



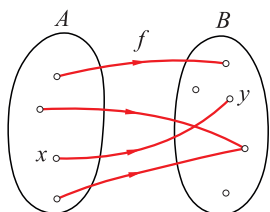
Pripremi se za gradivo koje slijedi, riješi pripremne zadatke koji se nalaze u digitalnoj inačici.

**Funkcije** (preslikavanja, pridruživanja), uz brojeve, predstavljaju temeljni pojam matematike.

U dosadašnjem školovanju susreli smo se s funkcijama. Poznajemo, među ostalima, svojstva linearnih funkcija i kvadratnih funkcija. U ovom poglavlju naučit ćemo razlikovati funkcije prema njihovim svojstvima, promatrat ćemo uzastopno djelovanje više funkcija te djelovanje **inverznih** funkcija i detaljnije izučiti **realne** funkcije.

## 3.1. Zadavanje funkcije. Područje definicije

### Pojam funkcije



Na slici je shematski prikaz funkcije. Svakom elementu skupa  $A$  odgovara točno jedan element skupa  $B$ .

Ideja pridruživanja temelj je matematičke definicije funkcije. Primjeri pridruživanja svuda su oko nas:

- Svaki dan u tjednu ima svoje ime.
- Svaka osoba ima određeni broj godina.
- Svaki proizvod u trgovini ima svoju cijenu.
- Svaki kućni broj jednoznačno određuje kuću u ulici.
- Svaki krug ima neki opseg.
- Svaki broj ima svoj kvadrat.



Slika ne predstavlja funkciju jer jednom elementu skupa  $A$  odgovara nekoliko elemenata skupa  $B$ .

### Funkcija

Ako je svakom elementu  $x$  nekog skupa  $A$  pridružen točno jedan element  $y$  skupa  $B$ , tad kažemo da je definirana **funkcija (preslikavanje)**  $f$  iz skupa  $A$  u skup  $B$ . Pišemo  $f : A \rightarrow B$  i  $y = f(x)$ . Element  $x$  naziva se još **argument** funkcije  $f$ , a  $y$  **vrijednost** te funkcije.

Da je elementu  $x$  pridružen  $y$ , zapisujemo još i simbolom:  $x \mapsto y$  (čita se:  $x$  se preslikava u  $y$ ).

Skup  $A$  zovemo **domenom** ili **područjem definicije** funkcije  $f$  i označavamo najčešće sa  $\mathcal{D}$  ili  $\mathcal{D}_f$ , a skup  $B$  zovemo **kodomenom** ili **područjem vrijednosti** funkcije  $f$  i označavamo najčešće sa  $\mathcal{R}$  ili  $\mathcal{R}_f$ .

Funkciju možemo zadati na razne načine:

- opisno, navodeći pravilo pridruživanja
- tablicom, navodeći vrijednosti ulaznih podataka (argumenata) i funkcijskih vrijednosti
- grafički, prikazujući ovisnost varijabli  $x$  i  $y$
- analitički, navodeći vezu među varijablama  $x$  i  $y$ .

### Zadavanje funkcije

Funkcija  $f$  zadana je:

1. svojom domenom (područjem definicije)  $\mathcal{D}$
2. svojom kodomenom (područjem vrijednosti)  $\mathcal{R}$
3. zakonom pridruživanja  $x \mapsto f(x)$ .

#### Primjer 1.

Izmjerali smo najvišu temperaturu u Celzijevim stupnjevima za nekoliko prvih dana u mjesecu i rezultate zapisali u sljedećoj tablici

Dan	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura	15	13	12	12	11	10	12	11	10	8

Ako  $d$  označava dan u mjesecu, a  $t$  temperaturu zabilježenu u tom danu, onda je ovom tablicom definirana funkcija  $t = f(d)$ .

Što je domena te funkcije? Što je njezina kodomena? Kakav ćemo odgovor dati ako temperaturu želimo mjeriti čitav mjesec?

- ◆ Domena ovako zadane funkcije je skup

$$\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Područje vrijednosti svakako uključuje zabilježene vrijednosti

$$\{8, 10, 11, 12, 13, 15\}$$

ali je po naravi ove veze ispravnije reći da je područje vrijednosti skup cijelih brojeva. Naime, rezultat mjerenja zaokružujemo na cijeli stupanj, a ta temperatura može biti i negativna.

Mjerimo li temperaturu cijeli mjesec, domena će biti skup koji odgovara broju dana u mjesecu. Ovdje vidimo da za kodomenu moramo uzeti veći skup jer će već sutra mjerenje možda zabilježiti neku novu temperaturu.

Na ovom primjeru vidimo da zahtjevi za određivanje domene i kodomene nisu jednako strogi. Funkcija mora biti definirana za *svaki* element domene, ali ne mora poprimiti sve vrijednosti u kodomeni.

