



# KVADRATNA FUNKCIJA

**Nakon ovog poglavlja moći ćeš:**

- grafički prikazati kvadratnu funkciju i obrnuto, odrediti funkciju iz grafa
- odrediti nul-točke, sjecište s ordinatom, tjeme parabole, os simetrije parabole
- odrediti tijek funkcije
- objasniti oblik grafa funkcije u ovisnosti o diskriminanti i vodećem koeficijentu
- riješiti kvadratnu nejednadžbu
- primijeniti kvadratnu funkciju u rješavanju problema.

## 2.1. Kvadratna funkcija

### ISTRAŽI

Kad loptu bacimo uvis brzinom  $v$ , tada zbog djelovanja gravitacijske sile formula za dostignutu visinu glasi

$$s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + vt$$

gdje je  $t$  broj sekundi,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . S pomoću programa dinamičke geometrije nacrtaj graf funkcije  $s$  za brzinu  $v = 10 \text{ m/s}$ . Kako se mijenja graf kad se mijenja  $v$ ?



Sve funkcije koje se definiraju na skupu realnih brojeva  $\mathbb{R}$  čije vrijednosti pripadaju skupu  $\mathbb{R}$  zovemo **realnim funkcijama realne varijable** i pišemo:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Linearnu funkciju u općem zapisu  $f(x) = ax + b$  već smo proučili. Graf ove funkcije je pravac opisan jednačbom  $y = ax + b$ . Sad ćemo proučavati funkciju koja, osim linearnog i slobodnog člana, ima i kvadratni član, a zove se kvadratna funkcija.



### Kvadratna funkcija

**Kvadratna funkcija** je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  za koju vrijedi:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdje su koeficijenti  $a, b, c$  realni brojevi i  $a \neq 0$ .

$$f(x) = \textcircled{a}x^2 + \textcircled{b}x + \textcircled{c} = 0$$

vodeći koeficijent      linearni koeficijent      slobodni koeficijent

### PRIMJER 1.

a) Izračunajmo vrijednost funkcije  $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$  za  $x = 4$ .

b) Odredimo slobodni koeficijent funkcije  $f(x) = -x^2 + 5x + c$  ako je  $f(2) = 7$ .

a) Uvrstimo 4 umjesto varijable  $x$ :

$$f(4) = 2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 7 = 2 \cdot 16 - 16 + 7 = 23.$$

b) Za  $x = 2$  dobivamo:

$$f(2) = -2^2 + 5 \cdot 2 + c = 6 + c.$$

Izjednačimo dobivenu vrijednost sa 7:  $6 + c = 7$ , te je  $c = 1$ .

Graf kvadratne funkcije je skup  $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$  i naziva se **parabola**. Oblik parabole susrećemo često u svijetu oko sebe. Trkaći automobili, podmornice, zrakoplovi imaju prednje dijelove paraboloidne jer je tada otpor zraka (vode) najmanji. Jata ptica u letu i voda u vodoskoku prate oblik parabole. Putanja kosog hica u fizici je u obliku parabole, a to su samo neki od primjera. U ovom poglavlju naučit ćemo kako crtati grafove kvadratnih funkcija.



Stari most u Sisku



Neptunova fontana u Arboretumu Trsteno

## ZADATCI 2.1.

- Koja je od sljedećih funkcija kvadratna?  
**a)**  $f(x) = x^3 - x^2$     **b)**  $f(x) = -x^2 + 2$     **c)**  $f(x) = 5 - 4x + x^2$     **d)**  $f(x) = 2x - 3$ .
- Očitaj koeficijente  $a$ ,  $b$  i  $c$  zadanim funkcijama:  
**a)**  $f(x) = x^2 - 2x + 1$     **b)**  $f(x) = 2x^2 - 3$     **c)**  $f(x) = -x^2 + 3x$     **d)**  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ .
- Izračunaj vrijednosti funkcija  $f(x) = x^2 - 3$  i  $g(x) = -x^2 + 1$  za:  
**a)**  $x = 1$     **b)**  $x = 3$     **c)**  $x = -2$     **d)**  $x = 0$ .
- Odredi nepoznati koeficijent funkcije  $f$  ako je:  
**a)**  $f(x) = x^2 + bx - 1$ ,  $f(1) = -3$     **b)**  $f(x) = 2x^2 + 4x + c$ ,  $f(2) = 21$   
**c)**  $f(x) = ax^2 + 2x - 3$ ,  $f(1) = 7$     **d)**  $f(x) = -2x^2 + bx - 5$ ,  $f(-1) = 10$ .

