6

Geometrija prostora. Poliedri

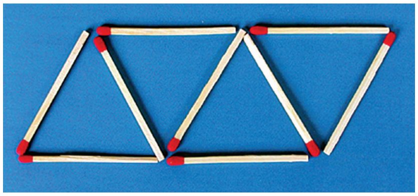
Što ću naučiti?

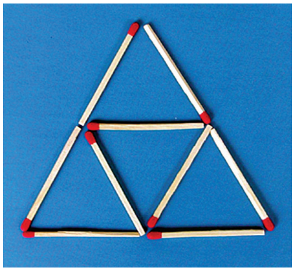
- analizirati i objašnjavati međusobne položaje pravaca i ravnina u prostoru na modelima poliedara
- odrediti udaljenost točke od pravca i ravnine
- opisati prizmu i piramidu te povezivati i izračunavati njihove elemente
- primjenjivati formule za oplošje i obujam prizme i piramide pri rješavanju raznih praktičnih problema
- opisati pravilne poliedre

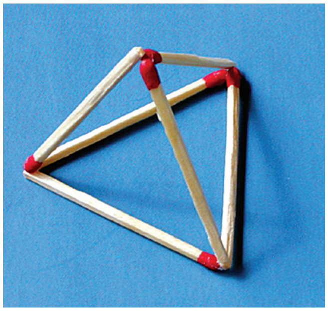
Pripremi se za gradivo koje slijedi, riješi pripremne zadatke koji se nalaze u digitalnoj inačici.

Od šest šibica bez njihovog lomljenja složite četiri jednakostranična trokuta.

Zadatak za nekog zamišljenog stanovnika ravnine uopće nije rješiv. Kako god slagao, uvijek će mu trebati devet šibica. No za onoga tko živi u prostoru triju dimenzija, nema problema. Rješenje zadatka prikazano je na slici desno.







Ovaj zadatak uvodi nas u geometriju prostora.

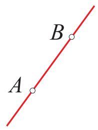
Dosad smo se u srednjoj školi bavili uglavnom planimetrijom, geometrijom ravnine. Uputimo se sada iz ravnine u prostor. To će za nas možda biti i od veće praktične koristi, jer je prostor u kojem čovjek živi prostor triju dimenzija. Ili ga barem on tako doživljava.

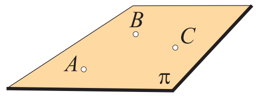
Na osnovi svojih opažanja i praktičnih iskustava čovjek je izgradio apstraktnu sliku tog prostora — geometriju prostora. Ta geometrija opisuje našu prirodnu lokalnu okolinu i u potpunosti je usklađena s našim iskustvima i praktičnim potrebama.

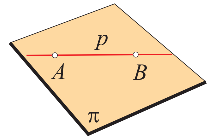
6.1. Točke, pravci i ravnine

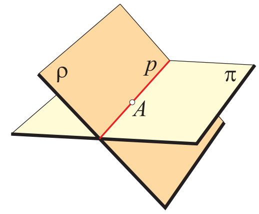
Točka, pravac i ravnina **osnovni su pojmovi geometrije prostora** i oni se ne definiraju. Temeljni odnosi među njima uzimaju se kao istiniti i u skladu su s našim zorom u ravnini i prostoru. Primjerice,

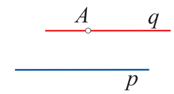
- Pravac je određen s dvije svoje točke: kroz dvije različite točke prolazi točno jedan pravac.
- Ravnina je određena s tri nekolinearne točke: kroz tri točke koje ne leže na jednom pravcu prolazi točno jedna ravnina.
- Pravac koji prolazi kroz dvije različite točke ravnine leži u toj ravnini.
- Ako dvije različite ravnine imaju zajedničku točku, onda se sijeku u pravcu.
- Kroz svaku točku može se povući točno jedna paralela sa zadanim pravcem.

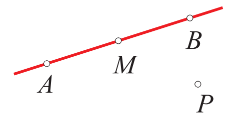




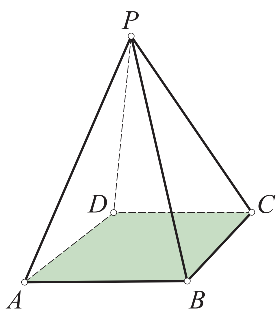








Za točke koje pripadaju jednom pravcu kažemo da su **kolinearne**. Točke A, B, M na slici su kolinearne, ali A, B i P nisu.