Iako domena i kodomena funkcije mogu biti skupovi vrlo različitih osobina, mi ćemo u nastavku uglavnom promatrati funkcije za koje je domena i kodomena podskup skupa realnih brojeva. Takve funkcije zovemo **realnim funkcijama**.

**Primjer 2.**

Neka je  $A = [1, 2]$  i  $B = [3, 6]$ . Preslikavanje koje elementu  $x \in A$  pridružuje element  $y = 3x \in B$  funkcija je definirana zakonom pridruživanja:

$$f(x) = 3x,$$

za koju je  $\mathcal{D} = A$ ,  $\mathcal{R} = B$ .

Veza među varijablama  $x$  i  $y$  može biti dana nekom jednadžbom.

**Primjer 3.**

Koja od sljedećih jednadžbi definira  $y$  kao funkciju argumenta  $x$ ?

- 1)  $2x + 3y - 6 = 0$
- 2)  $3x^2 - 2xy + y + 1 = 0$
- 3)  $-x^2 + y^2 = 5$ .

◆ 1) Možemo napisati  $3y = -2x + 6$  pa je

$$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Kažemo da smo početnu jednadžbu "riješili po varijabli  $y$ ". Vidimo da jednoj vrijednosti za  $x$  odgovara točno jedna vrijednost od  $y$  pa je ovom vezom opisana funkcija  $y = f(x)$ . Vrijedi primjerice  $f(6) = -\frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = -2$ .

2) Sad veza glasi (provjeri)

$$y = \frac{3x^2 + 1}{2x - 1}$$

pa jednadžba definira  $y$  kao funkciju od  $x$ .

3) U ovom slučaju imamo  $y^2 = 5 + x^2$  pa je

$$y = \pm\sqrt{5 + x^2}.$$

Jednoj vrijednosti za  $x$  odgovara i pozitivna i negativna vrijednost od  $y$ . Primjerice, za  $x = 2$  dobivamo  $y = 3$  ili  $y = -3$ . Oba para  $(2, 3)$  i  $(2, -3)$  zadovoljavaju početnu jednadžbu. Zato ta jednadžba ne definira funkciju jer nije ispunjen uvjet jednoznačnosti.

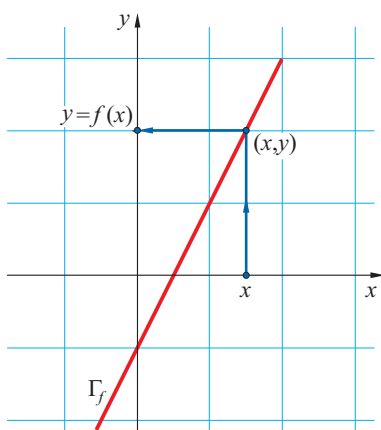


Kad god je to moguće, funkcije ćemo prikazivati crtajući njihov graf  $\Gamma_f$  u Kartezijevu sustavu.

### Graf funkcije

Graf  $\Gamma_f$  funkcije  $f$  skup je svih točaka  $(x, f(x))$  za sve  $x$  iz domene  $\mathcal{D}$  funkcije  $f$ :

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in \mathcal{D}, y = f(x)\}.$$



Graf funkcije  $f(x) = 2x - 1$  je pravac  $y = 2x - 1$ . Svakoј vrijednosti  $x$  iz područja definicije (koje se nalazi na osi apscisa) odgovara točno jedna vrijednost  $y = f(x)$  iz područja vrijednosti (koje je podskup osi ordinata). Točke s koordinatama  $(x, y)$  određuju graf funkcije.

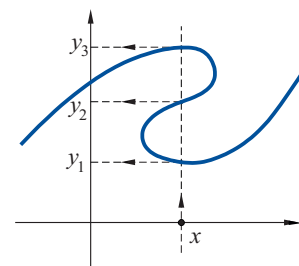
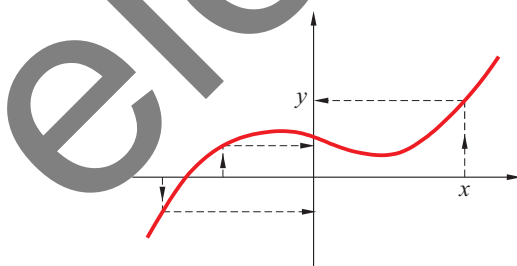
Graf funkcija koje ćemo promatrati<sup>1</sup> opisan je krivuljom (ili dijelovima različitih krivulja) u ravnini. Prirodno je postaviti obratna pitanja:

- Kada neka krivulja predstavlja graf neke funkcije?
- Kako se određuju njezina domena i kodomena, a kako zakon pridruživanja?