## 2.2. Graf funkcije $f(x) = ax^2$

**Graf funkcije**  $f(x) = x^2$  dobit ćemo s pomoću izabranih točaka s koordinatama  $(x, f(x))$ , gdje je  $x$  neovisna varijabla, a  $f(x)$  odgovarajuća vrijednost funkcije (ovisna varijabla). Spojimo li izabrane točke, dobit ćemo graf funkcije  $f(x) = x^2$ , koji će biti utoliko točniji ukoliko je broj izabranih točaka veći. Dobivene točke spojimo blago zaobljenom krivuljom. To je **parabola** s jednadžbom  $y = x^2$ .

### PRIMJER 1.

Nacrtajmo graf funkcije  $f(x) = x^2$ .

Izaberimo pet brojeva kao  $x$ -eve, odredimo vrijednosti funkcije za te  $x$ -eve i smjestimo ih u tablicu:

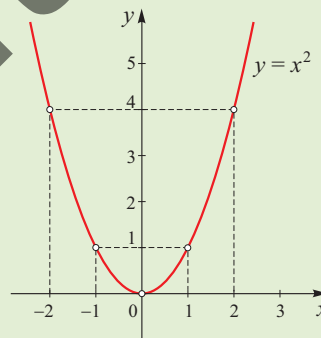
$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^2$	4	1	0	1	4

Zatim ucrtajmo koordinate dobivenih točaka u koordinatni sustav i nacrtajmo graf funkcije.

Uočimo da je graf ove funkcije simetričan u odnosu na ordinatu koordinatnog sustava. Za takve funkcije u matematici kažemo da su parne i vrijedi:

$$f(x) = f(-x).$$

Pravac  $x = 0$  naziva se **os parabole**. Uočimo da za  $x = 0$  funkcija poprima najmanju vrijednost koja iznosi 0. Točku  $(0, 0)$  zovemo **tjeme** ili vrh parabole. Za  $x < 0$  funkcija pada, dok za  $x > 0$  funkcija raste.



### PRIMJER 2.

Pripadaju li točke  $A(3, 8)$ ,  $B(-2, 4)$  i  $C(-5, -25)$  paraboli  $y = x^2$ ?

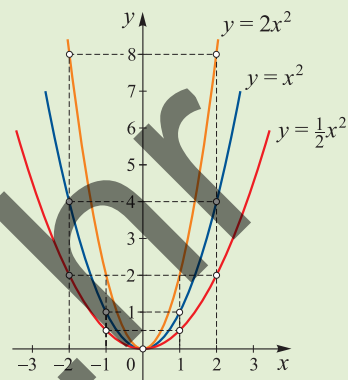
Ako neka točka pripada paraboli  $y = x^2$ , onda za njezinu drugu koordinatu  $y$  mora vrijediti baš ta jednakost. U točki  $A$  je apscisa  $x = 3$  pa imamo  $y = 3^2 = 9$ . Budući da je druga koordinata točke  $A$  jednaka 8, a ne 9, zaključujemo da točka  $A$  ne pripada paraboli. U točki  $B$  je  $x = -2$  te je  $y = (-2)^2 = 4$  i to je upravo druga koordinata za točku  $B$ , pa točka  $B$  pripada paraboli. I konačno, za točku  $C$  vrijedi  $x = -5$ ,  $y = (-5)^2 = 25 \neq -25$ , što znači da točka  $C$  ne pripada paraboli.

**PRIMJER 3.**

U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove funkcija  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = 2x^2$  i  $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

Tablica vrijednosti zadanih funkcija je sljedeća:

$x$	-2	-1	0	1	2
$f_1(x) = x^2$	4	1	0	1	4
$f_2(x) = 2x^2$	8	2	0	2	8
$f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



Uočimo da se povećanjem vodećeg koeficijenta  $a$  parabola sužava prema  $y$ -osi.

S obzirom na  $y$ -os grafovi su simetrični;  $x$ -os dodiruju u točki  $(0, 0)$  i u toj točki poprimaju najmanju vrijednost. Točka  $(0, 0)$  je tjeme danih parabola. Za graf ovakvog izgleda kažemo da ima otvor prema gore. Za  $x < 0$  funkcije  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  padaju, dok za  $x > 0$  funkcije rastu. Ove podatke o rastu i padu funkcije obično zapisujemo u ovakvoj tablici.

