

LOGARITAMSKA FUNKCIJA I JEDNADŽBA

2.1. Logaritmi

Zadatak 1. Riješite jednađbu.

a) $2^x = 2$ b) $2^x = 4$ c) $2^x = 3$ d) $2^x = 5$ e) $2^x = 23$

Zadatak 2. Riješite jednađbu.

a) $3^x = 7$ b) $14^x = 16$ c) $7^x = 49$ d) $178^x = 37.6$ e) $83^x = 1$
f) $5^x = \frac{1}{25}$ g) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$ h) $9^x = 0$ i) $4^x = -2$ j) $5^x = -125$
k) $10^x = 43$ l) $10^x = 1000$ m) $e^x = 12$ n) $e^x = 0.5$ o) $e^x = -3$

Zadatak 3. Riješite jednađbu.

a) $2^{x+3} = 9$ b) $5^{2x+1} = 6$ c) $7^{3-x} = 0.2$ d) $7^{|x-2|} = 14$
e) $3^{x+2} + 3^{x+1} = 16$ f) $125^x \cdot \sqrt[3]{25^{x+3}} = 10$ g) $2^{x+3} = 3^x$ h) $5^{3x+2} = 6^{x+1}$

Zadatak 4. Riješite jednađbu.

a) $25^x - 3 \cdot 5^x - 4 = 0$ b) $2 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^x + 15 = 0$ c) $2 \cdot 49^x - 7^{x+1} + 6 = 0$

Zadatak 5. Napišite neku eksponencijalnu jednadžbu čije je rješenje zadano.

- a) $\log_3 8$ b) $\log_5 11$ c) $\log_2 \frac{1}{3}$ d) $\log 37$ e) $\ln 10$

Zadatak 6. Popunite tablicu.

	$2^3 = 8$	$4^3 = 64$	$\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$				
baza	$2 = \sqrt[3]{8}$			$3 = \sqrt[4]{81}$		$6 = \sqrt[3]{216}$	
eksponent	$3 = \log_2 8$				$5 = \log_2 32$		$2 = \log_5 25$

Zadatak 7. Bez uporabe džepnoga računala odredite vrijednost logaritma.

- a) $\log_3 9$ b) $\log_2 32$ c) $\log_5 125$ d) $\log_7 \frac{1}{7}$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 8$
g) $\log_8 8$ h) $\log_{11} \sqrt{11}$ i) $\log 100$ j) $\log 10^{18}$ k) $\ln e^2$ l) $\ln e^{-5}$

Zadatak 8. Odredite vrijednost logaritma.

- a) $\log_2 2$ b) $\log_3 3$ c) $\log_{17} 17$ d) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7}$ e) $\log 10$ f) $\ln e$

Zadatak 9. Odredite vrijednost logaritma.

- a) $\log_2 1$ b) $\log_3 1$ c) $\log_{17} 1$ d) $\log_{\frac{1}{7}} 1$ e) $\log 1$ f) $\ln 1$

Zadatak 10. Odredite vrijednost logaritma.

- a) $\log_2 0$ b) $\log_3(-9)$ c) $\log_{17}(-17)$ d) $\log_{\frac{1}{7}} 0$ e) $\log(-0.1)$ f) $\ln(-e)$

Zadatak 11. Odredite vrijednost logaritma ako je $a > 0$ i $a \neq 1$.

- a) $\log_a a$ b) $\log_a 1$ c) $\log_a 0$ d) $\log_a(-1)$ e) $\log_a \frac{1}{a}$ f) $\ln_a(-a)$



2. Logaritamska funkcija i jednačba

Zadatak 12. Odredite vrijednost logaritma.

- a) $\log_2 2^3$ b) $\log_3 3^8$ c) $\log_{17} 17^{-3}$ d) $\log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{7}\right)^6$ e) $\log 10^{-23}$ f) $\ln e^{99}$
g) $\log_a a^4$ h) $\log_a a^5$ i) $\log_a a^{-3}$ j) $\log_a a^6$ k) $\log_a a^{-\frac{1}{2}}$ l) $\log_a a^n$

Zadatak 13. Dopunite prazna polja tako da produžene jednakosti budu točne.