Za točke koje leže u jednoj ravnini kažemo da su **komplanarne**. Tri nekolinearne točke uvijek su komplanarne. A četiri po volji odabrane točke prostora (ili više njih) općenito nisu komplanarne. Četiri točke A, B, C, D s baze piramide na slici su komplanarne, ali točka P nije komplanarna s njima.

Stol se s podom dodiruje u četiri točke, pa često zna biti *klimav*, jer te točke ne moraju biti komplanarne. Za razliku od stola, tronožac uvijek čvrsto stoji na podu. **Tripodi** (držači kamera i fotoaparata) uvijek imaju točno tri noge.

Položaj dvaju pravaca u prostoru

Položaj dvaju pravaca

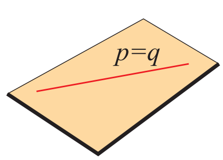
Položaje dvaju pravaca razlikujemo prema sljedećem

1. pravci leže u istoj ravnini

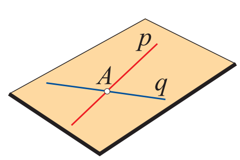
2. pravci ne leže u istoj ravnini.

1. Ako pravci leže u istoj ravnini, tri su mogućnosti: A) pravci se sijeku u jednoj točki. Za njih kažemo da su **ukršteni**. B) pravci nemaju zajedničkih točaka. C) pravci se podudaraju. Za pravce koji nemaju zajedničkih točaka ili se podudaraju kažemo da su **paralelni** (**usporedni**).

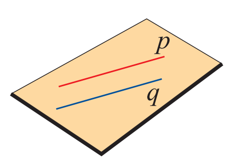
2. Ako dva pravca ne leže u istoj ravnini, za njih kažemo da su **mimoilazna** (**mimosmjerna**).



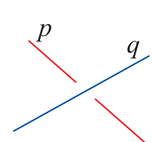
$p=q$



$p \cap q=A$

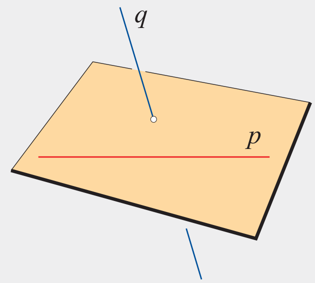


$p||q$



Kriterij mimoilaznosti pravaca

Ako jedan pravac leži u ravnini, a drugi pravac siječe tu ravninu u jednoj točki koja ne pripada prvom pravcu, onda su oni mimoilazni.

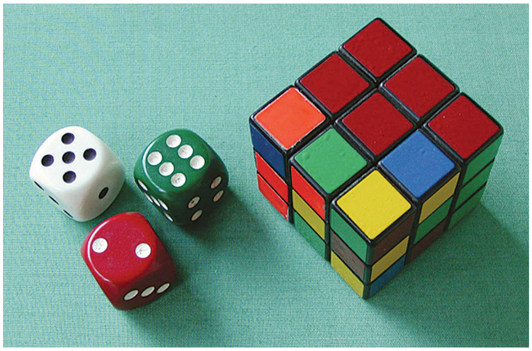


U koliko se točaka sijeku ova četiri pravca? Naravno, odgovor je: ni u jednoj. Ti su pravci mimoilazni.

Mimoilaznost se u prometu često ostvaruje raznim nadvožnjacima ili podvožnjacima.

Možeš li navesti neki sličan primjer?

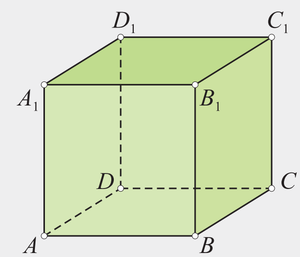
Kocka i tetraedar. Od svih prostornih oblika najjednostavniji su kocka i tetraedar. Kocka je česta igračka: od one za *Čovječe ne ljuti se* pa sve do čuvene *Rubikove kocke*. Tetraedar (trostrana piramida) određena je s četiri točke koje ne leže u jednoj ravnni. Te su točke vrhovi tetraedra. Kockom i tetraedrom ćemo se često koristiti kako bismo zorno ilustrirali odnose pravaca i ravnina u prostoru.