$x$	$-\infty$	0	$\infty$
$f_a(x)$	$\infty$	$\searrow$	$\nearrow$

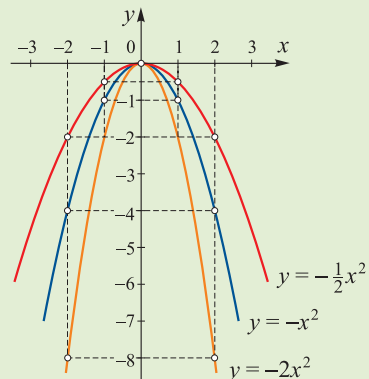
Pogledaj animaciju...  
ele-uzdubenik.hr

**PRIMJER 4.**

U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove funkcija  $f_1(x) = -x^2$ ,  $f_2(x) = -2x^2$  i  $f_3(x) = -\frac{1}{2}x^2$ .

Tablica vrijednosti zadanih funkcija sada je:

$x$	-2	-1	0	1	2
$f_1(x) = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4
$f_2(x) = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8
$f_3(x) = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2



U ovom su primjeru vodeći koeficijenti negativni, parabola je otvorena prema dolje. Smanjivanjem vodećeg koeficijenta parabola se sužava prema  $y$ -osi. Za  $x = 0$  funkcija poprima najveću vrijednost (maksimum).

Za  $x < 0$  funkcije  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  rastu, a za  $x > 0$  padaju. Pad i rast opisujemo tablicom:

$x$	$-\infty$	0	$\infty$
$f_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$

## 2. KVADRATNA FUNKCIJA

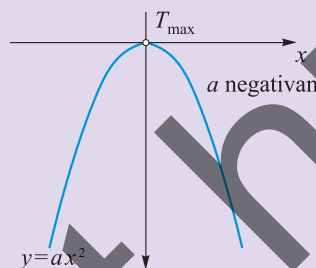
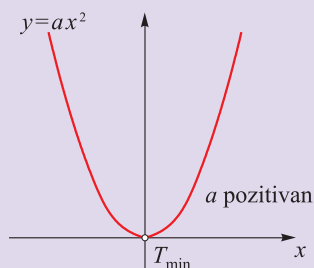
**Zaključak:** Smjer otvorenosti parabole potpuno je određen koeficijentom  $a$ . Naime, vrijedi:

$a > 0$  otvor parabole okrenut je prema gore

$a < 0$  otvor parabole okrenut je prema dolje.



### Smjer otvorenosti parabole



#### PRIMJER 5.

Odredimo nepoznate koordinate točaka  $A(-2, y)$  i  $B(x, \frac{9}{2})$  koje pripadaju grafu funkcije  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

Kod točke  $A$   $x = -2$  pa je  $f(-2) = \frac{1}{2}(-2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ . Stoga je  $y = 2$ . Za drugu koordinatu točke  $B$  vrijedi  $y = \frac{1}{2}x^2$ , tj.  $\frac{9}{2} = \frac{1}{2}x^2$ . Nakon sređivanja jednadžbe dobivamo  $x^2 = 9$ , tj.  $x_1 = 3$  i  $x_2 = -3$ .

#### PRIMJER 6.

Odredimo koeficijent  $a$  u funkciji  $f(x) = ax^2$ , tako da njezin graf prolazi točkom  $(-5, 50)$ .

Ako točka  $(-5, 50)$  pripada paraboli  $y = ax^2$ , tada je  $50 = a \cdot (-5)^2$ , tj.  $50 = a \cdot 25$ ,  $a = 2$ . Tražena funkcija je  $f(x) = 2x^2$ .

#### PRIMJER 7.

Svako tijelo pri gibanju ima kinetičku energiju  $E$  koja se računa prema formuli  $E = \frac{mv^2}{2}$ , gdje je  $m$  masa tijela, a  $v$  brzina tijela.

a) Izračunajmo kinetičku energiju automobila mase 1000 kg u dvije situacije: prvo pri brzini od 36 km/h, a drugi put pri brzini od 72 km/h.

b) Nacrtajmo graf funkcije  $E$  u ovisnosti o brzini  $v$ .



c) Kad automobil vozi 72 km/h, brzina mu je dvostruko veća nego kad vozi 36 km/h. Kakav je odnos kinetičkih energija? Kako se taj odnos reflektira na posljedice sudara?

a) Prvo pretvorimo mjerne jedinice iz km/h u m/s:

$$36 \text{ km/h} = 36 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$$

$$72 \text{ km/h} = 72 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$$

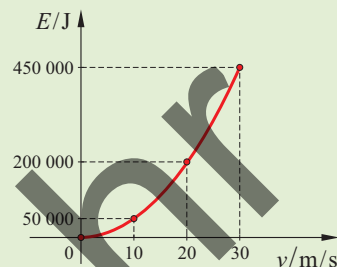
$$E(10) = \frac{mv^2}{2} = \frac{1000 \cdot 10^2}{2} = 50\,000 \text{ J}$$

$$E(20) = \frac{1000 \cdot 20^2}{2} = 200\,000 \text{ J}$$

c)  $E(20) = 4 \cdot E(10)$ .