Prema definiciji funkcije svakom elementu  $x$  domene  $\mathcal{D}$  mora biti pridružen točno jedan element  $y$  iz kodomene  $\mathcal{R}$ . To znači sljedeće: vertikalni pravac (paralelan s osi ordinata) smije sjeći graf funkcije najviše u jednoј točki. Apscisa presjeka tog pravca s osi apscisa predstavlja vrijednost varijable  $x$ , a odgovarajuću vrijednost od  $y$  dobivamo iz presjeka pravca sa zadanom krivuljom.

### Vertikalni test

Vertikalni pravac smije sjeći graf funkcije najviše u jednoј točki.



Krivulja lijevo određuje  $y$  kao funkciju varijable  $x$ . Krivulja desno ne predstavlja graf funkcije. Jednoј vrijednosti varijable  $x$  odgovara više vrijednosti varijable  $y$ .



<sup>1</sup> Postoje neelementarne funkcije čiji graf može biti bitno složeniji.

Funkciju možemo zadati različitim formulama na različitim intervalima.

#### Primjer 4.

Funkcija

$$s(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \leq t \leq 3, \\ 9, & 3 < t < 4, \\ 2t + 1, & 4 \leq t \leq 6, \end{cases}$$

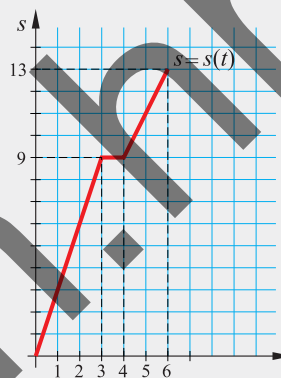
opisuje prijeđeni put u kilometrima osobe koja je prva tri sata hodala brzinom od 3 km/h, zatim se sat vremena odmarala, a nakon toga dva sata hodala brzinom od 2 km/h.

Graf ove funkcije dan je na slici desno.

Na intervalu  $[0, 3]$  jednadžba pravca je  $s(t) = 3t$ . U točki  $t = 3$  vrijedi  $s(3) = 9$  i funkcija je konstantna na intervalu  $[3, 4]$ . Na dijelu  $4 \leq t \leq 6$  formula  $s(t) = 2t + 1$  definira pravac kojemu je koeficijent smjera 2, a vrijednost u točki 4 iznosi

$$s(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

pa on prolazi točkom  $(4, 9)$ .



#### Primjer 5.

Neto plaća umanjena za priznate porezne odbitke čini **poreznu osnovicu** ostatak dohotka plaća se porez (vidi Kutak plus na 100. na koju se plaća porez. Visina poreza ovisi o mjestu stanovanja. U Hrvatskoj, najviša je za grad Zagreb. Neka je  $d$  ostatak dohotka u kunama. Porez za grad Zagreb iznosi

- 1) Osnovni porez je 23 %.
- 2) Ako je  $d > 5000$ , plaća se dodatno 33 % na razliku  $d - 5000$ .

Napiši formulu za porez  $P$  u ovisnosti o visini porezne osnovice  $d$ . Nacrtaj graf te funkcije.

◆ Funkcija je definirana za  $d > 0$ . Ako je  $d \leq 5000$

$$P(d) = d \cdot 0.23.$$

Vrijednost ove funkcije u graničnom dohotku u ovog je razreda

$$P(5000) = 1150.$$

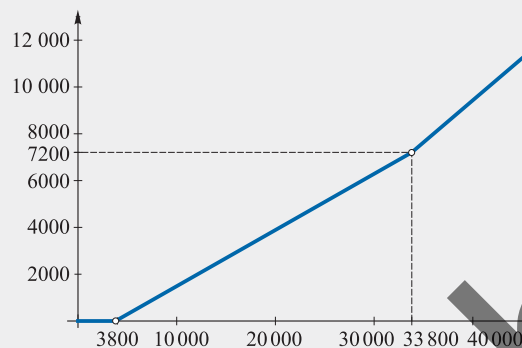
Na području  $5000 < d$  ovom se iznosu dodaje novi, po stopi od 33 %, na iznos preko početnog:

$$P(d) = 1150 + (d - 5000) \cdot 0.33 = 0.33d - 500.$$

Dakle

$$P(d) = \begin{cases} 0.23d, & 0 < d \leq 5000, \\ 0.33d - 500, & 5000 < d. \end{cases}$$

Na slici je nacrtan graf ove funkcije. Detaljniji opis poreza na plaće u Hrvatskoj možeš pronaći u Kutku plus.



Zakon pridruživanja često nije zadan eksplicitnom formulom.