- a) $\log_2 4 = \log_3 \square = \log \square 25 = \square$
b) $\log_2 8 = \log_5 \square = \log \square 64 = \square$
c) $\log_4 2 = \log_{64} \square = \log \square 9 = \square$
d) $\log_2 \frac{1}{2} = \log_5 \square = \log \square 3 = \square$

Zadatak 14. Bez uporabe džepnoga računala odredite vrijednost potencije.

- a) $2^{\log_2 4}$ b) $2^{\log_2 8}$ c) $2^{\log_2 32}$ d) $3^{\log_3 9}$ e) $5^{\log_5 125}$
f) $7^{\log_7 49}$ g) $2^{\log_2 7}$ h) $4^{\log_4 5}$ i) $5^{1+\log_5 3}$ j) $3^{2+\log_3 8}$
k) $6^{\log_6 7-1}$ l) $2^{3+\log_2 13}$ m) $(2^{\log_2 5})^3$ n) $2^{4\log_2 3}$ o) $5^{2\log_5 6}$
p) $9^{\log_3 11}$ q) $8^{\log_2 3}$ r) $25^{1+\log_5 4}$ s) $4^{2+\log_2 3}$ t) $9^{1+\log_3 2}$

Zadatak 15. Bez uporabe džepnoga računala odredite vrijednost brojevnoga izraza.

- a) $\frac{\log_2 32 + 7^{\log_7 3}}{\log_5 0.04}$ b) $\frac{64^{\log_4 2} + \log_4 1}{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} \cdot \log_{125} 5}$ c) $\frac{9^{1+\log_3 2} - \log 0.01}{\log_5 \sqrt{125} + \log_4 4^8}$

Zadatak 16. Pojednostavnite izraz ako je $a > 0$ i $a \neq 1$.

- a) $\frac{\log_a a^3 + a^{\log_a 7}}{(\log_a a^5)^2}$ b) $\frac{\log_a 1 \cdot \log_a a^4 + \log_{a^2} a^4}{a^{2\log_a 2}}$ c) $\frac{2\log_a \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a}^{\log_a 16}}{\log_{a^3} a^{81} + \log_{\sqrt{a}} a^4}$

Zadatak 17. Za svaku od navedenih tvrdnja odredite je li točna ili nije. Ako je netočna, ispravite ju.

- a) $\log_2 8 = 4$ b) $\log 1000 = 3$ c) $\log_5 2 = 25$ d) $\log_4 1 = 4$
 e) $\log_5 0 = 1$ f) $\log_2 0.5 = -\log_2 4$ g) $\log_{0.1} = \frac{1}{2}$ h) $\log_a \left(\frac{1}{a}\right)^x = -x$

Zadatak 18. Bez uporabe džepnoga računala poredajte logaritme po veličini. Kao pomoć možete koristiti brojevni pravac.

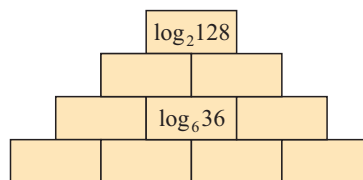
- a) $\log_2 5, \log_2 7, \log_2 4, \log_2 11$ b) $\log_{0.5} 4, \log_{0.5} 0.5, \log_{0.5} 7, \log_{0.5} 0.1$
 c) $\log_7 14, \log_2 14, \log_{11} 14, \log_{0.3} 14$ d) $\log_3 5, \log_2 9, \log_2 6, \log_5 3$
 e) $\log_{11} 13, \log_{15} 224, \log_9 95, \log_{16} 15$ f) $\log_{17} 300, \log_{56} 47, \log_{30} 63, \log_{20} 390$

Zadatak 19. Smjestite svaki od ponuđenih logaritama u odgovarajuće polje tako da vrijednost svakoga polja bude jednaka zbroju vrijednosti dvaju polja ispod njega.

Ponuđeni logaritmi:

$$\ln e^6, \log_5 5, \log_2 16, \log_7 \frac{1}{7},$$

$$\log_8 8, \log_4 1, \log_{\frac{1}{6}} 6, \log_3 27$$



2.2. Svojstva logaritama

Zadatak 1. Izračunajte pa uočite i obrazložite pravilnost. Osmislite f) podzadatak.