Ako se brzina poveća dva puta, kinetička se energija poveća četiri puta. Da se brzina povećala 3 puta (tj. na 30 m/s = 108 km/h), kinetička energija bi se povećala čak 9 puta. To znači da se u slučaju sudara pri brzini od 72 km/h, odnosno 108 km/h oslobađa energija (koja direktno utječe na uništenje automobila i ozljede putnika) koja je četiri puta, odnosno devet puta veća od energije pri brzini od 36 km/h.

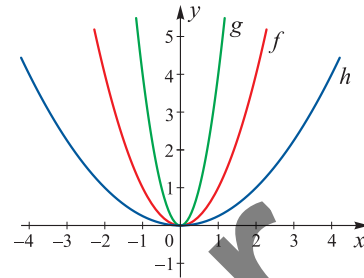
b)



## ZADATCI 2.2.

- U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove funkcija  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = 3x^2$ ,  $f_3(x) = \frac{1}{3}x^2$ .
- U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove funkcija  $f_1(x) = -x^2$ ,  $f_2(x) = -3x^2$ ,  $f_3(x) = -\frac{1}{3}x^2$ .
- Nacrtaj grafove funkcija:
  - $f(x) = \frac{2}{3}x^2$
  - $f(x) = \frac{1}{4}x^2$
  - $f(x) = \frac{3}{4}x^2$
  - $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$ .
- Nacrtaj grafove funkcija:
  - $f(x) = 4x^2$
  - $f(x) = 5x^2$
  - $f(x) = -4x^2$ .
 Odredi na kojem intervalu funkcija raste, a na kojem pada.
- Koje točke pripadaju grafu funkcije  $f(x) = x^2$ ?
  - $A(2, 5)$
  - $B(-3, 9)$
  - $C(-2, 4)$
  - $D(1, 2)$ .
- Pripadaju li točke  $A(1, 2)$ ,  $B(1, -2)$ ,  $C(0, 0)$ ,  $D(-2, 7)$ ,  $E(-3, -18)$  grafu funkcije  $f(x) = -2x^2$ ?
- Pripadaju li točke  $A(5, 7)$ ,  $B(-1, \frac{1}{3})$ ,  $C(1, \frac{1}{3})$ ,  $D(2, \frac{5}{3})$ ,  $E(-4, \frac{16}{3})$  paraboli  $y = \frac{1}{3}x^2$ ?
- Odredi nepoznate koordinate točaka  $A(-3, y)$  i  $B(x, 4)$  ako one pripadaju grafu funkcije:
  - $f(x) = x^2$
  - $f(x) = -x^2 + 3$
  - $f(x) = 2x^2$
  - $f(x) = x^2 - 1$ .

9. Odredi koeficijent  $a$  funkcije  $f(x) = ax^2$  ako njezin graf prolazi točkom  $(3, 27)$ .
10. Odredi koeficijent  $a$  funkcije  $f(x) = ax^2$  ako njezin graf prolazi točkom  $(-5, 100)$ .
11. Na slici su grafovi funkcija  $f$ ,  $g$ ,  $h$ . Odredi im formule ako su im vodeći koeficijenti  $4$ ,  $1$ ,  $\frac{1}{4}$ .
12. Pri jednoliko ubrzanom gibanju (uz akceleraciju  $a$ ) ovisnost prijeđenog puta  $s$  o vremenu  $t$  dana je formulom  $s = \frac{a}{2}t^2$ . Odredi akceleraciju tijela koje je za 4 sekunde prešlo 80 m i nacrtaj  $s-t$  dijagram tog gibanja.
13. Loptica pada sa zgrada visine 10 m, 15 m i 20 m. Pri slobodnom padu (uz gravitacijsku akceleraciju  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ) brzina tijela se računa po formuli  $v = \sqrt{2gs}$ , gdje je  $s$  visina. Izračunaj kinetičke energije  $E$  loptice mase 0.1 kg kad je prešla 10 metara, 15 metara i pri udaru o tlo te nacrtaj  $E-v$  dijagram.



### 2.3. Graf funkcije $f(x) = ax^2 + c$

Graf funkcije  $f(x) = ax^2 + c$  parabola je koja ima jednadžbu  $y = ax^2 + c$ , a može se nacrtati s pomoću grafa funkcije  $f(x) = ax^2$ .