Primjer 1.

Nacrtajmo kocku i označimo njezine vrhove. Možemo zaključiti:

- pravci AC_1 i BD_1 se sijeku
- pravci AC i A_1C_1 su paralelni
- pravci BB_1 i AC su mimoilazni.



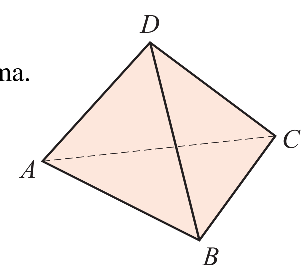
Zadatak 1.

Promotri crtež kocke. Koje su od sljedećih tvrdnji točne?
1) Pravci BD_1 i CC_1 su paralelni.
2) Pravci AA_1 i CD_1 se sijeku.
3) Pravci AD_1 i BC_1 su mimosmjerni.
4) Pravci BD i A_1C_1 su paralelni.
5) Pravci BD_1 i A_1C se sijeku.

Zadatak 2.

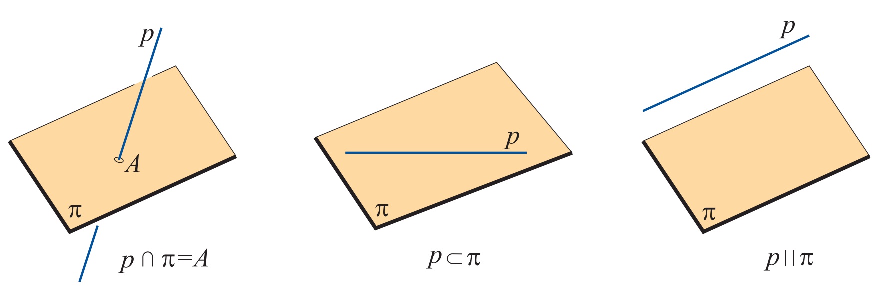
Pravci AC i BD određeni vrhovima tetraedra su mimoilazni.

Navedi još dva para mimoilaznih paraca određenih tim točkama.



Odnos pravca i ravnine

Pravac i ravnina mogu se nalaziti u tri različita položaja. Oni se međusobno isključuju, a jedan od njih mora se dogoditi:



$p \cap \pi = A$ $\quad$ $p \subset \pi$ $\quad$ $p \parallel \pi$

1) Pravac i ravnina se sijeku, pri čemu pravac ne leži u ravnini. Točka A naziva se **sjecište** ili **probodište** pravca i ravnine.

2) Pravac leži u ravnini, $p \subset \pi$.

3) Pravac i ravnina nemaju presječnih točaka.

Kažemo da su pravac i ravnina **paralelni** (**usporedni**) i pišemo: $p \parallel \pi$ ako nemaju presječnh točaka, ili ako pravac leži u ravnini.

Dakle, pravac ili siječe ravninu (u jednoj točki) ili je paralelan s njom.

Zadatak 3.

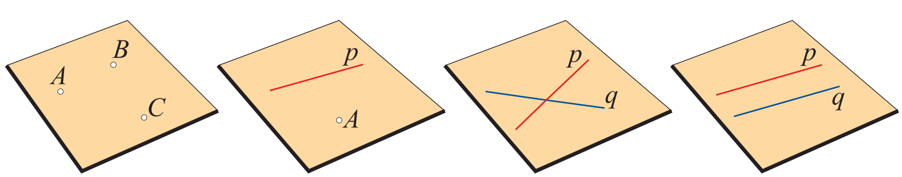
Neka je dana kocka kao u Primjeru 1. Provjeri točnost sljedećih tvrdnji:
1) Pravac CD paralelan je s ravninom A_1BB_1.
2) Pravac BD_1 pripada ravnini A_1BC.
3) Pravac AC_1 siječe ravninu BB_1D_1.

Odnosi među ravninama

Ravnina je određena trima točkama koje ne leže na jednom pravcu, dakle, koje nisu kolineарне.