- a) $\log_2 32$ b) $\log_2 4 + \log_2 8$ c) $\log_2 2 + \log_2 16$
 d) $\log_2 1 + \log_2 32$ e) $\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 64$ f)

Zadatak 2. Izračunajte pa uočite i obrazložite pravilnost. Osmislite f) podzadatak.

- a) $\log_2 4$ b) $\log_2 8 - \log_2 2$ c) $\log_2 16 - \log_2 4$
 d) $\log_2 32 - \log_2 8$ e) $\log_2 4 - \log_2 1$ f)



2. Logaritamska funkcija i jednačba

Zadatak 3. Izračunajte pa uočite i obrazložite pravilnost.

- | | | | |
|------------------|------------------|-------------------------|------------------|
| a) $\log_2 2^4$ | b) $4 \log_2 2$ | c) $\log_5 5^{17}$ | d) $17 \log_5 5$ |
| e) $\log_3 27^5$ | f) $5 \log_3 27$ | g) $\log_3 81$ | h) $4 \log_3 3$ |
| i) $\log_5 125$ | j) $3 \log_5 5$ | k) $\log_3 \frac{1}{9}$ | l) $-\log_3 9$ |

Zadatak 4. Bez uporabe džepnoga računala odredite približnu vrijednost logaritma ako je poznato $\log_2 3 \approx 1.6$.

- | | | | | | |
|---------------|----------------|---------------|-------------------------|----------------|--------------------------|
| a) $\log_2 9$ | b) $\log_2 81$ | c) $\log_2 6$ | d) $\log_2 \frac{2}{3}$ | e) $\log_2 36$ | f) $\log_2 \frac{8}{27}$ |
|---------------|----------------|---------------|-------------------------|----------------|--------------------------|

Zadatak 5. Izračunajte bez uporabe džepnoga računala.

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $\log 2 + \log 5$ | b) $2 \log_{20} 2 + \log_{20} 5$ |
| c) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$ | d) $\log_3 324 - 2 \log_3 2$ |

Zadatak 6. Za svaku jednakost odredite je li točna ili netočna.

- | | | |
|---|-----------------------------------|--|
| a) $\frac{\log_3 8}{\log_3 2} = \log_3 4$ | b) $\log 2 \cdot \log 3 = \log 6$ | c) $\log_2(4 + 8) = \log_2 4 \cdot \log_2 8$ |
|---|-----------------------------------|--|

Zadatak 7. Zapišite izraz kao jedan logaritam.

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| a) $\log(2x) + \log 7$ | b) $\log_3(x + 2) - \log_3(x - 1)$ | c) $\log(x + 7) + 2 \log x$ |
| d) $4 \log a - 5 \log b$ | e) $1 + \log_2 7$ | f) $\log_6(3x) - 2$ |
| g) $3 + 2 \log m - 4 \log n$ | h) $\log_2 x - 3 \log_2 y - 4$ | i) $2 \ln 5 - 3 \ln 4 + 3 \ln 2$ |
| j) $6 \log_2 x + 3 \log_2 y^4 - 5$ | k) $-7 \log a - 3 \log b$ | l) $-4 - 6 \ln x$ |

Zadatak 8. Zadani izraz zapišite s pomoću logaritama od x , y i z .

a) $\log x^4 y^3$	b) $\log \frac{x^5 y^3}{z^2}$	c) $\log \frac{\sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{z^2}}{x^3}$	d) $\log(xyz)^2$
e) $\log \frac{x}{yz^2}$	f) $\log \left(\frac{x}{y}\right)^3$	g) $\log(xy^2)^{\frac{1}{3}}$	h) $\log(x\sqrt{z})^5$
i) $\log \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{yz^3}}$	j) $\log \sqrt[3]{\frac{x^3 y^2}{z^4}}$	k) $\log x \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{z^{-3}}}$	l) $\log \sqrt{\frac{x^{-3} y^2}{\sqrt{z^7}}}$

Zadatak 9. Izrazite varijablu x .

a) $\log x = \log a^4 + 3 \log b$	b) $\log x = 1 - \log a - 2 \log c$
c) $\log x = -\log(a+b) + \log(a^2 - b^2)$	d) $\log x = \log a - \frac{1}{3}(\log b + \log c)$
e) $\log x = 2 - 3 \log a + 2 \log(a+b)$	f) $\log x = \frac{2}{3} \log(a+b) - \frac{3}{4} \log(a-b)$