**Primjer 6.**

Odredi  $f(x)$  ako je  $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ .

- ◆ Stavimo li  $t = \frac{x}{x+1}$ , zadani se izraz može napisati u obliku  $f(t) = x^2$ . Da bismo odredili zakon pridruživanja funkcije  $f$ , potrebno je izraziti  $x$  kao funkciju varijable  $t$ .

$$t = \frac{x}{x+1} \iff tx + t = x \iff x = -\frac{t}{t-1}.$$

Sad dobivamo

$$f(t) = x^2 = \left(-\frac{t}{t-1}\right)^2 = \frac{t^2}{(t-1)^2}.$$

Time je zakon pridruživanja određen, a ime varijable možemo označiti po volji:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

Ovim računom nije određena domena funkcije  $f$ . Taj ćemo problem rješavati kasnije.

**Zadatak 1.**

Ako je  $f(x-1) = x^2 + x - 3$ , koliko je  $f(x+1)$ ?



**Zadatak 2.**

Ako je  $f(x-1) = \frac{x+1}{2x-3}$ , koliko je  $f(x+1)$ ?



## IZRAČUN PLAĆE U HRVATSKOJ

Kako se računa neto plaća u Hrvatskoj? Izmjenama zakonskih propisa od 2024. godine vrijede sljedeća pravila (ponešto skraćena u odnosu na punu zakonsku normu).

Plaća se obračunava u bruto iznosu  $B$ . Na taj je iznos poslodavac dužan uplatiti doprinos od 16.5 % za zdravstveno osiguranje. Taj se doprinos obračunava *na plaću radnika* i čini ukupan trošak poslodavca.

Porezi i doprinosi *iz plaće radnika* su kako slijedi.

Doprinos za mirovinsko osiguranje iznosi 20 %. Bruto plaća umanjena za taj iznos naziva se dohodak.

Od dohotka se oduzimaju priznati troškovi, a na ostatak se plaćaju porezi. Veličina poreza prepuštena je jedinicama lokalne samouprave.

Priznati troškovi su:

Osnovni osobni odbitak u iznosu od 600 €.

Odbitak za djecu i uzdržavane članove obitelji. On se određuje tako da se osnovica od 600.00 € množi s faktorom za svakog pojedinog člana. Za uzdržavane članove faktor je 0.5. Faktori za djecu rastu prema broju djece, što je podrška pronatalitetnoj politici.

Broj djece	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Koeficijent	0.5	0.7	1	1.4	1.9	2.5	3.2	4.0	4.9

Ovaj odbitak može koristiti samo jedan član obitelji ako postoji više zaposlenih članova. Na primjer, u šesteročlanoj obitelji u kojoj rade otac i majka, imaju troje djece i uzdržavaju baku ili djeda, otac ili majka imaju pravo na odbitak od  $600(0.5 + 0.5 + 0.7 + 1) = 1\,620$  €.

Ovome se dodaje koeficijent za djelomičnu invalidnost od 0.3, odnosno za 100 % invalidnost od 1.0, ako je prisutna.

Nakon odbitka od dohotka ovih priznatih troškova ostatak novca naziva se osnovica. Ako je osnovica pozitivna, na nju se plaća porez. Iznos poreza određuju jedinice lokalne samouprave. On iznosi od 15% do 23% za osnovicu do 5000 €, te od 22% do 33% za osnovicu veću od 5000 €.

Dohodak umanjen za ovaj porez predstavlja *neto plaću* zaposlenika.

Poreza na dohodak oslobođeni su svi zaposlenici mlađi od 25. god. Oni mlađi od 30 plaćaju 50% utvrđenog iznosa. Povratnici u Hrvatsku oslobođeni su poreza u razdoblju od pet godina.

Na kraju godine radi se godišnja rekapitulacija svih primitaka i priznatih odbitaka (i plaćenih akontacija poreza) i utvrđuje dodatni iznos koji treba platiti poreznoj upravi ili pak iznos povrata preplaćenog poreza.

U Excel tablici sastavi protokol za određivanje plaće radnika prema ovim pravilima u sljedeće tri situacije:

1. Zadana je neto plaća. Koliki je bruto, a koliki ukupni trošak poslodavca?
2. Zadan je ukupni trošak poslodavca. Kolika će biti neto, a kolika bruto plaća?
3. Zadana je bruto plaća. Koliki će biti ukupni trošak poslodavca, a kolika neto plaća?

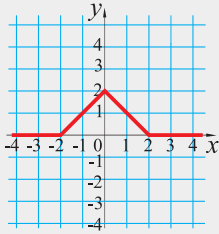
Predvidi sve mogućnosti osobnih odbitaka i poreza u svojoj općini/ gradu.