#### PRIMJER 1.

U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove funkcija  $f_1(x) = x^2$  i  $f_2(x) = x^2 + 3$ .

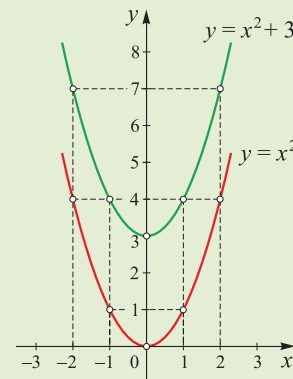
Tablica vrijednosti zadanih funkcija jest:

$x$	-2	-1	0	1	2
$f_1(x) = x^2$	4	1	0	1	4
$f_2(x) = x^2 + 3$	7	4	3	4	7

Vidimo da su obje parabole oblikom iste, s otvorom prema gore. Tjeme prve parabole je u točki  $(0, 0)$ , a druge parabole u točki  $(0, 3)$ . Graf funkcije  $f_2(x) = x^2 + 3$  dobiva se **pomicanjem (translacijom)** grafa funkcije  $f_1(x) = x^2$  duž ordinate za tri prema gore.

$x$	$-\infty$	0	$\infty$
$f_2(x)$	$\infty$	$\searrow$ 3 $\nearrow$	$\infty$

Pad i rast funkcije  $f_2$  opisani su u tablici lijevo.



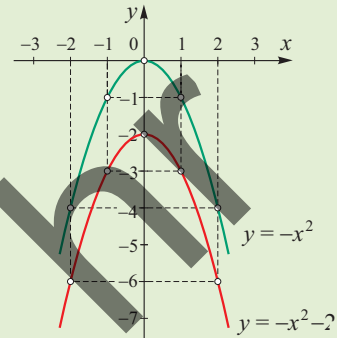
## PRIMJER 2.

U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove funkcija  $f_1(x) = -x^2$  i  $f_2(x) = -x^2 - 2$ .

Tablični prikaz funkcija je sljedeći:

$x$	-2	-1	0	1	2
$f_1(x) = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4
$f_2(x) = -x^2 - 2$	-6	-3	-2	-3	-6

Ponovo su obje parabole oblikom iste. Tjeme prve parabole je u točki  $(0, 0)$ , a druge u točki  $(0, -2)$ . Graf druge parabole može se dobiti i pomicanjem (translacijom) prve parabole za dva prema dolje duž ordinate.



**Zaključak:** Graf funkcije  $f(x) = ax^2 + c$  možemo dobiti s pomoću grafa funkcije  $f(x) = ax^2$  pomicanjem (translacijom) duž osi  $y$  za  $|c|$  prema gore ako je  $c > 0$ , odnosno prema dolje ako je  $c < 0$ . Također uočimo da je tjeme parabole uvijek u točki  $T(0, c)$ .

## ZADATCI 2.3.

- U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove funkcija:  $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$  i  $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ .
- U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove funkcija:  $f_1(x) = -2x^2$  i  $f_2(x) = -2x^2 + 2$ .
- U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove funkcija:  $f_1$  i  $f_2$ , te  $f_1, f_2$  i  $f_3$ .
  - $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2, f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$
  - $f_1(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3, f_2(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3$
  - $f_1(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2, f_2(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$
  - $f_1(x) = 2x^2, f_2(x) = 2x^2 - 2, f_3(x) = 2x^2 + 1$
  - $f_1(x) = -x^2, f_2(x) = -x^2 - 2, f_3(x) = -x^2 + 3$ .
- Nacrtaj graf funkcije, odredi koordinate tjemena:
  - $f(x) = x^2 + 3$
  - $f(x) = x^2 - 1$
  - $f(x) = x^2 + 4$
  - $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$
  - $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}$
  - $f(x) = x^2 - 2$ .
- Nacrtaj graf funkcije, odredi koordinate tjemena:
  - $f(x) = 2x^2 + 1$
  - $f(x) = -x^2 + 1$
  - $f(x) = -x^2 - 2$
  - $f(x) = 4x^2 - 3$
  - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$
  - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ .
- Pripadaju li točke  $A(0, 0), B(1, 7), C(0, 1), D(2, -4), E(-3, 5), F(-2, 25)$  grafu funkcije  $f(x) = 6x^2 + 1$ ?
- Odredi nepoznatu koordinatu zadanih točaka koje pripadaju grafu funkcije  $f(x) = -2x^2 + 5$ .
  - $A(0, y)$
  - $B(-4, y)$
  - $C(\frac{1}{2}, y)$
  - $D(x, 1)$
  - $E(x, -1)$
  - $F(x, -11)$ .