Zadavanje ravnine

Ravnina može biti zadana:
1. trima točkama koje ne leže na jednom pravcu
2. pravcem i točkom koja ne leži na njemu
3. dvama pravcima koji se sijeku
4. dvama paralelnim pravcima koji se ne podudaraju.

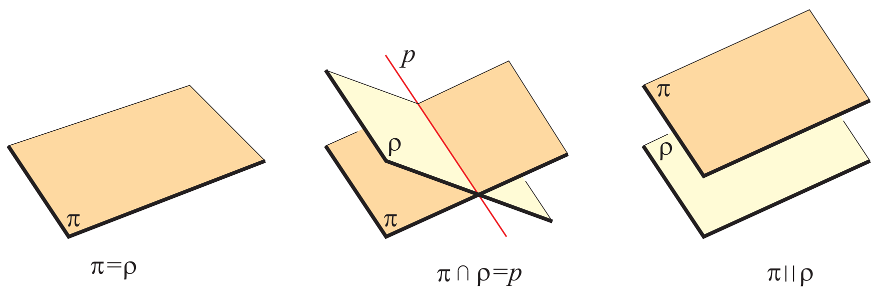


Međusobni odnos dviju ravnina

Dvije ravnine mogu se nalaziti u jednom od sljedeća tri položaja

1. one se podudaraju
2. one se sijeku po nekom pravcu
3. one se ne sijeku.

Kažemo da su dvije ravnine **paralelne** (**usporedne**) ako se ne sijeku ili ako se podudaraju. Dakle, dvije su ravnine ili paralelne, ili se sijeku po nekom pravcu.



Međusobni položaji dviju ravnina

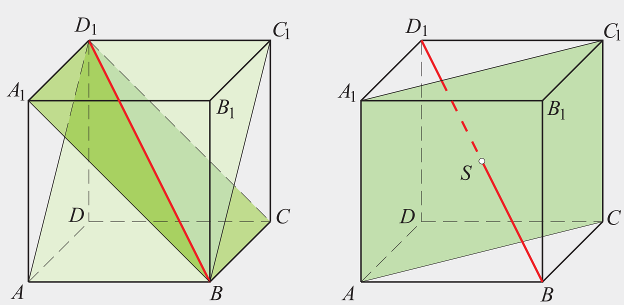
Zadatak 4.

Neka je dan kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Obrazloži točnost sljedećih tvrdnji.

Pravac CD paralelan je s ravninama ABB_1 i $A_1B_1C_1$.
Pravac AA_1 paralelan je s ravninama BCC_1 i CC_1D_1 .
Pravac B_1C_1 paralelan je s ravninom A_1BC .
Pravac BC_1 paralelan je s ravninom ADD_1 .
Pravac AC paralelan je s ravninom A_1BC_1 .

Primjer 2.

Tri dijagonalna presjeka kocke leže u ravninama koje se sijeku u jednoj točki:



Na slici lijevo: ravnine ABC_1 i BCD_1 sijeku se u pravcu BD_1 .

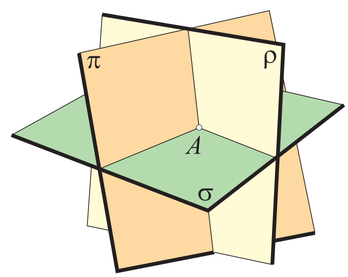
Na slici desno: treću dijagonalnu ravninu ACC_1 pravac BD_1 probada u točki S .

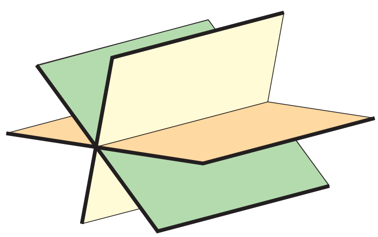
Tri ravnine u prostoru

Tri različite ravnine u prostoru mogu biti u jednom od pet položaja:

1. Postoji samo jedna točka zajednička za sve tri ravnine.
2. Sijeku se duž jednog pravca.
3. Po dvije ravnine sijeku se u trima paralelnim pravcima.
4. Dvije su ravnine paralelne, a treća ih siječe duž dvaju paralelnih pravaca.
5. Sve su tri ravnine paralelne.