Rezultate svog izračuna usporedi s rezultatima GeoGebra programčića u digitalnom dijelu udžbenika.

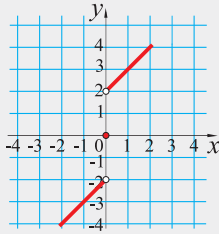
## Zadatci 3.1.

1. Zapiši formulom svaku od funkcija prikazanih njezinim grafom:

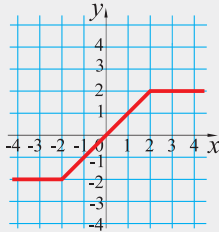
1)



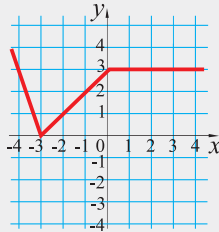
2)



3)



4)



2. Negativnim realnim brojevima pridružujemo broj  $-1$ , pozitivnim broj  $1$ , a nuli pridružujemo nulu. Opisano pridruživanje prikaži grafički. Radi li se o funkciji? Obrazloži svoj odgovor.

3. Funkcija kojom se svakom realnom broju  $x$  pridružuje isti broj  $c$  zove se **konstanta**. Prikaži grafički funkciju  $f(x) = 1.5$ .

4. Funkcija  $f$  definirana je za svaki realan broj  $x$  na ovaj način:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \text{ racionalan,} \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan.} \end{cases}$$

Odredi:

- 1)  $f(-0.5)$     2)  $f(\sqrt{3})$     3)  $f(101)$   
 4)  $f(3.14)$     5)  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$     6)  $f(-1.21)$ .

5. Prirodnom broju  $n$  pridružujemo njegovu polovinu ako je paran, a dvostruko veći broj ako je neparan. Je li ovako definirano pridruživanje funkcija? Obrazloži.

6. Pozitivnom realnom broju  $x$  pridružujemo drugi korijen iz  $x$  zaokružen na dvije decimale. Je li ovo pridruživanje funkcija? Obrazloži.

7. Svakom realnom broju  $x$  pridružujemo isti realni broj  $c$ . Je li ovo pridruživanje funkcija?

8. Vrlo važna matematička funkcija označena s  $\pi(n)$  ima za vrijednost  $n$ -ti prosti broj. Na primjer  $\pi(1) = 2$ ,  $\pi(2) = 3$ ,  $\pi(5) = 11$ . Koliko iznosi  $\pi(100)$ ?

9. Neka je  $d$  funkcija koja prirodnom broju  $n$  pridružuje  $n$ -tu decimalnu znamenku broja  $\pi$ . Na primjer  $d(1) = 1$ ,  $d(2) = 4, \dots$ . Potraži na internetu vrijednost  $d(100)$  i  $d(1000)$ .

10. Kojima je od sljedećih jednačbi definirana funkcija čija je domena skup realnih brojeva:

1)  $xy = x + y$

2)  $|y| = x$

3)  $(x+1)(y+1) = 2$

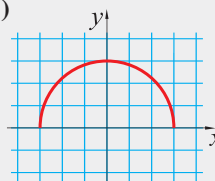
4)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

5)  $y^2 = \frac{1}{2}(x-4)$

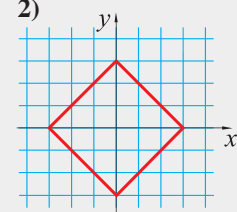
6)  $y = 0$ ?

11. Koji od danih grafova predstavlja graf neke funkcije? Obrazloži odgovor pozivajući se na definiciju funkcije.

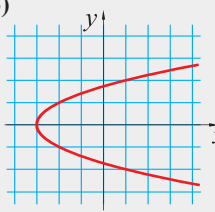
1)



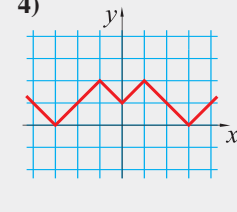
2)



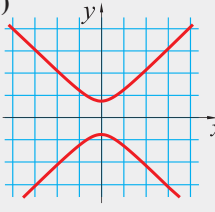
3)



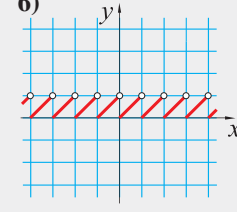
4)



5)



6)



12. Provjeri zadovoljava li zadana funkcija napisanu jednakost:

1)  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ ,  $f(2) = f(1)$

2)  $g(t) = t^3 - 3t^2 + 4t - 1$ ,  $g(2) = g(1)$

3)  $h(u) = 4u^3 - 3u^2 - 5u - 6$ ,  
 $h(3) + 6h(1) = 0$

4)  $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 10$ ,  
 $\varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3)$ .