8. Odredi nepoznati koeficijent funkcije  $f(x) = ax^2 + c$  ako njezin graf prolazi zadanom točkom  $T$ :

a)  $f(x) = 2x^2 + c$ ,  $T(1, 5)$

b)  $f(x) = -5x^2 + c$ ,  $T(2, -121)$

c)  $f(x) = ax^2 + 10$ ,  $T(1, 9)$

d)  $f(x) = ax^2 - 4$ ,  $T(3, 14)$ .

9. Odredi koeficijente  $a$  i  $c$  funkcije  $f(x) = ax^2 + c$  ako njezin graf prolazi točkama  $A$  i  $B$ :

a)  $A(0, 1)$ ,  $B(2, 5)$

b)  $A(1, 3)$ ,  $B(2, 0)$

c)  $A(1, -4)$ ,  $B(-2, 5)$ .

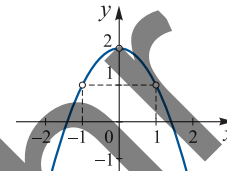
10. Koja je od zadanah funkcija prikazana na slici?

a)  $f(x) = x^2 - 2$

b)  $f(x) = x^2 + 2$

c)  $f(x) = -x^2 + 2$

d)  $f(x) = -x^2 - 2$



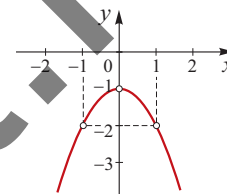
11. Prepoznaj koja je od zadanah funkcija prikazana grafički.

a)  $f(x) = 2x^2 + 1$

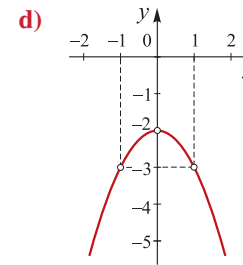
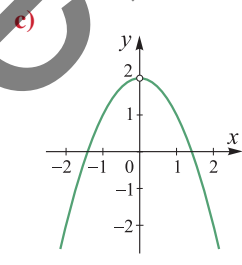
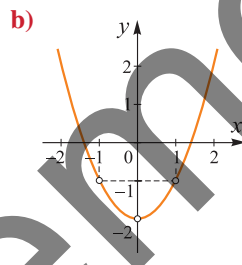
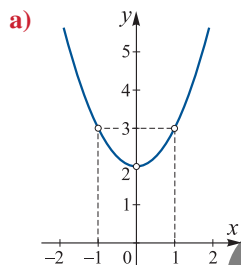
b)  $f(x) = x^2 - 1$

c)  $f(x) = -2x^2 + 1$

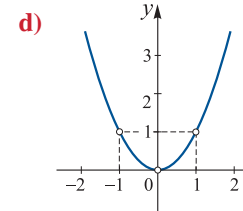
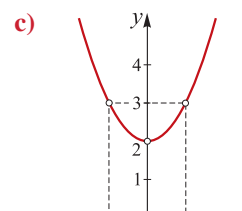
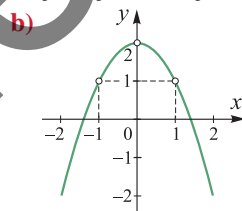
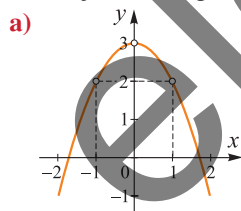
d)  $f(x) = -x^2 - 1$



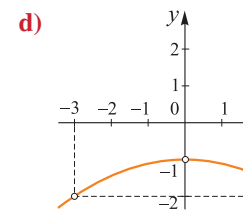
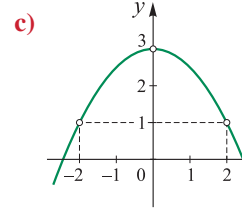
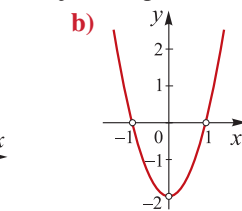
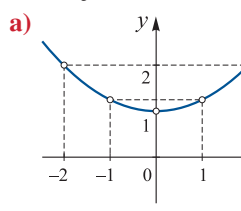
12. Na kojoj je slici prikazan graf funkcije  $f(x) = x^2 - 2$ ? Odredi koordinate tjemena na svim parabolama.