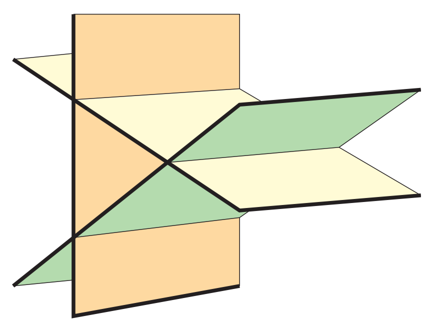
Prikazan je opći položaj triju ravnina. Svake dvije ravnine sijeku se duž jednog pravca, a sve tri ravnine imaju jednu zajedničku točku.

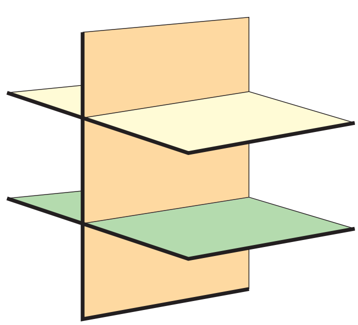




Tri se ravnine sijeku duž jednog pravca.

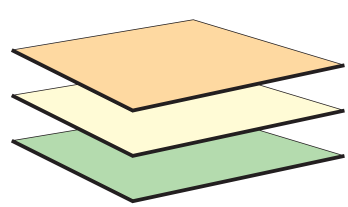
Svake se dvije ravnine sijeku duž jednog pravca. Presječni pravci su paralelni pa ne postoji presječna točka svih triju ravnina.



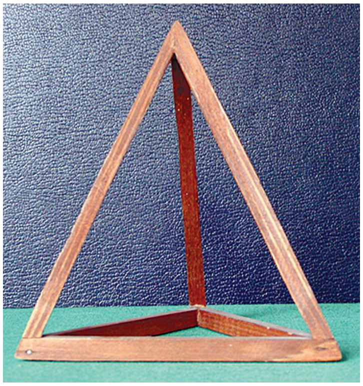


Dvije su ravnine paralelne. Treća ih siječe duž dvaju pravaca. Ta dva pravca moraju biti paralelna jer se ne smiju sjeći (prve se dvije ravnine ne sijeku, pa se ne sijeku niti pravci koji leže u njima).

Sve su tri ravnine paralelne.



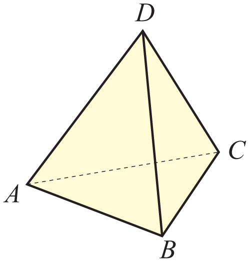
TETRAEDAR



Najjednostavniji prostorni lik je trostrana piramida ili **tetraedar**.

Naziv je složenica grčkog podrijetla: *tetra* = *četiri*, *edros* = *ploha*.

Posebice je za nas prikladan pravilni tetraedar, tetraedar čije su sve četiri strane jednakostranični trokuti.



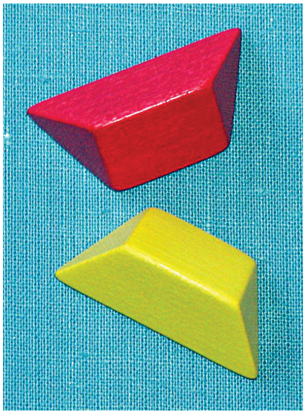
Baš kao što je trokut elementaran lik u ravnini, tako je i tetraedar najjednostavnije tijelo u prostoru. Usporedbe trokuta i tetraedra vrlo su logične i česte. Mnoga svojstva trokuta poopćavaju se na tetraedar. Ovakve vrste sličnosti zovemo *analogijama*, a sam postupak zaključivanja, *metoda analogije* jedan je od osnovnih postupaka u matematici.

Primjerice:

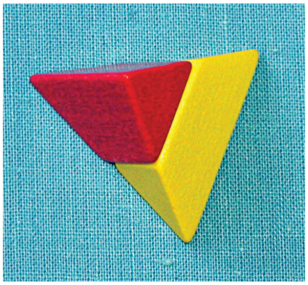
Težišnice trokuta su dužine koje spajaju vrh trokuta i polovište suprotne stranice. Sijeku se u jednoj točki koja se zove **težište trokuta**. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$, računajući od vrha.