13. Ako je  $f(x) = 3x^2 + 2$ , izračunaj

1)  $f(2)$                       2)  $f(-2)$

3)  $f(2 + \sqrt{3})$             4)  $f(x + 1)$

5)  $f(x - 1) + f(x + 1)$

6)  $f(f(x))$ .

14. Ako je  $f(x) = x^2 - x + 1$ , koliko je  $(a + 1)f(a) - (a - 1)f(-a)$ ?

15. Ako je  $f(x) = x^3 - 1$ ,  $g(x) = x^3 + 1$ , koliko je  $f(a + 1) - g(a - 1)$ ?

16. Ako je  $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} : \frac{1}{x^3 - 1}$ , koliko je  $f(\sqrt{2})$ ?

17. Odredi nul-točke polinoma drugog stupnja  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ako je  $f(-2) = 4$ ,  $f(1) = -2$ ,  $f(0) = -2$ .

18. Ako je  $f(0) = 1$ ,  $f(x) = x + f(x - 1)$ , za  $x > 0$ , koliko je  $f(100)$ ?

19. Odredi  $f(x)$  ako je:

1)  $f(x + 1) = 3x - 2$

2)  $f(x - \frac{1}{2}) = -2x + \frac{1}{3}$

3)  $f(-\frac{2}{3}x + 1) = x$

4)  $f(2x - 1) = 4x^2 - 3$

5)  $f(x + 3) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

6)  $f(3x - 1) = x^2$ .

20. Odredi  $f(x)$  ako je:

1)  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

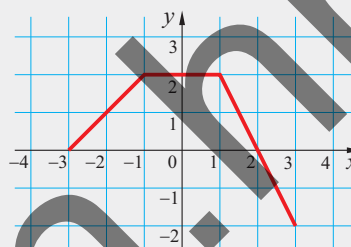
2)  $f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1$

3)  $f\left(\frac{3x - 1}{x + 2}\right) = \frac{x + 1}{x - 1}$

4)  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3x}{2x + 7}$

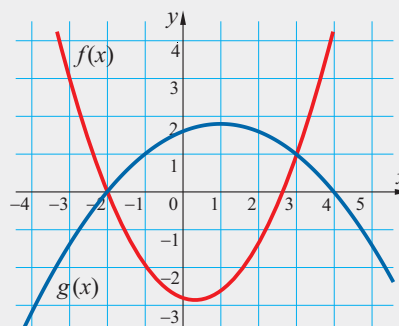
5)  $f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ .

21. Na slici je nacrtan graf funkcije  $f$ .



- 1) Odredi područje definicije.
- 2) Odredi sliku (područje vrijednosti funkcije).
- 3) Pročitaj sa slike  $f(0)$  i  $f(2)$ .
- 4) Za koji  $x$  vrijedi  $f(x) = 1$ ?
- 5) Napiši formulu za  $f(x)$ .

22. Na slici su nacrtani grafovi funkcija  $f$  i  $g$ .



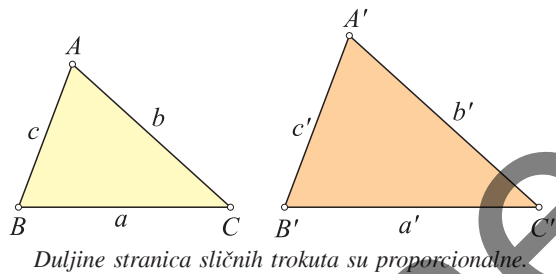
- 1) Očitaj vrijednosti za  $f(1)$  i  $g(-3)$ .
- 2) Za koje  $x$  vrijedi  $f(x) = g(x)$ ?
- 3) Za koje  $x$  vrijedi  $f(x) = 0$ ?
- 4) Za koje  $x$  vrijedi  $g(x) = 0$ ?
- 5) Za koje  $x$  vrijedi  $f(x) = -1$ .

Tražene vrijednosti očitaj približno s točnošću od 1 decimale.

## 3.2. Grafovi jednostavnih funkcija

Znamo da je pravac graf linearne funkcije i znamo nacrtati parabolu koja je graf kvadratne funkcije. Sada ćemo naučiti crtati grafove još nekih jednostavnih funkcija.

Funkcija obrnute proporcionalnosti  $x \mapsto \frac{1}{x}$



Neka su  $a$ ,  $b$  i  $c$  duljine stranica nekog trokuta. Onda njemu sličan trokut ima stranice duljina  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  pri čemu vrijedi

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k.$$

Kažemo da su duljine stranica sličnih trokuta **proporcionalne**. Faktor proporcionalnosti ovdje iznosi  $k$  i to može biti bilo koji pozitivni broj.