Zadatak 10. Za svaku jednakost odredite je li točna za sve realne brojeve a i b za koje su izrazi definirani.

a) $\log \left(\frac{a}{b^2}\right) = \log a - 2 \log b$	b) $\log(a-b) = \log a - \log b$
c) $\log a^b = a \cdot \log b$	d) $(\log a)(\log b) = \log(a+b)$
e) $\frac{\log a}{\log b} = \log(a-b)$	f) $(\ln a)^b = b \cdot \ln a$

Zadatak 11. Ako je $\log 2 = x$, $\log 3 = y$ i $\log 7 = z$, izrazite zadane logaritme s pomoću x , y , z i cijelih brojeva.

a) $\log \frac{2}{3}$	b) $\log 21$	c) $\log 12$	d) $\log 70$
e) $\log \frac{14}{3}$	f) $\log 0.3$	g) $\log 1.5$	h) $\log 10.5$
i) $\log 200$	j) $\log 15$	k) $\log \frac{6000}{7}$	l) $\log 420$
m) $\log 50$	n) $\log 350$	o) $\log 105$	p) $\log 4.2$



2. Logaritamska funkcija i jednačba

Zadatak 12. Ako je $\log 2 = a$, zadani logaritam izrazite s pomoću a i cijelih brojeva.

- a) $\log 800$ b) $\log 5$ c) $\log 320$ d) $\log 25$ e) $\log^3 2$ f) $\log^2 4$

Zadatak 13. Rješenje jednačbe $3^x = 5$ zapišite koristeći isključivo dekadске logaritme.

Zadatak 14. Rješenje jednačbe $7^x = 4$ zapišite koristeći isključivo logaritme s bazom 2.

Zadatak 15. Zapišite koristeći logaritme s bazom 3 i pojednostavnite.

- a) $\log_2 11$ b) $\log_5 3$ c) $\log_9 7$ d) $\log_{27} 15$ e) $\log_{81} 6$ f) $\log_{\sqrt{3}} 17$

Zadatak 16. Zapišite u obliku jednoga logaritma s bazom 2.

- a) $\log_4 9$ b) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5$ c) $\log_8 2$ d) $\log_{32} 7$ e) $\log_{2^n} 6$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 2$

Zadatak 17. Izračunajte bez uporabe džepnoga računala.

- a) $5^{2\log_5 3 + \log_{\sqrt{5}} 2}$ b) $9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2}$ c) $\frac{\log_8 27 - 2\log_8 3}{\log_8 45 + \log_8 0.2}$ d) $\frac{\log_5 8}{\log_5 2} + \frac{\log_6 49}{\log_6 7}$

Zadatak 18. Skratite razlomak za sve realne brojeve x i y za koje su izrazi definirani.

- a) $\frac{\log^3 x}{\log x^4}$ b) $\frac{4 - \log^2 x}{\log(100x)}$ c) $\frac{\log(x^3 y^2) - \log(x^2 y^3)}{\log x^2 - \log y^2}$ d) $\frac{\log_x 27 + 3}{\log_x(27x) - 2\log_x 3}$

Zadatak 19. Pojednostavnite ako je $a > 0$ i $a \neq 1$.

- a) $\log_2 a^3 + \log_4 a$ b) $\log_{\sqrt{5}} a^2 - \log_{\frac{1}{5}} a$ c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{a^2} \cdot \log_a 16$
d) $\log_a \sqrt{27} \cdot \log_{\frac{1}{9}} a^3$ e) $\log_a \sqrt{3} \cdot \log_9 \frac{a^4}{a^6}$ f) $\log_{\sqrt[3]{a}} 64 \cdot \log_{0.5} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}$
g) $\frac{\log_5 a^3 + \log_{25} a^4}{\log_{\sqrt{5}} a - \log_{0.2} a^2}$ h) $\frac{\log_4 a^3 - \log_8 (a\sqrt{a})}{\log_{16} \sqrt[3]{a^8} + \log_{0.5} a^2}$ i) $\frac{\log_9 a^{11} - \log_{27} (a^3 \sqrt{a})}{\log_3 \sqrt[4]{a^7} + \log_{81} a^6}$