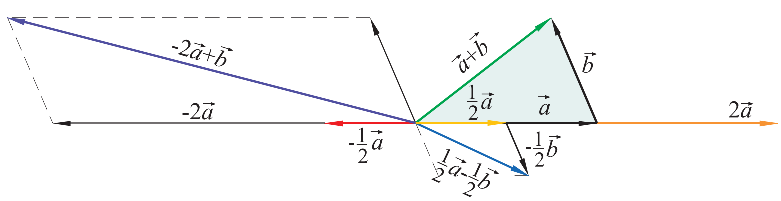
e)



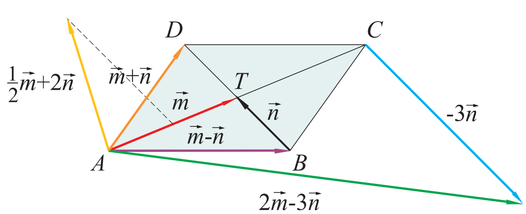
f)



2.



3.



4. **a)** $3\vec{a}+5\vec{b}$ **b)** $\frac{10}{3}\vec{m}+\frac{8}{3}\vec{n}$ **c)** $\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}$.

5. **a)** 45 **b)** $\frac{15}{2}$ **c)** $15\sqrt{2}$ **d)** 55.

6. **a)** $2\vec{m}-\vec{n}$ **b)** $-2\vec{m}+\vec{n}$ **c)** $\vec{n}$ **d)** $2\vec{m}$ **e)** $\vec{m}-\vec{n}$ **f)** $-2\vec{m}+2\vec{n}$ **g)** $\vec{m}$ **h)** $-\vec{m}+\vec{n}$.

7. **a)** $2\vec{c}$ **b)** $4\vec{c}-2\vec{d}$ **c)** $-2\vec{d}$ **d)** $2\vec{c}-\vec{d}$ **e)** $-2\vec{c}+\vec{d}$ **f)** $3\vec{c}-2\vec{d}$.

8. **a)** $\alpha=\frac{2}{11}$, $\beta=\frac{1}{11}$ **b)** $\alpha=-\frac{1}{11}$, $\beta=\frac{5}{11}$ **c)** $\alpha=-\frac{8}{11}$, $\beta=\frac{7}{11}$.