Ovisnost duljine stranice sličnog trokuta o duljini stranice početnog dana je linearnom funkcijom

$$a' = k \cdot a.$$

Promotrimo sada stranicu  $a$  i odgovarajuću visinu  $v$  u trokutu kojemu je površina  $P = 2$ . Među njima vrijedi odnos

$$\frac{a \cdot v}{2} = 2$$

pa je

$$v = \frac{4}{a}.$$

Dakle, ako se površina trokuta ne mijenja, onda su stranica i visina na tu stranicu **obrnuto proporcionalne**. Povećanje duljine stranice uzrokuje smanjenje visine. Smanjujemo li duljinu stranice, onda se mora povećati visina da bi trokut zadržao istu površinu.

Veza visine i stranice opisana je funkcijom

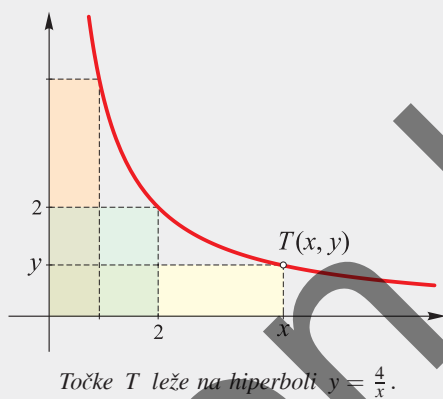
$$f(x) = \frac{k}{x}.$$

Ovdje je  $k > 0$  neki čvrsti broj.

## Primjer 1.

Pravokutnik kojemu su stranice duljina  $x$  i  $y$  ima površinu jednaku 4. Nacrtajmo u pravokutnom koordinatnom sustavu skup svih točaka  $T(x, y)$  s tim svojstvom.

- Površina pravokutnika jednaka je  $xy$ , u našem primjeru je  $xy = 4$ . Zapišimo ovu jednakost u obliku  $y = \frac{4}{x}$ . Točke  $T(x, y)$  koje se iz nje dobiju, leže na luku krivulje koju nazivamo **hiperbola**. Zaključujemo: što je veći  $x$ , manji je pridruženi  $y$  i obrnuto. Te dvije veličine obrnuto su proporcionalne.



U elektroničkom dijelu udžbenika potraži GeoGebra programčić i animiraj ovaj primjer.

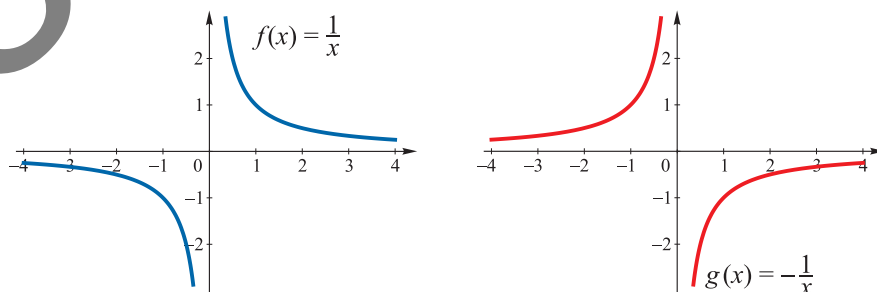


## Funkcija obrnute proporcionalnosti

Funkcija

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

naziva se **funkcija obrnute proporcionalnosti**. Područje definicije ove funkcije je skup  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  jer ona nije definirana samo za  $x = 0$ .



Primjeri grafova funkcije obrnute proporcionalnosti za  $k = 1$  i  $k = -1$ .

### Hiperbola — graf funkcije obrnute proporcionalnosti

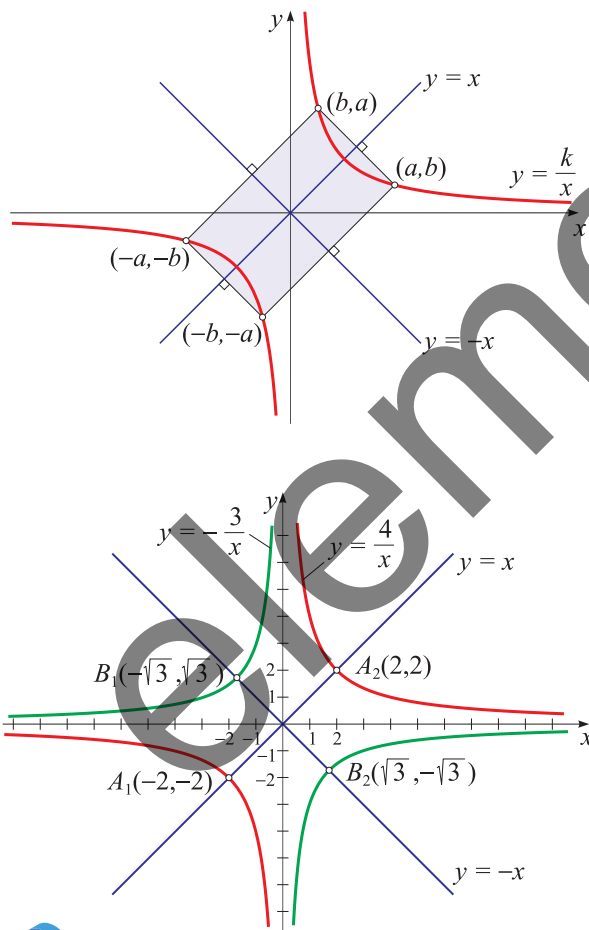
Graf funkcije  $f(x) = \frac{k}{x}$  zovemo **hiperbola**.