Ovom *Poučku o težištu trokuta* odgovara analogan *poučak* za tetraedar.

Težišnice tetraedra su dužine koje spajaju vrh tetraedra i težište suprotne strane. Sijeku se u jednoj točki koja se zove **težište tetraedra**. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $3:1$, računajući od vrha tetraedra.



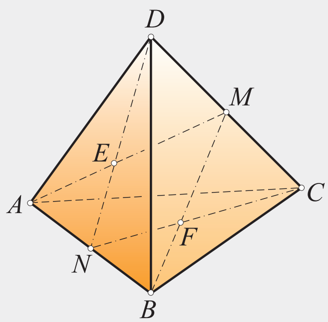
Presiječemo li tetraedar ravninom koja polovi četiri brida, raspast će se na dva dijela, vidi sliku lijevo. Slagalica postavlja obrnut zadatak; da se od tih dvaju dijelova složi pravilni tetraedar. Slika desno prikazuje rješenje.



Prikazivanje trodimenzionalnih skupova točaka u ravnini

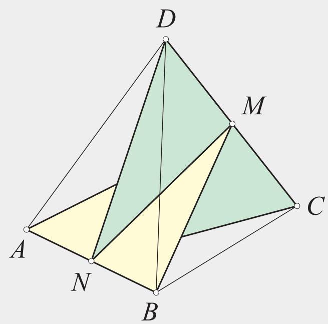
Primjer 3. Točke M i N polovišta su bridova $\overline{CD}$ i $\overline{AB}$ pravilnog tetraedra $ABCD$. Odredimo presjek ravnina ABM i CDN.

Nacrtajmo tetraedar $ABCD$ i istaknimo ravnine ABM i CDN.



Što je njihov presjek?

Površnim promatranjem slike stječe se dojam da je to pravac EF jer se čini da je točka E presjek pravaca AM i DN, a točka F pravaca BM i CN. To je, međutim, netočno. Naime, pravci BM i NC su mimoilazni, baš kao i pravci AM i DN.



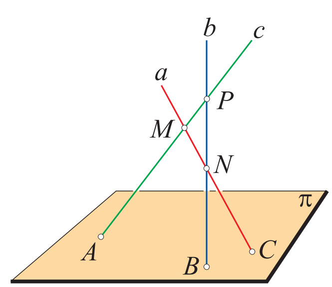
Kako točka M leži u ravnini CDN, i pravac MN mora ležati u toj ravnini. Isto tako, točka N leži u ravnini ABM pa i pravac MN leži u toj ravnini.

Dakle, pravac MN leži u objema promatranim ravninama i stoga je on njihov presjek.

Ova druga sličica svakako će ostaviti jasniji dojam o ovom rješenju.

Trodimenzionalne skupove točaka prikazujemo crtežima u ravnini i to ponekad stvara teškoće, a često može i prevariti naš zor. Evo još jednog tipičnog primjera koji to ilustrira.

Neka se pravci a, b i c sijeku po dva u točkama M, N i P i neka su A, B i C njihova probodišta s ravninom π.



Što ne valja na ovoj slici?

Na slici ne vidimo ništa dvojbeno.

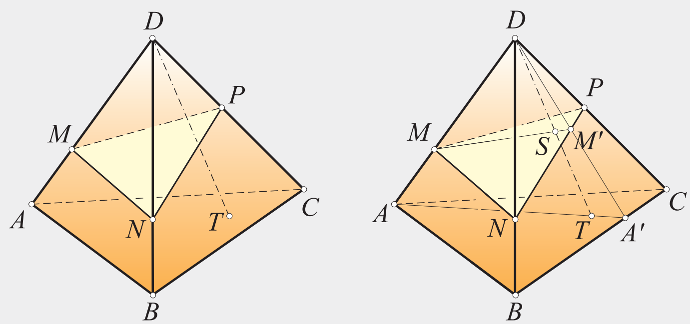
Promotrimo, međutim, međusobne odnose triju pravaca. Trima točkama, M, N i P jednoznačno je određena ravnina σ. Toj ravnini pripadaju i pravci a, b i c jer ona sadrži po dvije točke svakog od njih.

Ravnine π i σ nisu paralelne, njihov je presjek pravac.