13. Odredi jednadžbe parabola kojima je koeficijent  $a = 1$  ili  $a = -1$ .



14. Odredi jednadžbe i koordinate tjemena parabola na slikama:



## 2.4. Graf funkcije $f(x) = a(x - x_0)^2$

Razmotrimo sada kako nastaje graf funkcije  $f(x) = a(x - x_0)^2$  s pomoću grafa funkcije  $f(x) = ax^2$ , odnosno kako vrijednost  $x_0$  utječe na pomak grafa funkcije u koordinatnom sustavu.

### PRIMJER 1.

U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove funkcija  $f_1(x) = x^2$  i  $f_2(x) = (x - 2)^2$ .

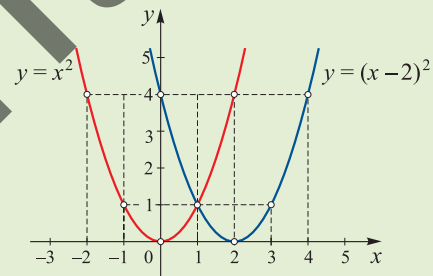
Tablični prikaz funkcija sada je sljedeći:

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_1(x) = x^2$	4	1	0	1	4	9	16
$f_2(x) = (x - 2)^2$	16	9	4	1	0	1	4

I ovaj put su parabole oblikom potpuno jednake. Graf funkcije  $f_2(x)$  možemo dobiti pomicanjem grafa funkcije  $f_1(x)$  duž osi  $x$  za 2 udesno. Parabola  $y = (x - 2)^2$  simetrična je s obzirom na pravac  $x = 2$  i ima tjeme u točki  $T(2, 0)$ .

Pad i rast funkcije  $f_2(x)$  prikazimo tablično:

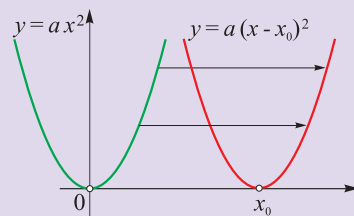
$x$	$-\infty$	2	$\infty$
$f_2(x)$	$\infty$	0	$\infty$



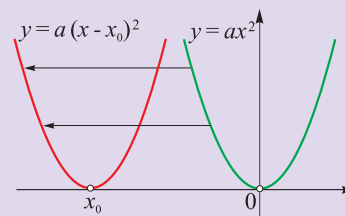
**Zaključak:** Graf funkcije  $f(x) = a(x - x_0)^2$  možemo nacrtati s pomoću grafa funkcije  $f(x) = ax^2$  **pomicanjem duž osi  $x$**  za  $x_0$ . Ako je  $x_0 > 0$ , graf pomičemo desno za  $x_0$ , dok ako je  $x_0 < 0$ , graf pomičemo lijevo za  $|x_0|$ . Tjeme dobivene parabole je u točki  $T(x_0, 0)$ , a graf je simetričan s obzirom na pravac  $x = x_0$ , tj. os parabole je pravac  $x = x_0$ .



### Pomak (translacija) duž $x$ -osi



$x_0$  pozitivan



$x_0$  negativan

**PRIMJER 2.**

Točke  $(1, 27)$  i  $(2, 12)$  pripadaju grafu funkcije  $f(x) = a(x - x_0)^2$ . Odredimo brojeve  $a$  i  $x_0$ .

Uvrstimo zadane podatke u gornju funkciju:

$$27 = a(1 - x_0)^2,$$

$$12 = a(2 - x_0)^2.$$

Iz prve jednadžbe izrazimo  $a$ :

$$a = \frac{27}{(1 - x_0)^2}$$

i uvrstimo u drugu jednadžbu

$$12 = \frac{27}{(1 - x_0)^2}(2 - x_0)^2, \quad \text{tj.} \quad 12(1 - x_0)^2 = 27(2 - x_0)^2$$

Podijelimo jednadžbu brojem 3, kvadrirajmo binome i svedimo na opći oblik kvadratne jednadžbe:

$$4(1 - 2x_0 + x_0^2) = 9(4 - 4x_0 + x_0^2),$$

$$4 - 8x_0 + 4x_0^2 = 36 - 36x_0 + 9x_0^2,$$

$$5x_0^2 - 28x_0 + 32 = 0.$$

Rješenja te kvadratne jednadžbe su  $x_{01} = 4$  i  $x_{02} = \frac{8}{5}$ . Za te vrijednosti brojeva  $x_0$  izračunajmo koeficijente  $a$ :

$$a_1 = \frac{27}{(1 - 4)^2} = \frac{27}{9} = 3, \quad a_2 = \frac{27}{\left(1 - \frac{8}{5}\right)^2} = 75.$$

Tražene funkcije su  $f_1(x) = 3(x - 4)^2$  i  $f_2(x) = 75\left(x - \frac{8}{5}\right)^2$ .