Za  $k > 0$  hiperbola je smještena u I. i III. kvadrantu, a za  $k < 0$  smještena je u II. i IV. kvadrantu.

Hiperbola je zrcalno simetrična s obzirom na pravce  $y = x$  i  $y = -x$ .

Ako je  $k > 0$ , presjek pravca  $y = x$  i hiperbole su točke  $T_1$  i  $T_2$  koje nazivamo **tjemena hiperbole**.

Ako je  $k < 0$ , tjemena su presjek hiperbole i pravca  $y = -x$  jer hiperbola tad leži u II. i IV. kvadrantu.



Neka su  $a$  i  $b$  koordinate točke  $A(a, b)$  koja leži na grafu funkcije  $f(x) = \frac{k}{x}$ . Onda vrijedi  $b = \frac{k}{a}$ . Odatle slijede četiri jednakosti

$$b = \frac{k}{a}, \quad a = \frac{k}{b}, \quad -b = \frac{k}{-a}, \quad -a = \frac{k}{-b}.$$

No, to znači da uz točku  $A$  i točke  $B(b, a)$ ,  $C(-a, -b)$  i  $D(-b, -a)$  leže na istoj hiperboli. Te se točke dobivaju iz točke  $A$  zrcaljenjem s obzirom na pravce  $y = x$  i  $y = -x$ . Zato je hiperbola zrcalno simetrična s obzirom na te pravce.

Odredimo tjemena hiperbole  $y = \frac{4}{x}$ . Presjek te hiperbole i pravca  $y = x$  dobivamo iz sustava

$$y = x, \quad y = \frac{4}{x}$$

odakle slijedi

$$x = \frac{4}{x}, \quad x^2 = 4, \quad x = \pm 2.$$

Ordinata je jednaka apscisi. Zato su tjemena  $T_1(-2, -2)$  i  $T_2(2, 2)$ .

Uvjeri se da su tjemena hiperbole  $y = -\frac{3}{x}$  točke  $T_1(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  i  $T_2(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ .



U elektroničkom dijelu udžbenika promotri grafove familije hiperbola koje se dobivaju mijenjanjem parametra  $k$ .



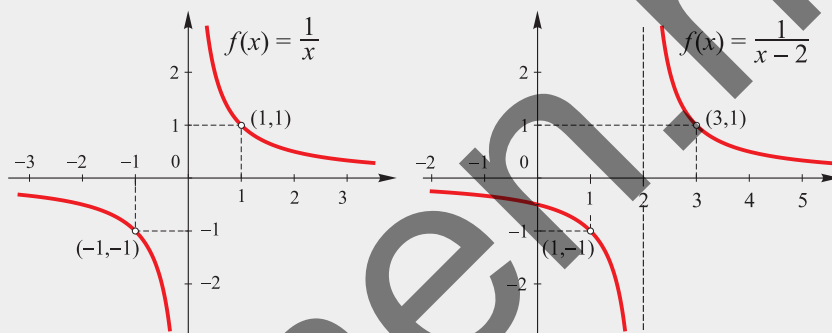
### Translacije grafa

Crtanje grafa funkcije s pomoću translacija upoznali smo crtajući parabole. Graf racionalne funkcije koja je količnik dviju linearnih funkcija možemo dobiti translacijom hiperbole grafa funkcije  $f(x) = \frac{k}{x}$ .

#### Primjer 2.

Nacrtajmo graf funkcije  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ .

- ◆ Graf ove funkcije podudarat će se s grafom funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$ , ali *pomaknutim* za dvije jedinice udesno.



#### Primjer 3.

Nacrtajmo graf funkcije  $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ .

- ◆ Funkciju možemo napisati u obliku

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}.$$

Zato je njezin graf dobiven translacijom grafa funkcije  $y = \frac{1}{x-2}$  za jednu jedinicu prema gore.