To onda znači da točke A, B i C leže na jednom pravcu.

Zadatak 5. Neka se pravci a i b sijeku u točki P. Ako pravac c siječe i pravac a i pravac b, a nije komplanaran s njima, onda on prolazi točkom P. Dokaži.

Primjer 4. Na bridovima $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ tetraedra $ABCD$ uzete su redom točke M, N, P. Neka je T točka unutar trokuta ABC. U kojoj točki S pravac DT siječe ravninu MNP?



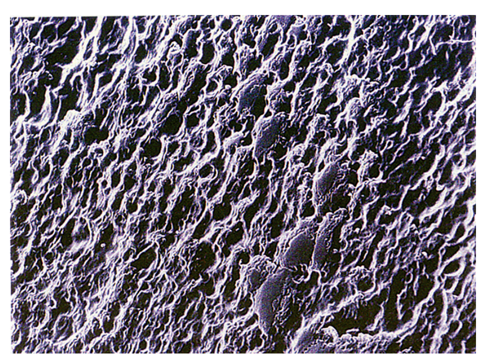
Ovaj put ‘vidimo’ da pravac siječe ravninu. Međutim, u kojoj točki? Do nje moramo doći konstrukcijom pomoćnih ravnina i pravaca.

Neka je A' presječna točka pravca AT i pravca BC, a M' presječna točka pravca DA' i NP. Zbog konstrukcije sve točke A, T, A', M, M' i D leže u istoj ravnini.

Ravnine $AA'D$ i MNP sijeku se duž pravca MM'. Znači da tražena točka S leži na presjeku pravaca MM' i DT.

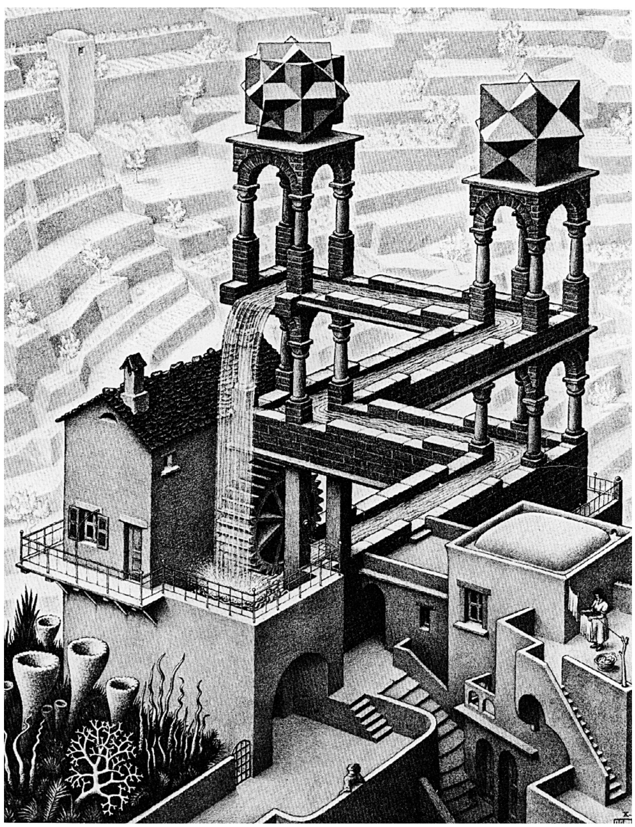
RAVNO KAO STAKLO

Kada želimo istaknuti kako je nešto ravno, često to usporedimo s ravnim, prozorskim staklom. Koliko je ono uistinu ravno, možemo vidjeti sa slike na kojoj je površina ravnog stakla uvećana 300 puta.



NEMOGUĆE KONSTRUKCIJE

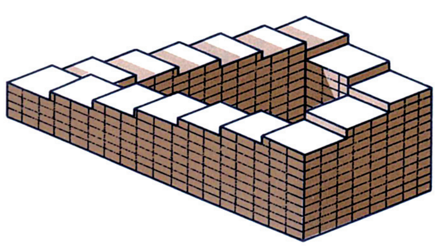
Nesavršenosti zora i prikazivanje trodimenzionalnih objekata u ravnini omogućuju nam da uživamo u nemogućim konstrukcijama, koje se u trodimenzionalnom svijetu ne mogu ostvariti. To prekrasno ilustriraju poznate grafike nizozemskog umjetnika Mauritsa Cornelisa Eschera (1898. – 1972.).