**ZADATCI 2.4.**

1. Pripadaju li točke  $A(0, -32)$ ,  $B(1, 18)$ ,  $C(-1, 10)$ ,  $D(5, 2)$ ,  $E(2, 8)$  grafu funkcije  $f(x) = 2(x - 4)^2$ ?
2. Odredi koeficijent  $a$  tako da točka  $T(1, 18)$  pripada grafu funkcije  $f(x) = a(x + 2)^2$ .
3. Odredi koeficijent  $m$  tako da točka  $T(5, -2)$  pripada grafu funkcije  $f(x) = -2(x + m)^2$ .
4. Točke  $A(1, 8)$  i  $B(4, 2)$  pripadaju grafu funkcije  $f(x) = a(x - x_0)^2$ . Izračunaj  $a$  i  $x_0$ .
5. Točke  $A(1, 0)$  i  $B(3, -12)$  pripadaju grafu funkcije  $f(x) = a(x - x_0)^2$ . Izračunaj  $a$  i  $x_0$ .
6. Odredi kvadratnu funkciju oblika  $f(x) = a(x - x_0)^2$  ako je:
  - a)  $f(0) = 9, f(1) = 4$
  - b)  $f(0) = -8, f(2) = -32$
  - c)  $f(1) = 0, f(2) = 3$ .

7. Nacrtaj graf funkcije:

a)  $f(x) = (x - 1)^2$

b)  $f(x) = (x + 2)^2$

c)  $f(x) = (x - 3)^2$

d)  $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

e)  $f(x) = (1 + x)^2$

f)  $f(x) = (5 - x)^2$ .

8. Nacrtaj graf funkcije:

a)  $f(x) = 2(x + 1)^2$

b)  $f(x) = 3(x - 2)^2$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2$

d)  $f(x) = -(x - 3)^2$

e)  $f(x) = -2(x + 1)^2$

f)  $f(x) = -\frac{2}{3}(x + 2)^2$ .

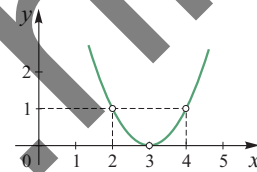
9. Na slici je graf jedne od zadanih funkcija. Koje?

a)  $f(x) = -(x - 3)^2$

b)  $f(x) = (x - 3)^2$

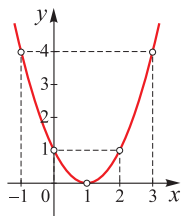
c)  $f(x) = (x + 3)^2$

d)  $f(x) = -(x + 3)^2$ .

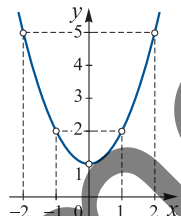


10. Koji je od zadanih grafova graf funkcije  $f(x) = (x + 1)^2$ ?

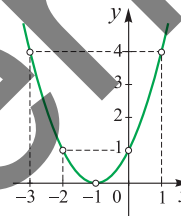
a)



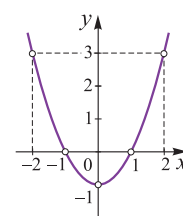
b)



c)

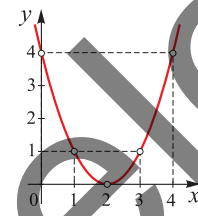


d)

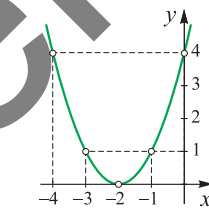


11. Napiši jednađbe i koordinate tjemena zadanih parabola.

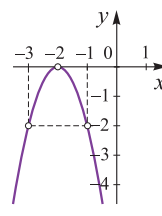
a)



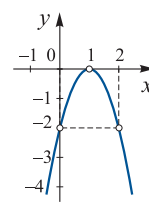
b)



c)

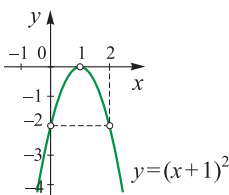


d)

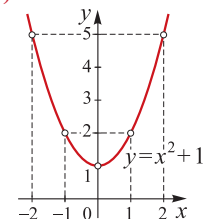


12. Pronađi grešku u grafovima ako postoji. Graf koji nije ispravno nacrtan, nacrtaj ispravno.

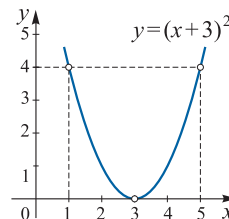
a)



b)



c)



d)