Na gornjoj slici *Čovjek s kockom* (1958.) obratite pozornost na kocku. Takva kocka uistinu može postojati samo na slici.

Lijevo je poznata litografija *Vodopad* iz 1961. god. Prekrasan je to primjer matematičkog *perpetuum mobilea*. Iz vodopada se voda slijeva u žlijeb koji je na istoj razini kao i najviša točka vodopada.

Stepenice dolje mogu poslužiti onima koji hoće ići stalno nizbrdo, ili bolje, za treniranje pred planinarski pohod.



Zadatci 6.1.

1. Koliko različitih ravnina možemo postaviti kroz:
1) jednu točku u prostoru
2) dvije točke u prostoru
3) tri točke u prostoru?

2. Koliko je različitih ravnina zadano četirima nekomplanarnim točkama?

3. Koliko je različitih ravnina zadano peterima točkama od kojih nikoje četiri nisu komplanarne?

4. Zadana je ravnina π i paralelogram $ABCD$. Može li ovoj ravnini pripadati:
1) točno jedan vrh **2)** točno dva vrha
3) točno tri vrha paralelograma?

5. Nacrtaj kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pa istakni ravninu koja je zadana trima točkama:
1) A, C, C_1 **2)** B, C, D_1 **3)** A, C, D_1.

6. Nacrtaj kvadar te istakni ravninu koja je određena
1) točkom D_1 i pravcem BD
2) točkom C i pravcem A_1B
3) točkom A_1 i pravcem CC_1.

7. Nacrtaj kvadar te istakni ravninu što je određena pravcima:
1) BD_1 i A_1C **2)** AC i AD_1 **3)** BD_1 i BC_1.

8. Nacrtaj kvadar te istakni ravninu što je određena pravcima:
1) AC i A_1C_1 **2)** AB i C_1D_1 **3)** A_1D i B_1C.

9. Kakav može biti međusobni položaj dvaju pravaca od kojih svaki leži u jednoj od dviju paralelnih ravnina?

10. Dvije ravnine koje se sijeku presječene su trećom ravninom. Mogu li dva dobivena pravca biti paralelna?

11. Ako su pravci a i b, te b i c mimoilazni, jesu li nužno i pravci a i c mimoilazni?

12. Nacrtaj kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$ te istakni ravninu BCD_1. Koji od pravaca AD_1, A_1C, A_1B i A_1C_1 pripada toj ravnini?

13. Nacrtaj kvadar i istakni ravninu ABC_1. U kojem su odnosu prema toj ravnini pravci CD, BD_1, A_1C, A_1B_1?

14. Nacrtaj kvadar i istakni ravninu ACD_1. U kojem su odnosu prema njoj pravci A_1B_1, A_1C_1, BC_1?

15. Nacrtaj kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Neka su P, Q i R polovišta bridova $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$ i $\overline{BB_1}$. U kojem su odnosu ravnine
1) PQR i ACC_1 **2)** PQR i A_1BC_1?

TOČNO-NETOČNO PITALICE

Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

1. Ravnina je određena bilo kojim trima različitim točkama.

2. Dva pravca koji leže u paralelnim ravninama i sami su paralelni.

3. Probodišta triju pravaca koji sijeku ravninu i ne leže u njoj sijeku ravninu u trima točkama koje su vrhovi trokuta.

4. Četiri točke u ravnini određuju najviše šest pravaca. Pet točaka u ravnini određuju najviše deset pravaca.

5. Četiri nekomplanarne točke prostora određuju četiri ravnine.

6. Ako su E i F polovišta bridova $\overline{AB}$ i $\overline{C_1D_1}$, a točke M i N polovišta bridova $\overline{BC}$ i $\overline{A_1D_1}$ kocke, pravci EF i MN su mimoilazni.

7. Ako su dani pravci a, b i c i ako je $a \parallel b$ i $b \parallel c$, onda je i $a \parallel c$.

8. Ako su pravci a i b mimoilazni i ako je pravac c mimoilazan s a, tada su mimoilazni i pravci b i c.